НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПРОМЫВКЕ СКВАЖИНЫ

И. М. Астрахан, В. И. Марон

(Москва)

Излагается решение нестационарной осесимметричной задачи об изменении температуры жидкости, которая закачивается в скважину через центральную трубу (бурильную или эксплуатационную), опущенную до забоя, и вытекает на поверхность земли через затрубное кольцевое пространство [1, 2].

Скважина постоянной глубины L пробурена в грунте с естественным установившимся распределением температуры и до начала закачки заполнена жидкостью, температура которой изменяется в соответствии с геотермическим градиентом. Жидкость поступает в центральную трубу с постоянным расходом Q и известной температурой, меняющейся со временем. В качестве примеров рассматриваются два случая. В первом жидкость поступает в центральную трубу с постоянной температурой. Во втором случае температура жидкости, закачиваемой в центральную трубу, переменная и равна температуре жидкости, вытекающей из скважины через кольцевое затрубное пространство (замкнутая циркуляция).

Обе задачи представляют интерес для практики бурения скважин и термического воздействия на нефтяной пласт.

1. Ось Oz цилиндрической системы координат, начало которой находится на уровне поверхности грунта, направим вниз по оси центральной трубы.

Уравнения притока тепла жидкости, движущейся в центральной трубе и кольцевом пространстве, имеют вид

при $t > 0,\ 0 < z < L,\ 0 < r < R_1$

$$\pi R_1^2 \frac{\partial T_1}{\partial t} + \pi R_1^2 w_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{k}{c\rho} 2\pi R_1 (T_2 - T_1) \tag{1.1}$$

при $t > 0,\ 0 < z < L,\ R_1 < r < R$

$$\pi (R^2 - R_1^2) \frac{\partial T_2}{\partial t} - \pi (R^2 - R_1^2) w_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = \frac{k}{c\rho} 2\pi R_1 (T_1 - T_2) + q_w$$

Здесь T_1 и T_2 — температура ядра потока жидкости, движущейся соответственно в центральной и кольцевой трубах (предполагаем, что температура в поперечном сечении каждой трубы изменяется незначительно по отношению к этим величинам и они определяют температуру жидкости во всем сечении); w_1 и w_2 — средние скорости движения жидкости соответственно в центральной и кольцевой трубах (их величины равняются расходу, деленному на соответствующую площадь); q_w — поток тепла к внутренней поверхности скважины; R_1 и R — радиусы центральной трубы и скважины; ρ и c — плотность жидкости и ее удельная теплоемкость; k — коэффициент теплопередачи между жидкостью в центральной трубе и жидкостью в кольцевом пространстве.

Коэффициент теплопередачи зависит от скорости течения, теплофизических свойств жидкости, геометрии области течения и вычисляется по известным формулам теории теплопередачи.

Нетрудно видеть, что в уравнения (1.1) не входят слагаемые, учитывающие изменение теплового потока из-за теплопроводности вдоль оси и тепло, выделяющееся в жидкости из-за вязкого трения. Величинами этих слагаемых в первом приближении можно пренебречь по сравнению с остальными членами уравнений.

Кроме того, принимается, что тепловые потоки к внешней и внутренней поверхностям центральной трубы пропорциональны разности температур ядра потока в центральной и кольцевой трубах.

В последнее уравнение системы (1.1) входит величина потока тепла со стороны жидкости к внутренней поверхности скважины. Эту величину можно вычислить, если не учитывать теплопередачу внутри материала скважины и приравнять потоки тепла и температуры жидкости и грунта на ее поверхности

$$q_w = 2\pi R \varkappa \lambda \left(\frac{\partial T_3}{\partial r}\right)_{r=R}, \qquad T_2 = (T_3)_{r=R}, \quad \lambda = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \tag{1.2}$$

Здесь λ — отношение коэффициентов теплопроводности грунта и жидкости; T_3 — температура грунта; $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности жидкости.

За практически важный интервал времени грунт прогревается вдоль радиуса на длину много меньшую, чем длина скважины, при этом перепады температуры вдоль радиуса и на длине скважины приблизительно одинаковые. Поэтому в уравнении притока тепла в грунте можно пренебречь членом $\partial^2 T / \partial z^2$ по сравнению с остальными членами [2]. Уравнение притока тепла в грунте имеет следующий вид

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = \varkappa_3 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T_3}{\partial r}\right) \qquad (t > 0,\ 0 < z < L,\ R < r < \infty)$$
$$T_3 = T_3(t, z, r) \tag{1.3}$$

Здесь $\varkappa_3$ — коэффициент температуропроводности грунта.

