

РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

В. А. Алгазин
(Новосибирск)

Вопросы построения методов расчета и расчет обтекания тонких крыльев конечного размаха, движущихся под большими углами атаки в идеальной несжимаемой жидкости, рассматривались в работах [1—5]. Общим для всех методов является последовательная линеаризация задачи по времени и моделирование крыла и пелены за ним вихревыми поверхностями. В работах [1—3] эти поверхности заменяются дискретной системой вихревых отрезков постоянной интенсивности. В [4] поверхность, моделирующая крыло, заменяется системой замкнутых вихревых колец, которая аналогична используемой в [1], а учет вихревой пелены основан на объемной дискретизации вектора вихря, изменяющегося с течением времени в соответствии с уравнением Гельмгольца. В основе алгоритма [5] лежит сплайновая аппроксимация интенсивности вихревой поверхности функцией, вид которой учитывает особенности течения вблизи кромок крыла.

В данной работе получена общая система нелинейных уравнений задачи обтекания крыла конечного размаха, движущегося в идеальной несжимаемой жидкости из состояния покоя. Эта система решается путем последовательной линеаризации [1—5] для ряда дискретных моментов времени. Координаты точек вихревой пелены определяются в отличие от [1—5] по разностной формуле второго порядка. Решение линейной задачи (на каждом шаге по времени) строится при помощи метода работы [5], который модифицирован так, что аппроксимация интенсивности вихревого слоя сплайн-функциями специального вида используется только при установлении связи между различными компонентами дискретных особенностей.

Численные расчеты проведены в рамках модели, учитывающей вихревую пелену, сходящую только с задней кромки крыла. Сходимость метода в рамках этой модели устанавливалась численно. Рассмотрен вопрос о влиянии порядка аппроксимации интенсивности вихревого слоя и величины шага по времени на устойчивость счета; исследованы структура вихревой пелены за крылом и ее влияние на аэродинамические характеристики прямоугольных крыльев различных удлинений, а также зависимость силы тяги и КПД машущего крыла от числа Струхала.

1. Рассмотрим движение тонкого крыла конечного размаха в идеальной несжимаемой жидкости. Введем правую прямоугольную систему безразмерных (отнесенных к длине корневой хорды крыла b) координат $O_1x_1y_1z_1$, в бесконечно удаленной точке которой жидкость покоится. Пусть в момент времени $\tau = 0$ крыло начинает движение из состояния покоя с некоторой заданной скоростью $V(x_1, y_1, z_1, t)$, где $t = V_0\tau/b$, а V_0 — некоторая характерная скорость (например, $V_0 = |\mathbf{V}(\tau_*)|$, $\tau_* > 0$). Обозначим поверхность крыла и вихревой пелены за ним через $S_0(t)$ и $S_1(t)$ соответственно, переднюю кромку крыла, обтекаемую без отрыва потока, через L_s , а часть кромки, с которой сходит вихревая пелена, через L_w . Предположим, что движение жидкости вне поверхности $S = S_0 \cup S_1$ потенциально.

Поверхность $S(t)$ будем моделировать вихревой поверхностью с интенсивностью

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{v} \times (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-),$$

а скачок давления p в точке $M \in S(t)$ будем определять при помощи интеграла Коши—Лагранжа

$$(1.1) \quad \frac{p_- - p_+}{\rho V_0^2} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{L(M)} (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{v}) d\boldsymbol{\tau} + (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{v})(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_e),$$

где индексами плюс и минус обозначены предельные значения функций при подходе к поверхности S сверху и снизу соответственно; \mathbf{v} — орт нормали к верхней стороне этой поверхности; ρ — плотность жидкости; $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-)/2$; \mathbf{v}_e — переносная скорость рассматриваемой точки M .

Предположим, что в каждый момент времени t поверхность $S(t)$ гладкая в смысле Ляпунова, а вектор-функция $\boldsymbol{\gamma}(M, t)$ на ней принадлежит классу H^* [6] в окрестности кромки L_s . Это позволяет определить скорость в любой точке жидкости и точке $M \in S(t)$ с помощью известной формулы Био—Савара. Полученное поле скоростей потенциально вне $S(t)$, и возмущенные скорости затухают на бесконечности всюду вне $S_1(t)$. Удовлетворяя остальным условиям задачи обтекания тонкого крыла конечного размаха (см., например, [1, 5]) для интенсивностей γ_0, γ_1 вихревых слоев на поверхностях $S_0(t), S_1(t)$ и координат точек вихревой пелены, получим систему уравнений для $M \in S_0(t)$

$$(1.2) \quad \int_{S_0} \int \frac{(\boldsymbol{\gamma}_0 \times \mathbf{R}) \mathbf{v}}{R^3} dS = 4\pi \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} - \int_{S_1} \int \frac{(\boldsymbol{\gamma}_1 \times \mathbf{R}) \mathbf{v}}{R^3} dS;$$

$$(1.3) \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\gamma}_0 = 0;$$

для $M \in S_1(t)$

$$(1.4) \quad \partial \mathbf{r} / \partial t = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma}, t_\gamma) = \mathbf{r}_0(\boldsymbol{\gamma});$$

