ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯДОВ С ПРОСТРАНСТВЕННО-МОДУЛИРОВАННЫМИ МАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

Р. И. Ковтун (Харьков)

Рассматривается общий случай применения асимптотического метода Крылова — Боголюбова к анализу движения зарядов в суперпозиции относительно сильного однородного магнитного поля и некоторого слабого возмущения, которое не конкретизируется и может зависеть от всех трех пространственных координат. В данном случае выбирается цилиндрическая система отсчета (r, φ, z), где ось z параллельна сильному однородному полю. Показано, что такую задачу можно свести к решению квазигармонического уравнения, коэффициенты которого зависят от двух медленно изменяющихся параметров, причем изменения последних описываются двумя независимыми уравнениями первого порядка. Следовательно, эти три уравнения образуют систему, к которой применимы обычные методы асимптотической теории нелинейных колебаний и, в частности,— способ решения, описанный в § 13, гл. III монографии Ю. А. Митропольского [1].

Итак, предположим, что компоненты рассматриваемого здесь магнитного поля можно записать в виде

$$H_z = H_0\,[1 + \varepsilon h_z(r, \varphi, z)], \quad H_r = \varepsilon H_0 h_r(r, \varphi, z), \quad H_\varphi = \varepsilon H_0 h_\varphi(r, \varphi, z)$$

Подставляя их в уравнения движения заряда e массы m и полагая $\omega_0 = eH_0 / mc$, получаем [2]

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\omega_0\{r\dot{\varphi} + \varepsilon(r\dot{\varphi}h_z - \dot{z}h_\varphi)\}, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \omega_0\{r\dot{r} + \varepsilon r(\dot{z}h_r - \dot{r}h_z)\}$$

Положим

$$\dot{\varphi} = {}^1/_2\,\omega_0 + \theta / r^2 \tag{1}$$

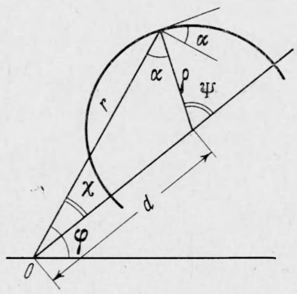
Здесь θ — новая неизвестная функция. Тогда система (1) перейдет в следующую

$$\ddot{r} + {}^1/_4\,\omega_0^2 r - \theta^2 / r^3 = \varepsilon\omega_0\{vh_\varphi - r({}^1/_2\,\omega_0 + \theta / r^2)\,h_z\} \tag{2}$$

$$\dot{\theta} = \varepsilon\omega_0 r(vh_r - \dot{r}h_z), \quad \dot{v} = \varepsilon\omega_0\{r({}^1/_2\,\omega_0 + \theta / r^2)\,h_r - \dot{r}h_\varphi\}\ (v \equiv \dot{z})$$

Отсюда видно, что θ, как и v, будут медленными функциями времени. Нетрудно показать, что в случае постоянного однородного поля θ также постоянна и равна ${}^1/_2\,\omega_0(\rho^2 - d^2)$, где ρ — радиус ларморовской орбиты заряда, а d — расстояние от центра этой орбиты до оси z. Из фигуры следует, что изменение координаты φ заряда за малое время равно

$$\Delta\varphi = \frac{\rho}{r}\,\Delta\psi\cos\alpha = \frac{\rho(\rho + \alpha\cos\psi)}{r^2}\,\Delta\psi$$



Фиг. 1

Отсюда после подстановки $r^2 = \rho^2 + d^2 + 2\rho d\cos\psi$ и элементарных преобразований

$$\dot{\varphi} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho^2 - d^2}{2r^2}\right)\dot{\psi} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\rho^2 - d^2}{r^2}\right)(\omega_0 + \dot{P}) \tag{3}$$

где $\dot{P}$ — малая величина, так как она должна обращаться в нуль вместе с ε. Сравнивая (3) с (1), находим

$$\theta = {}^1/_2\,\omega_0(\rho^2 - d^2) + \dot{P}\rho(\rho + d\cos\psi) \tag{4}$$

Выделим теперь из координаты φ заряда быстроменяющуюся часть $\chi = \arcsin(\rho\sin\psi / r)$ и обозначим разность $\varphi - \chi$ через η. Тогда при помощи (3) нетрудно проверить, что

$$\dot{\eta} = r^{-2}(\rho\dot{d} - \dot{\rho}d)\sin\psi$$

Поэтому с точностью до первого порядка можно положить

$$\eta = \sigma + \frac{\dot{\rho}d - \rho\dot{d}}{\omega_0\rho d}\ln r \tag{5}$$

Здесь σ — произвольная константа, которую, однако, можно считать меньшей 2π. Отсюда вытекает, что в рамках первого приближения $\varphi = \sigma + \chi(\psi)$, так как в уравнениях движения все зависящие от φ члены умножены на ε, а второе слагаемое справа в (5) можно отбросить, если, конечно, r не обращается в нуль; чтобы избежать последнее, нужно исключить из рассмотрения случай $|\rho - d| \lesssim \varepsilon$, так как при $|\rho - d| \sim \varepsilon$, $r \sim \varepsilon$ и второй член справа в (5) все еще мал (его порядок $\sim \varepsilon\ln\varepsilon$).