Начальные и краевые условия для случая, когда жидкость поступает в центральную трубу с известной переменной температурой, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&T_1 = T_2 = T_3 = T_* + \Gamma z \quad (t = 0,\ 0 \leqslant z \leqslant L,\ 0 \leqslant r < \infty)\\
&T_1 = T_0(t) \quad (t > 0,\ z = 0)\\
&T_1 = T_2 \quad (t > 0,\ z = L)\\
&T_3 \to T_* + \Gamma z \quad (t > 0,\ r \to \infty)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь T_* — температура нейтрального слоя; Γ — геотермический градиент; $T_0(t)$ — температура закачиваемой жидкости.

Введем безразмерные переменные

$$\omega = \frac{T - T_*}{T_*}, \quad \xi = \frac{z}{L}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{w_1}{L} t \tag{1.5}$$

При помощи этих величин уравнения (1.1), (1.3) и предельные условия (1.4) запишутся следующим образом:

при $\tau > 0,\ 0 < \xi < 1,\ 0 < \eta < R_1 / R$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi} = a(\omega_2 - \omega_1) \qquad \left(a = \frac{kL2\pi R_1}{\rho c Q}\right)$$

при $\tau > 0,\ 0 < \xi < 1,\ R_1 / R < \eta < 1$ (1.6)

$$\frac{w_1}{w_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial \tau} - \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi} = a(\omega_1 - \omega_2) + \lambda b \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial \eta}\right)_{\eta=1} \qquad \left(b = \frac{2\pi\varkappa L}{Q}\right)$$

при $\tau > 0,\ 0 < \eta < \infty,\ 0 < \xi < 1,$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} = \frac{\alpha}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \frac{\partial \omega_3}{\partial \eta}\right) \qquad \left(\alpha = \frac{\varkappa_3 \pi R_1^2 L}{R^2 Q}\right)$$

при $\tau = 0,\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1,\ 0 \leqslant \eta < \infty$

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \gamma\xi \quad (\gamma = \Gamma L / T_*)\\
&\omega_1 = \omega_0(\tau) \quad (\tau > 0,\ \xi = 0)\\
&\omega_1 = \omega_2 \quad (\tau > 0,\ \xi = 1)\\
&\omega_2 = (\omega_3)_{\eta=1} \quad (\tau > 0,\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1)\\
&\omega_3 \to \gamma\xi \quad (\tau > 0,\ \eta \to \infty)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Введем новую функцию

$$\theta = \omega - \gamma\xi \tag{1.8}$$

Для этой функции уравнения (1.6) и условия (1.7) перепишутся

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} + \gamma = a(\theta_2 - \theta_1), \qquad \theta_1 = \theta_1(\tau, \xi)\\
&\frac{w_1}{w_2}\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} - \gamma = a(\theta_1 - \theta_2) + \lambda b\left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \eta}\right)_{\eta=1}, \qquad \theta_2 = \theta_2(\tau, \xi)\\
&\frac{\partial \theta_3}{\partial \tau} = \frac{\alpha}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial \theta_3}{\partial \eta}\right), \qquad \theta_3 = \theta_3(\tau, \xi, \eta)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
&\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0 \quad (\tau = 0,\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1,\ 0 \leqslant \eta < \infty)\\
&\theta_1 = \omega_0 \quad (\tau)\ (\tau > 0,\ \xi = 0)\\
&\theta_1 = \theta_2 \quad (\tau > 0,\ \xi = 1)\\
&\theta_2 = (\theta_3)_{\eta=1} \quad (\tau > 0,\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1)\\
&\theta_3 \to 0 \quad (\tau > 0,\ \eta \to \infty)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

2. К уравнениям (1.9) и условиям (1.10) применим одномерное преобразование Лапласа — Карсона по переменной τ. Изображение функции θ, которое получается в результате преобразования по переменной τ, обозначим Θ, т. е.

$$\Theta(p, \xi, \eta) = p\int_0^\infty e^{-p\tau}\theta(\tau, \xi, \eta)\, d\tau \tag{2.1}$$