$$(1.5) \quad \begin{cases} (\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \mathbf{i}_1) \sqrt{g} = \Phi_1 \sqrt{g_{vv}} \cos \psi + \Phi_2 \sqrt{g_{uu}}, \\ (\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \mathbf{i}_2) \sqrt{g} = \Phi_1 \sqrt{g_{vv}} + \Phi_2 \sqrt{g_{uu}} \cos \psi; \end{cases}$$

$$(1.6) \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\gamma}_1 = 0;$$

$$(1.7) \quad \frac{d}{dt} \int_{L(M)} (\boldsymbol{\gamma}_0 \times \mathbf{v}) d\mathbf{r} = (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \boldsymbol{\gamma}_1, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{V}, \quad M \in L_w,$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma}, t)$ — радиус-вектор точек свободной вихревой поверхности $S_1(t)$, рассматриваемый как функция завихренности $\boldsymbol{\gamma}$ и времени t ; t_γ — момент схода с кромки L_w вихря $\boldsymbol{\gamma}$; $\mathbf{r}_0(\boldsymbol{\gamma})$ — радиус-вектор этого вихря при $t = t_\gamma$; $L(M)$ — произвольная кривая, соединяющая точку $M \in L_w$ с точкой на границе $S_0(t)$ — кромке L_s ; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ — орты координатного базиса поверхности $S_1(t)$; ψ — угол между координатными линиями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$; g_{uu}, g_{uv}, g_{vv} — гауссовы коэффициенты поверхности $S_1(t)$, $g = g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2$; величины $\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v)$ определяются в момент образования вихря $\boldsymbol{\gamma}_1(u, v, t)$ и в дальнейшем сохраняют постоянное значение для фиксированных u, v на $S_1(t)$, хотя сама поверхность деформируется в соответствии с изменением поля скоростей.

Так как область течения жидкости и вектор скорости \mathbf{V} движения точек крыла зависят от времени, систему (1.2)—(1.7) необходимо решать с начальными данными, которые в случае движения из состояния покоя имеют вид

$$(1.8) \quad S(0) = S_0(0), \quad \boldsymbol{\gamma}(M, 0) = 0.$$

Решение системы (1.2), (1.3) для $\boldsymbol{\gamma}_0$ будем искать в классе функций, удовлетворяющих на кромке L_s условию равенства нулю нормальной к этой кромке составляющей интенсивности вихревого слоя

$$(1.9) \quad \boldsymbol{\gamma}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad M \in L_s.$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной к поверхности $S_0(t)$ на кромке L_s , обтекаемой без отрыва потока.

2. Будем решать систему (1.2)—(1.7) для ряда дискретных моментов времени t_n , начиная с $t_0 = 0$, при котором выполняются условия (1.8).

Предположим, что в момент времени $t = t_n$ решение системы известно, и получим ее решение при $t = t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}$. Введем систему координат $Oxyz$, связанную с крылом, полагая плоскость $y = 0$ совпадающей с плоскостью правого полукрыла $S_0^-(t_{n+1})$. Ось Ox направим от передней кромки назад вдоль корневой хорды, а ось Oz налево по размаху. Предположим, что закон движения крыла симметричен относительно плоскости Oxy . В этом случае для расчета нагрузок на крыло достаточно определить γ_0 лишь на одной половине крыла, например, S_0^- .

Поверхность полукрыла S_0^- разделим на n_x равных полос по хорде и n_z полос по размаху. На пересечениях этих полос получится $N = n_x n_z$ элементов S_{0q} . Применение шаговой процедуры по времени для решения системы (1.2)—(1.7) приводит к тому, что при $t = t_{n+1}$ поверхность правой половины вихревой пелены S_1^- будет разделена на $N_1 = (n+1)N_s$ элементов S_{1q} , где $N_s = n_x + n_z$. Элементы S_{1q} ($q = nN_s + 1, \dots, N_1$), образующиеся за время Δt_{n+1} в результате схода вихрей с крыла, с точностью до величин порядка $(\Delta t_{n+1})^2$ расположены в плоскости крыла. Совокупность этих элементов обозначим через $\Delta S_1^-(t_{n+1})$.

Каждому элементу S_{1q} ($l = 0, 1$) вихревой поверхности поставим в соответствие вектор $\Gamma_{1q}^{(n+1)}$ суммарной интенсивности вихревого слоя γ_l , полагая [5]

$$(2.1) \quad \Gamma_{1q}^{(n+1)} = \int_{S_{1q}} \gamma_l(t_{n+1}) dS.$$

На поверхности $S_0^- \cup \Delta S_1^-$ векторы Γ_{1q} имеют две компоненты Γ_{1xq} , Γ_{1zq} , а на $S_1^- \setminus \Delta S_1^-$, вообще говоря, — три компоненты, не равные нулю одновременно. Составляющие Γ_{0rq} ($r = x, z$) векторов Γ_{0q} поместим в центры тяжести (x_{rq}, z_{rq}) элементов S_{0q} , плотность которых равна γ_{0r} [7], а Γ_{1q} свяжем с точками $(x_q, y_q, z_q) \in S_{1q}$, радиусы-векторы которых в системе $Oxyz$ обозначим через $\mathbf{r}_q^{(n+1)}$.