Итого φ в правых частях уравнений (2) можно всюду заменить на $\sigma + \chi(\psi)$

$$\varphi = \sigma + \arcsin [\rho \sin\psi / r]$$

На практике во многих случаях важнее знать изменение параметров движения заряда с координатой z, а не со временем t, поэтому в уравнениях (2) от дифференцирования по t перейдем к дифференцированию по z, обозначая последнее штрихом, т. е. $r' = \partial r / \partial z$ и т. д. Тогда

$$r^{\cdot\cdot} = r''v^2 + r'v^{\cdot}, \quad | r'v^{\cdot} | \ll | r''v^2 | \quad (v^{\cdot} \sim \varepsilon)$$

Поэтому в первом уравнении (2) член $r'v^{\cdot}$ следует перенести направо и заменить $v^{\cdot}$ правой частью третьего уравнения (2). Вводя, кроме того, $\Omega(v) = \omega_0 / 2v$, получаем вместо системы (2)

$$r'' + \Omega^2 r - \left(\frac{\theta}{v}\right)^3 \frac{1}{r^3} = \varepsilon 2\Omega \left\{h_\varphi - r\left(\Omega + \frac{\theta}{vr^3}\right)h_z\right\} - \frac{r'v'}{r} \tag{6}$$

$$\theta' = \varepsilon\omega_0 r (h_r - r'h_z), \qquad v' = \varepsilon\omega_0 \left\{r\left(\Omega + \frac{\theta}{vr^2}\right)h_r - r'h_\varphi\right\}$$

Введем теперь вместо r новую искомую функцию τ, связанную с r следующим образом:

$$r = \sqrt{\rho^2 + d^2 + \tau} \quad \text{или} \quad \tau = 2\rho d \cos\psi \tag{7}$$

При этом при переходе к дифференцированию по z следует положить

$$\psi = \int \Omega(v)\, dz + \Phi(z)$$

Здесь $\Phi(z)$ — очевидно, медленная функция z. Введем обозначение

$$a = 2\rho d, \quad b = \rho^2 + d^2 \tag{8}$$

Подставим (7) в первое уравнение (6) и продифференцируем его по z. Перенесем вправо все малые величины и разделим уравнение на $2r^2 = 2(\tau + b)$; в результате получим

$$\frac{d}{dz}(\tau'' + \Omega^2\tau) = \frac{2}{r^2}\frac{d}{dz}[r^3 \varepsilon F(\ldots)] + \frac{1}{2}(\Omega^2)'(\tau - b) - b''' - \Omega^2 b' + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\theta^2}{v^2}\right) \tag{9}$$

Здесь $\varepsilon F(\ldots)$ — правая часть первого уравнения (6). Производные от θ и v заменяются здесь правыми частями уравнений (6), а b можно исключить при помощи определения (8) и соотношения (4), откуда

$$b = b_0 - 2\frac{P^{\cdot}\theta}{\omega_0^2}\left\{1 + \frac{2}{b_0}\left(\frac{\theta}{\omega_0} + \frac{a}{2}\cos\psi\right)\right\}, \quad b_0 = \left(a^2 + 4\frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}$$

Ввиду малости $P^{\cdot}$ в фигурных скобках следует дифференцировать только $\cos\psi$. Поэтому вблизи резонанса, когда $(\Omega^2 - \nu^2)$ мало, получаем в первом приближении из уравнения (9)

$$\frac{d}{dz}(r'' + \Omega^2\tau) = \frac{2}{r^2}\frac{d}{dz}[\varepsilon r^3 F(\ldots)] + \frac{1}{2}(\Omega^2)'(\tau - b_0) - b_0' + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\theta^2}{v^2}\right). \tag{10}$$

Линейность левой части этого уравнения позволяет решать его обычными асимптотическими методами, т. е. полагая $\tau = a\cos\psi + \varepsilon u_1(\ldots)$ и находя a и $\Phi - \nu z$ из уравнений

$$\frac{da}{dz} = \varepsilon A_1(a, v, \theta, \Phi), \qquad \frac{d\Phi}{dz} = \Omega(v) - \nu + \varepsilon B_1(a, v, \theta, \Phi)' \tag{11}$$

Здесь $2\pi / \nu$ период возмущающего поля по координате z.

Уравнения (11) решаются совместно с уравнениями, описывающими медленное изменение параметров v и θ (см. [1], § 13, гл. III). Третий порядок уравнения (11) лишь незначительно усложняет определение функций $A_1(a, v, \theta, \Phi)$ и $B_1(a, v, \theta, \Phi)$, в остальном расчет не претерпевает никаких сколько-нибудь важных изменений и выполняется без предположений о параксиальности движения или малости энергии поперечного движения заряда.

Поступила 16 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. Изд-во «Наука», 1964.
2. Зинченко Н. С. Курс лекций по электронной оптике. Изд. Харьк. ун-та, 1961.