В результате преобразования получается

$$p\Theta_1 + \frac{d\Theta_1}{d\xi} + \gamma = a(\Theta_2 - \Theta_1), \qquad \Theta_1 = \Theta_1(p, \xi), \qquad \Theta_2 = \Theta_2(p, \xi)$$

$$up\Theta_2 - \frac{d\Theta_2}{d\xi} - \gamma = a(\Theta_1 - \Theta_2) + \lambda b\left(\frac{\partial\Theta_3}{\partial\eta}\right)_{\eta=1} \qquad \left(u = \frac{w_1}{w_2}\right)$$

$$p\Theta_3 = \frac{\alpha}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\Theta_3}{\partial\eta}\right), \qquad \Theta_3 = \Theta_3(p, \xi, \eta) \tag{2.2}$$

$$\Theta_1 = \Omega_0 \quad (\xi = 0), \qquad \Theta_1 = \Theta_2 \quad (\xi = 1) \tag{2.3}$$

$$\Theta_3 \to 0 \quad (\eta \to \infty), \qquad \Theta_2 = (\Theta_3)_{\eta=1} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1)$$

Здесь Ω_0 — изображение функции $\omega_0(\tau)$.

Решение последнего уравнения (2.2), удовлетворяющее условию на бесконечности, имеет вид

$$\Theta_3 = \Phi(p, \xi) K_0(\sqrt{p/\alpha}\,\eta) \tag{2.4}$$

Здесь $\Phi(p, \xi)$ — неизвестная функция p и ξ, которая определяется из условия при $\eta = 1$. Нетрудно убедиться, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\left(\frac{\partial\Theta_3}{\partial\eta}\right)_{\eta=1} = -\Phi(p, \xi)\sqrt{p/\alpha}\,K_1(\sqrt{p/\alpha}) =$$

$$= -\sqrt{p/\alpha}\,f(p, \alpha)(\Theta_3)_{\eta=1} = -\sqrt{p/\alpha}\,f(p, \alpha)\,\Theta_2$$

$$f(p, \alpha) = \frac{K_1(\sqrt{p/\alpha})}{K_0(\sqrt{p/\alpha})} \tag{2.5}$$

Здесь $K_0(x)$, $K_1(x)$ — функции Макдональда с индексами нуль и единица.

Последнее звено цепочки подставляем во второе уравнение системы (2.2). В результате подстановки получается система уравнений для определения температуры жидкости в центральной и кольцевой трубах

$$p\Theta_1 + \frac{d\Theta_1}{d\xi} + \gamma = a(\Theta_2 - \Theta_1), \qquad \Theta_1 = \Theta_1(p, \xi), \qquad \Theta_2 = \Theta_2(p, \xi) \tag{2.6}$$

$$up\Theta_2 - \frac{d\Theta_2}{d\xi} - \gamma = a(\Theta_1 - \Theta_2) - \lambda b\sqrt{p/\alpha}\,f(p, \alpha)\,\Theta_2$$

$$\Theta_1 = \Omega_0 \quad (\xi = 0), \qquad \Theta_1 = \Theta_2 \quad (\xi = 1) \tag{2.7}$$

Кроме того, из равенств (2.4) и (2.5) получается следующая формула для определения изображения температуры в грунте:

$$\Theta_3 = \Theta_2\frac{K_0(\sqrt{p/\alpha}\,\eta)}{K_0(\sqrt{p/\alpha})} \tag{2.8}$$

Нетрудно найти решение системы (2.6), и затем, по формуле (2.8), определить изображение температуры в грунте Θ_3. Это решение имеет следующий вид:

$$\Theta_1 = B_1e^{\Lambda_1\xi} + B_2e^{\Lambda_2\xi} + A$$

$$\Theta_2 = [a^{-1}(\Lambda_1 + p) + 1]\,B_1e^{\Lambda_1\xi} + [a^{-1}(\Lambda_2 + p) + 1]\,B_2e^{\Lambda_2\xi} + A(1 + p/a) + \gamma/a \tag{2.9}$$

$$A = -\frac{up\gamma + M\sqrt{p}f(p, \alpha)\gamma}{p(u+1)a + up^2 + M\sqrt{p}f(p, \alpha)(a + p)}, \quad M = \lambda b/\sqrt{\alpha}$$

$$\Lambda_{1,2} = {}^1/_2\,[p(u-1) + M\sqrt{p}\,f(p,\alpha)] \pm \{{}^1/_4\,[p(u-1) + M\sqrt{p}\,f(p, \alpha)]^2 +$$
$$+ p(u+1)a + up^2 + M\sqrt{p}f(p, \alpha)(a + p)\}^{1/2}$$

Если жидкость закачивается в центральную трубу с известной непостоянной температурой, константы интегрирования B_1 и B_2, определяемые из граничных условий, имеют вид

$$B_1 = -\frac{Ap + \gamma - (\Omega_0 + A)(\Lambda_2 + p)e^{\Lambda_2}}{e^{\Lambda_1}(\Lambda_1 + p) - e^{\Lambda_2}(\Lambda_2 + p)}, \qquad B_2 = -B_1 - \Omega_0 - A$$