Учитывая (1.4)—(1.6), можно показать, что положение $\mathbf{r}_q^{(n+1)}$ и величина векторов $\Gamma_{1q}^{(n+1)}$ ($q = 1, \dots, nN_s$), образовавшихся до момента времени t_{n+1} , полностью определяются решением задачи при $t < t_{n+1}$. Остальные $N + N_s$ векторов $\Gamma_{0q}^{(n+1)}$ ($q = 1, \dots, N$) и $\Gamma_{1q}^{(n+1)}$ ($q = nN_s + 1, \dots, N_1$), схематизирующих поверхность $S_0^-(t_{n+1}) \cup \Delta S_1^-(t_{n+1})$, зависят от решения в рассматриваемый момент времени. Для их определения от системы уравнений (1.2), (1.3), (1.6), (1.7) перейдем к системе алгебраических уравнений относительно $2N + 2N_s$ величин Γ_{0xq} , Γ_{0zq} , Γ_{1qx} , Γ_{1qz} *.

Из интегрального уравнения (1.2), удовлетворяя его в N контрольных точках и используя схематизацию вихревой поверхности $S(t_{n+1})$ дискретной системой векторов (2.1), получим N линейных алгебраических уравнений

$$(2.2) \quad \sum_{q=1}^N (\Lambda_{0xiq} \Gamma_{0xq} + \Lambda_{0z iq} \Gamma_{0zq}) + \sum_{s=1}^{N_s} (\Lambda_{1xis} \Gamma_{1xs} + \Lambda_{1zis} \Gamma_{1zs}) = \\ = 4\pi V_y (X_i, Z_i, t_{n+1}) - \sum_{m=1}^{nN_s} (L_{1im} C_{1m} + L_{2im} C_{2m}),$$

* В дальнейшем, когда ясно, что рассматриваемые величины относятся к моменту времени t_{n+1} , индекс сверху будем опускать.

где $\Lambda_{lriq} = F_{lriq} \pm \Delta F_{lriq}$; $J_{pim} = K_{pim} + \Delta K_{pim}$ ($l = 0, 1, p = 1, 2$);

$$C_{1m} = \Phi_{2m}(v_{2m} - v_{1m})lv_m^{(n+1)}, \quad C_{2m} = \Phi_{1m}(u_{2m} - u_{1m})lv_m^{(n+1)};$$

$s = q - nN_s$, а знак плюс (минус) соответствует $r = z$ ($r = x$). Здесь

$$(2.3) \quad \begin{cases} F_{0xiq} = \frac{\xi_{xiq}}{(\xi_{xiq}^2 + \zeta_{xiq}^2)^{3/2}}, & \tilde{F}_{0ziq} = \frac{\xi_{ziq}}{(\xi_{ziq}^2 + \zeta_{ziq}^2)^{3/2}}, \\ K_{pim} = \frac{\xi_{imipmz} - \delta \xi_{imipmx}}{(\xi_{im}^2 + y_m^2 + \zeta_{im}^2)^{3/2}}, & \delta = i; \end{cases}$$

$$(2.4) \quad \xi_{ria} = X_i - x_{rq}, \quad \zeta_{ria} = Z_i - \delta z_{rq}, \quad \delta = 1,$$

ξ_{im} , ζ_{im} совпадают с (2.4) при $x_{rq} = x_m$, $z_{rq} = z_m$, где (x_m, y_m, z_m) — координата точки $r_m^{(n+1)}$, в которой расположена особенность $\Gamma_{1m}^{(n+1)}$; i_{lrg} — проекции ортов i_{lq} координатного базиса элемента $S_{1q}^{(n+1)}$ в точке $r_q^{(n+1)}$ на ось Or ($r = x, z$); u_{lq} , v_{lq} ($l = 1, 2$) — границы элемента $S_{1q}(u, v, t)$; $lv_q^{(n+1)}$ ($lv_q^{(n+1)}$) — длина координатной линии $v = v_q = (v_{1q} + v_{2q})/2$ ($u = u_q = (u_{1q} + u_{2q})/2$) при $t = t_{n+1}$; $\Phi_{lq} = \Phi_l(u_q, v_q)$; величины ΔF_{0rq} , ΔL_q учитывают влияние левой половины вихревой поверхности и получаются из (2.3), (2.4) при $\delta = -1$; формулы для F_{1rq} , ΔF_{1rq} совпадают с соответствующими выражениями для F_{0rq} , ΔF_{0rq} при $x_{rq} = x_q$, $z_{rq} = z_q$. Контрольными точки X_i , Z_i в (2.2) выбраны из условия минимума квадратичного отклонения скорости, индуцируемой непрерывным вихревым слоем, от скорости, индуцируемой системой особенностей (2.1) [7]. Отметим также, что выбором положения дискретных особенностей (2.1) на крыле S_0 и части ΔS_1 пелены S_1 обеспечивается выполнение гипотезы Жуковского о конечности скорости в точках кромки L_w и условия $\gamma = 0$ в точках излома контура крыла в плане [5, 7].

От уравнения (1.7), учитывая (1.5), перейдем к системе N_s уравнений для интенсивностей сходящих вихрей

$$(2.5) \quad \sum_{k=1}^{n_x} (\Gamma_{0zq}^{(n+1)} - \Gamma_{0zq}^{(n)}) = -\Gamma_{1zi}^{(n+1)} + \frac{w_{zi}^{(n)}}{w_{xi}^{(n)}} \Gamma_{1xi}^{(n+1)}, \quad i = N_2 + j, \quad j = 1, \dots, n_z;$$

$$(2.6) \quad \sum_{j=1}^{n_z} (\Gamma_{0xq}^{(n+1)} - \Gamma_{0xq}^{(n)}) = -\frac{w_{xi}^{(n)}}{w_{zi}^{(n)}} \Gamma_{1zi}^{(n+1)} + \Gamma_{1xi}^{(n+1)}, \quad i = N_1 - k + 1, \quad k = 1, \dots, n_x;$$

где $q = (k - 1)n_z + j$.

Система $N + N_s$ уравнений (2.2), (2.5), (2.6) не замкнута, так как число уравнений меньше числа неизвестных. Для получения еще $N + N_s$ уравнений используем условия (1.3), (1.6) и аппроксимацию интенсивности вихревого слоя γ_0 на S_0 и γ_1 на ΔS_1 сплайн-функциями специального вида, учитывающими особенности течения на кромке крыла L_s , которая подробно описана в [5]. Пусть составляющую γ_{0z} (γ_{1z}) интенсивности вихревого слоя на элементе S_{0q} ($S_{1q} \in \Delta S_1$) аппроксимирует (в обозначениях работы [5]) функция $\gamma_{lz}^{(q)}$ ($l = 0, 1$). Составляющую $\gamma_{lx}^{(q)}$ определим из решения уравнений (1.3), (1.6) с краевым условием (1.9), которое в данном случае принимает вид $\gamma_{0x}(0, z, t) = 0$. Согласно определению (2.1), имеем

$$(2.7) \quad \Gamma_{lrg} = \iint_{S_{lq}} \gamma_{lr}^{(q)} dx dz + \Delta_{lrg}, \quad l = 0, 1, \quad r = x, z,$$

где $\Delta_{lrq} = \int \int_{S_{lq}} (\gamma_{lr} - \gamma_{lr}^{(q)}) dx dz$ — погрешность аппроксимации на S_{lq} . Интегралы в (2.7) зависят от значений функций γ_{0z}, γ_{1z} в узловых точках крыла и элемента следа, прилегающего к кромке L_w [5]. Исключая их и пренебрегая величинами Δ_{lrq}^* , из (2.7) получим $N + N_s$ дополнительных уравнений

$$(2.8) \quad \Gamma_{0x} = D_0 \Gamma_{0z} + D_1 \Gamma_{1z} + d_0, \quad \Gamma_{1x} = G_0 \Gamma_{0z} + G_1 \Gamma_{1z} + d_1.$$

Здесь Γ_{0r}, Γ_{1r} — алгебраические векторы длины N и N_1 , образованные из величин $\Gamma_{0rq}, \Gamma_{1rq}$ соответственно; матрицы D_0 и G_0 квадратные, порядков N и N_s , D_1 и G_1 прямоугольные, размеров $N \times N_s$ и $N_s \times N$; векторы d_0, d_1 имеют длину N и N_s , зависят от решения в момент времени t_n , причем в силу (1.9) $d_0(t_0) = d_1(t_0) = 0$. Соотношения (2.8) являются дискретным аналогом условий (1.3), (1.6).

Система линейных алгебраических уравнений (2.2), (2.5), (2.8) теперь замкнута. Ее решение определяет величины $\Gamma_{lrq}^{(n+1)}$, начиная с $n = 0$. Найденные значения позволяют определить непрерывный вихревой слой на S_0^- [5], который необходим при расчете распределенных нагрузок на крыле.

3. Нормальную силу P_q (отнесенную к $\rho V_0^2 b^2/2$), действующую на элемент S_{0q} , в соответствии с (1.1) ($\mathbf{v}_e = \mathbf{V}$) представим в виде

$$(3.1) \quad P_q = \int \int_{S_{0q}} dP = P_{qx} + P_{qz} + P_{qt} + P_{qit},$$

где $P_{qr}(r = x, z)$ определяют часть силы, зависящую от γ_{0r} , а величины P_{qt}, P_{qit} связаны с изменением циркуляции по j -й полосе полукрыла

$$P_{qt} = -2h \frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{k-1} \Gamma_{0:z}^{(n+1)}, \quad h = \frac{1}{n_x}, \quad i = (m-1)n_z + j,$$

$$P_{qit} = -2 \frac{d}{dt} \int \int_{S_{0q}} \left(\int_{(k-1)h}^x \gamma_{0z} d\xi \right) dx dz.$$

Отбрасывая величины порядка $h\Gamma_{0rq}, \sigma_j\Gamma_{0rq}$ и выше, получим

$$P_{qx} = W_q \Gamma_{0xq}^{(n+1)}, \quad P_{qz} = -W_{qx} \Gamma_{0zq}^{(n+1)}, \\ P_{qit} = -2h(1 - \mu_{xzk}) \frac{d}{dt} \Gamma_{0zq}^{(n+1)},$$