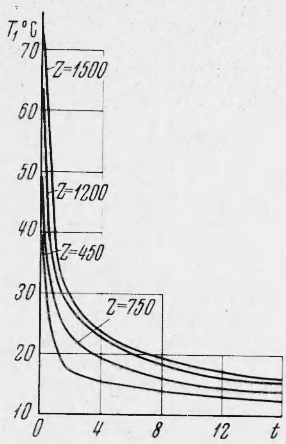
В случае замкнутой циркуляции, если температура жидкости, вытекающей из затрубного пространства, равна температуре закачиваемой жидкости, постоянные B_1 и B_2 имеют вид

$$B_1 = \frac{(\gamma + pA)(e^{\Lambda_2} - 1)}{(\Lambda_1 + p)(e^{\Lambda_1} - e^{\Lambda_2})} \qquad B_2 = \frac{(\gamma + pA)(e^{\Lambda_1} - 1)}{(\Lambda_2 + p)(e^{\Lambda_2} - e^{\Lambda_1})}$$

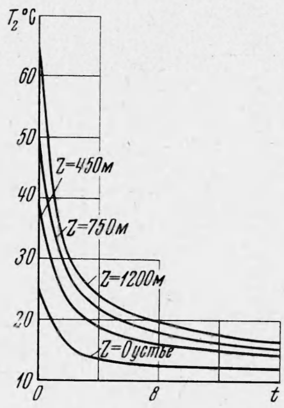
Для обращения найденных выше решений был использован численный метод, изложенный в работе [3]. Идея метода заключается в том, что оригинал ищется в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_{2n}(X), \qquad X = e^{-\sigma\tau} \tag{2.10}$$

Для определения коэффициентов этого ряда необходимо знать значения изображения Θ в равноотстоящих точках $p = (2n + 1)\sigma$.

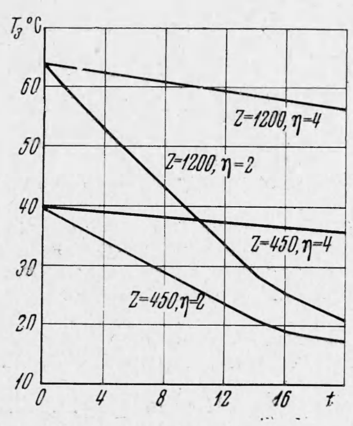


Фиг. 1

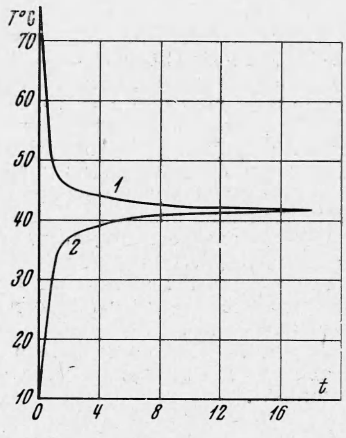


Фиг. 2

Здесь σ — положительное число, а $n = 0, 1, 2...$ Выбор значения σ обусловливается величиной промежутка времени, внутри которого необходимо вычислить значения оригинала θ.



Фиг. 3



Фиг. 4

Коэффициенты c_n определяются из системы алгебраических уравнений [3]. При помощи этого метода по найденным изображениям Θ_1, Θ_2, Θ_3 была сосчитана температура жидкости в некоторых точках скважины и грунта для различных моментов времени как в случае постоянной температуры закачиваемой жидкости, так и в случае замкнутой циркуляции.

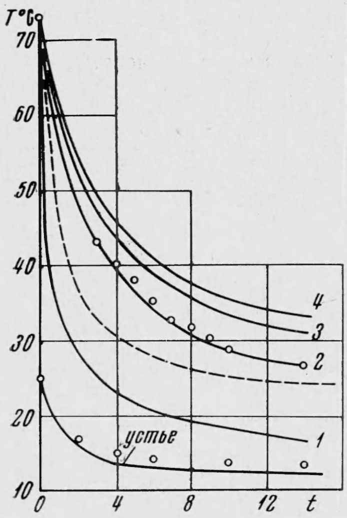
Вычисления проводились при следующих значениях величин, определяющих условия теплообмена