где $\sigma_j = z_{j-1} - z_j$ — ширина j -й полосы по размаху, коэффициент μ_{xrk} определяет положение $(x_{rq} = (k-1 + \mu_{xrk})h)$ дискретной особенности Γ_{0rq} на элементе S_{0q} в долях его линейных размеров, а

$$W_{qr} = 2w_r(x_{0q}, z_{0q}, t_{n+1}), \quad x_{0q} = (k-0,5)h, \quad z_{0q} = 0,5(z_{j-1} + z_j).$$

Момент гидродинамических сил, действующих на элемент S_{0q} , относительно передней кромки крыла представим по аналогии с (3.1) в виде

$$M_{zq} = M_{zqx} + M_{zqz} + M_{zqt} + M_{zqit}.$$

* Можно показать, что в случае равномерного разбиения прямоугольного крыла удлинения λ на n_z полос по полуразмаху $|\Delta_{lrq}| \leq C_r \lambda / (2n_z \sqrt{n_x})$.

Каждую составляющую $M_{zqr}(r = x, z, t, it)$ будем рассматривать как момент соответствующей силы P_{qr} , которая приложена к элементу S_{0q} в точке

$$x = (k - 1 + \kappa_{rq})h, \quad z = z_{0j}, \quad 0 < \kappa_{rq} \leq 1.$$

Пренебрегая величинами порядка $h^2\Gamma_{0rq}$, $h\sigma_j\Gamma_{0rq}$ ($r=x, z$) и выше, получим

$$\kappa_{xq} = \mu_{xxh}, \quad \kappa_{zq} = \mu_{xzh}, \quad \kappa_{tq} = 0,5, \quad \kappa_{itq} = (5 - 4\mu_{xzh})/(8(1 - \mu_{xzh})).$$

Элементарную подсосывающую силу (отнесенную к $\rho V_0^2 b^2/2$) получим из теоремы об изменении количества движения, применяя ее к объему жидкости внутри сферы радиуса $\varepsilon \ll 1$ с центром в точке $(0, z)$ кромки L_s крыла. Можно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(3.2) \quad dQ = -\pi a^2(z) dz/2,$$

где $a(z)$ — коэффициент при особенности $x^{-1/2}$ составляющей γ_{0z} интенсивности вихревого слоя. Аппроксимация вихревого слоя, предложенная в [5], позволяет вычислять $a(z)$ через величины $\Gamma_{0zq}^{(n+1)}$. Интегрируя (3.2) вдоль всей кромки L_s , получим подсосывающую силу Q , действующую на все крыло.

Безразмерные коэффициенты нормальной силы P , подсосывающей силы Q и момента M_z определим следующим образом:

$$(3.3) \quad c_n = \frac{b^2 P}{S} = \frac{2}{\lambda} \sum_{q=1}^N P_q, \quad c_q = \frac{b^2 Q}{S}, \quad m_z = \frac{b^2 M_z}{S} = -\frac{2}{\lambda} \sum_{q=1}^N M_{zq},$$

где S — площадь крыла.

4. При практической реализации метода, изложенного в пп. 2, 3, алгоритм расчета аэродинамических характеристик условно разобьем на ряд этапов: 1) выбор шага по времени Δt_{n+1} ; 2) определение координат $\mathbf{r}_q^{(n+1)}$ поверхности S_1^- из решения задачи Коши (1.4) для q -й особенности

$$\mathbf{r}_q^{(n+1)} = \mathbf{r}_q^{(n)} + \mathbf{w}_{1q}^{(n)} \Delta t_{n+1},$$

где

$$\mathbf{w}_{1q}^{(n)} = \begin{cases} \mathbf{w}_q^{(n)} \left(1 + \frac{\Delta t_{n+1}}{2\Delta t_n} \right) - \mathbf{w}_q^{(n-1)} \frac{\Delta t_{n+1}}{2\Delta t_n}, & q \leq nN_s, \\ \mathbf{w}_q^{(n)}, & q = nN_s + 1, \dots, (n+1)N_s; \end{cases}$$

3) определение скорости, индуцированной на крыле системой дискретных особенностей, которые образовались до момента времени $t_n + \Delta t_{n+1}$ по формулам (2.3), (2.4); 4) вычисление матриц связи из (2.8); 5) определение величин $\Gamma_{l,rq}(l = 0, 1; r = x, z)$ из решения системы (2.2), (2.5), (2.6), (2.8); 6) расчет поля скоростей $\mathbf{w}_q^{(n+1)}$ в заданных точках поверхности $S_0^- \cup S_1^-$ и определение коэффициентов c_n, m_z, c_q .

Остановимся на некоторых этапах расчета. В работе [8] при решении задачи безотрывного обтекания крыла бесконечного размаха шаг по времени $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ выбирался из условия

$$(4.1) \quad \Delta t_{n+1} = 1/(n_x w_x(t_n)),$$

где w_x — относительная скорость в точке задней кромки. Условие (4.1) обеспечивает равномерность распределения вихрей в окрестности задней кромки профиля, с которой сходит вихревая пелена.

В приводимых ниже расчетах Δt_{n+1} выбран из условия (4.1), где в качестве w_x в каждый момент времени t_{n+1} взято осредненное по длине зад-

ней кромки значение скорости $\langle w_x \rangle$. Следующие три этапа (2—4) не представляют принципиальных трудностей. Определение величин Γ_{lrg} (этап 5) на $S_0^- \cup \Delta S_1^-$ в рамках модели, учитывающей вихревую пелену, сходящую со всех кромок крыла, кроме передней L_s , связано с преодолением ряда трудностей методологического характера. В частности, при рассмотрении нелинейных нестационарных задач в рамках этой модели величины элементов, образующихся за время Δt_{n+1} вблизи боковой и задней кромок крыла, в ряде случаев различны. Это ведет к неравномерности в расположении дискретных особенностей вблизи этих кромок и, как следствие, к недостаточной точности в определении их интенсивности. В данной работе этап 5 и последующие примеры численного расчета рассмотрены без учета боковой вихревой пелены. Решение системы (2.2), (2.5), (2.6), (2.8) определялось на ЭВМ БЭСМ-6 при помощи обобщенного метода исключения Гаусса. По известным значениям Γ_{lrg} определялось поле скоростей и производился расчет аэродинамических характеристик. После этого осуществлялся переход к следующему шагу по времени.

Сходимость предложенного выше алгоритма проверялась численно путем сравнения результатов расчета с различным числом N вихрей на полукрыле. Результаты расчета с шагом по времени Δt_n и шагом по времени, равным его половине (в силу (4.1) это соответствует тому, что если число элементов по хорде в одном случае равно n_x , то в другом оно будет $2n_x$), практически совпадали. Это позволяет сделать вывод о сходимости метода в данном случае.

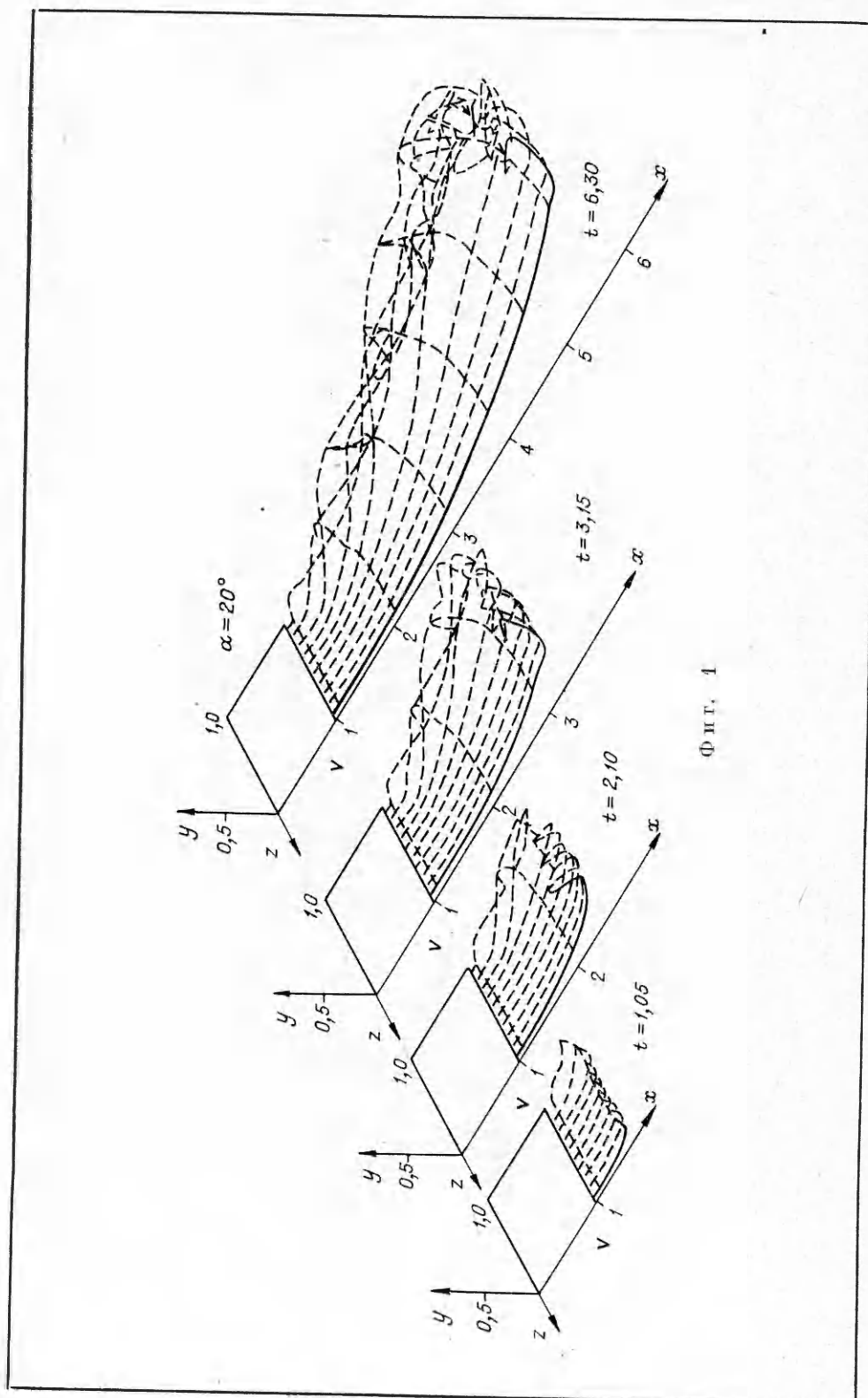
Исследовалось влияние порядка аппроксимации вихревого слоя на элементах ΔS_{lq} вихревой пелены на устойчивость счета аэродинамических характеристик. В [5] было предложено аппроксимировать γ_{0z} на крыле вблизи кромки L_w полиномом второй степени по x , а γ_{1z} на ΔS_1 — линейной функцией. Результаты расчетов ряда крыльев при такой аппроксимации показали, что счет становится неустойчивым. Неустойчивость расчета связана, видимо, с тем, что изменение матриц D_l , G_l ($l = 0, 1$) в (2.8) меняет обусловленность матрицы всей системы (2.2), (2.5), (2.6), (2.8). Поэтому в дальнейшем на ΔS_1 была принята аппроксимация того же порядка, что и на крыле.