$$c = 1\ \textit{ккал/кг}{}^\circ\mathrm{C},\quad \rho = 10^3\ \textit{кг/м}^3\quad \lambda_1 = 0.53\ \textit{ккал/м}{}^\circ\mathrm{C}\ \ \textit{час},$$

$$\varkappa_3 = 2\cdot 10^{-3}\ \textit{м}^2/\textit{час},\quad \lambda_2 = 1\ \textit{ккал/м}{}^\circ\ \mathrm{C}\ \textit{час},\ Q = 30\ \textit{л/сек}$$

$$L = 1500\ \textit{м},\quad R_1 = 2.5'',\quad R = 4'' \tag{2.11}$$

Коэффициент теплопередачи k между жидкостью, движущейся в центральной трубе и в кольцевом пространстве, принимался постоянным и равным 10^3 *ккал/м*$^{2\circ}$ С *час*. В первом рассмотренном случае считали, что $T_0 = 9^\circ$ С, $\Gamma = 0.032^\circ$ С/*м*, $T_* = 25^\circ$ С, а во втором случае $\Gamma = 0.041\ ^\circ$ С/*м*, $T_* = 11.5^\circ$ С. Значение σ принималось равным 0.02.



Фиг. 5

Выбор значений (2.11) не был случайным. Он соответствовал условиям эксперимента по охлаждению забоя скважины. В ходе этого эксперимента была измерена температура жидкости на устье и забое скважины, в которую через центральную трубу закачивалась жидкость с температурой $T_0 = 9^\circ$ С.

По результатам численного обращения и последующего перехода к размерным величинам для случая закачки жидкости с постоянной температурой T_0, построены зависимости температуры жидкости (T° С) от времени (t в *час*) в различных точках центральной трубы (фиг. 1) и затрубного пространства (фиг. 2). Для каждой кривой указано расстояние точки от устья скважины (в *м*).

На фиг. 3 представлен график зависимости температуры грунта от времени ($T_0 = \mathrm{const}$), из которого видно, что грунт прогревается весьма медленно (за 20 часов на толщину около четырех радиусов).

В случае замкнутой циркуляции изменение температуры жидкости во времени на забое *1* и устье *2* скважины представлено на фиг. 4; графики свидетельствуют о быстром выравнивании температуры циркулирующей жидкости.

На фиг. 5 представлены зависимости температуры жидкости от времени на забое и устье скважины при различных значениях коэффициента теплопередачи k. Кривым с номерами *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют следующие значения k: 10^3, $2\cdot10^3$, $3\cdot10^3$, $4\cdot10^3$ *ккал/м*$^{2\circ}$ С *час*.

На основании построенных графиков можно сделать вывод о том, что величина коэффициента теплопередачи в большей мере влияет на температуру жидкости на забое, чем на устье (температурные кривые на устье почти совпадают). Кроме того, на фиг. 5 пунктирной линией показан график изменения температуры жидкости на забое скважины, подсчитанной по формулам работы [2], при значении коэффициента теплопередачи $k = 2\cdot10^3$ *ккал/м*$^{2\circ}$ С *час*. Кружочки (фиг. 5) соответствуют температуре жидкости на устье и забое скважины, измеренной в упомянутом выше эксперименте. Результаты эксперимента и расчета при $k = 2\cdot10^3$ *ккал/м*$^{2\circ}$ С *час* хорошо совпадают.

Изложенное позволяет заключить, что так как температура жидкости существенно меняется в широком диапазоне времени, то рассматриваемую задачу нельзя решать в предположении о стационарном характере теплообмена [1].

Результаты эксперимента достаточно хорошо совпадают с расчетными даже при постоянном значении коэффициента теплопередачи.

Из графиков следует, что для расчета температуры жидкости можно пользоваться формулами работы [2], в которой для решения задачи использован метод последовательной смены стационарных состояний. При выбранном значении σ количество членов ряда (2.10), обеспечивающих заданную точность, изменялось от четырех до шести в зависимости от значения ξ.

Вычисление коэффициентов этого ряда по соответствующим формулам работы [3] не представляет особых трудностей и может быть выполнено на счетных машинах типа «Рейнметалл».

Поступила 11 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Есьман Б. И., Дедусенко Г. Я., Яишникова Е. А. Влияние температуры на процесс бурения глубоких скважин. М., Гостоптехиздат, 1962.
2. Чарный И. А. О термическом режиме буровых скважин. Газовая промышленность, 1966, № 10.
3. Papoulis A. A new method of inversion of the Laplace transform. Quart. appl. mathem., 1957, vol. 14, No. 4, p. 405—414.