При счете с шагом по времени $\Delta t_{n+1} = \Delta t = \text{const}$ исследовалось влияние величины $\epsilon_t = \Delta t_{n+1} / (n_x \langle w_x(t_n) \rangle)$ на точность и устойчивость расчета нагрузок на крыле. Оказалось, что при $\epsilon_t > 1$ ($\max(\epsilon_t) = 2$) счет устойчив. Коэффициенты (3.3) сил и момента, полученные в результате такого расчета, при t , больших некоторого t_* , практически совпадают с соответствующими величинами при $\epsilon_t = 1$. Что касается расчета при $\epsilon_t < 1$, то счет становится неустойчивым после 5—10 шагов по времени, если $\epsilon_t < 0,8$.

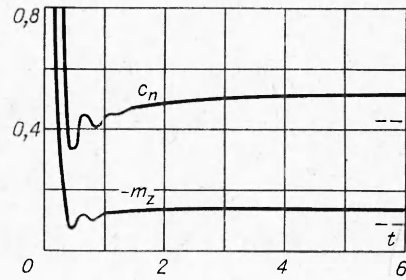
5. Приведем теперь некоторые результаты расчетов. На фиг. 1 изображена правая половина вихревой пелены за крылом удлинения $\lambda = 2$, которое начинает двигаться из состояния покоя со скоростью $V = \text{const} = 1$ под углом атаки $\alpha = 20^\circ$. Видно, что за крылом образуется начальный вихрь, который с течением времени сплывет потоком, а также сформируются вихревые жгуты вблизи боковой части пелены.

На фиг. 2 приведены зависимости коэффициентов нормальной силы c_n и момента m_z этой силы относительно оси Oz от времени t для крыла $\lambda = 2$, $V = 1$, $\alpha = 10^\circ$. Штриховыми линиями нанесены величины этих коэффициентов, полученные по линейной теории [7].

На фиг. 3, 4 проведено сравнение экспериментальных значений c_n , m_z с соответствующими теоретическими значениями, полученными на основе предложенного в пп. 2—4 метода. Рассчитанные величины коэффициентов от мечены сплошными линиями, штриховыми линиями отмечены



значения коэффициентов, полученные на основе линейной теории [7]. Здесь же представлены экспериментальные данные [10, 11] (точки и треугольники соответственно). Видно, что теоретическая кривая $c_n(\alpha)$ для $\lambda = 2$ (фиг. 3) близка к экспериментальным данным до углов атаки $\alpha \sim 16-18^\circ$, а $m_z(\alpha)$ — до углов $\alpha \sim 11-12^\circ$. Результаты расчета $c_n(\lambda)$, $m_z(\lambda)$ при $\alpha = 10^\circ$ без учета боковой вихревой пелены хорошо согласуются с экспериментальными данными



Фиг. 2

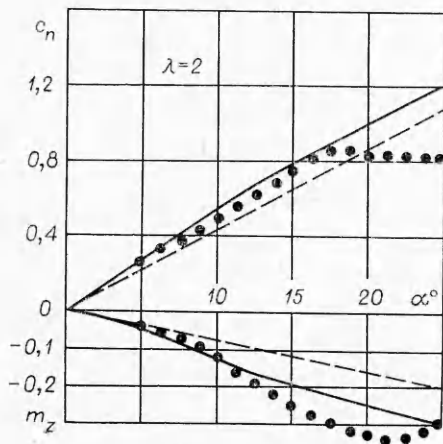
[10—11] и данными работ [2, 9], в которых рассмотрена более общая модель со сходом боковой пелены в достаточно широком ($1 \leq \lambda \leq 4$) диапазоне удлинений. Аналогичные расчеты $c_n(\lambda)$, $m_z(\lambda)$ при $\alpha = 15^\circ$ показали большее отличие получаемых коэффициентов от данных [2, 9—11] для крыльев с удлинениями $\lambda < 1,5$. Связано это, видимо, с тем, что с уменьшением удлинения и увеличением угла атаки роль боковой вихревой пелены в создании подъемной силы и моментов крыла становится преобладающей, над крылом образуются устойчивые вихревые жгуты [3], которые и улучшают несущие свойства крыла.

Относительно результатов по стационарному движению крыла ($V = \text{const}$) отметим следующее: во-первых, нестационарные значения аэродинамических характеристик с ростом t монотонно стремятся к некоторым значениям, которые выбирались затем в качестве стационарных; во-вторых, такой расчет этих характеристик на основе предложенного выше алгоритма достаточно экономичен. Например, для крыла с удлинением $\lambda = 2$ при $N = 25$ и 30—40 шагах по времени расчет требует 6—8 мин на ЭВМ БЭСМ-6.

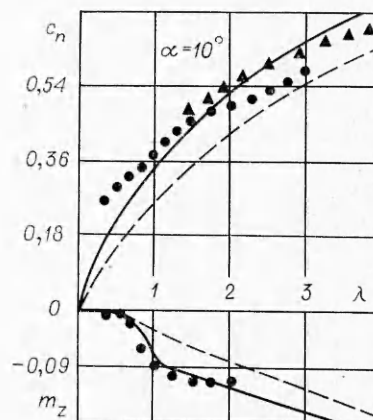
В качестве другого примера приведем некоторые результаты расчетов с колеблющимися крыльями. При решении задач обтекания таких крыльев наряду с коэффициентами c_n , m_z определим мощность, затрачиваемую для поддержания колебаний

$$N_0(t) = -\rho V_0^2 b^2 \lambda \int_{S_0} \Delta p \dot{f} dx dz,$$

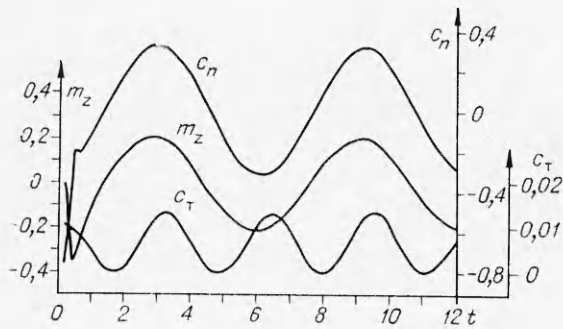
где \dot{f} — безразмерная скорость крыла в направлении нормали, и коэф-



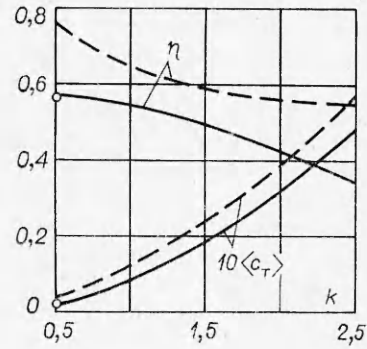
Фиг. 3



Фиг. 4



Ф и г. 5



Ф и г. 6

коэффициент тяги $c_T = -c_q$. По осредненным за период колебаний $T = 2\pi/k$ ($k = \omega b/V_0$) значениям $\langle N_0 \rangle$, $\langle c_T \rangle$ определим КПД

$$\eta = \rho V_0^2 b^2 \lambda \langle c_T \rangle / (2 \langle N_0 \rangle).$$

На фиг. 5, 6 представлены результаты расчета прямоугольного крыла с удлинением $\lambda = 2$ ($\alpha = 0$, $n_x = n_z = 5$), колеблющегося в направлении, перпендикулярном своей плоскости по закону $f(t) = 0,1 \sin kt$. На фиг. 5 приведены зависимости коэффициентов c_n , m_z , c_T от времени при числе Струхала $k = 1$. Характер поведения кривых при $t < 1$ объясняется влиянием переходных процессов в начале движения из состояния покоя. На фиг. 6 приведены зависимости КПД η и коэффициента тяги $\langle c_T \rangle$ от числа Струхала k . Здесь же штриховыми линиями отмечены значения этих величин, рассчитанные по линейной теории для крыла бесконечного размаха [12]. Точками нанесены величины η , $\langle c_T \rangle$, полученные на основе коэффициентов аэродинамических производных подсосывающей силы, приведенных в работе [13].

Поступила 30 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Нестационарная нелинейная теория тонкого крыла произвольной формы в плане. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 4.
2. Ништ М. И., Соколова О. И. Расчет нестационарных нелинейных аэродинамических характеристик крыльев. — Труды ЦАГИ, 1974, вып. 1621.
3. Апарин В. А. Расчет нелинейных аэродинамических характеристик крыла сложной формы в плане с учетом носовой вихревой пелены. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 2.
4. Rehbach C. Calcul numérique d'écoulements tridimensionnels instationnaires avec nappes tourbillonnaires. — Rech. aérosp., 1977, N 5.
5. Алгазин В. А., Горелов Д. Н. О произвольном движении крыла конечного размаха в несжимаемой жидкости. — Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1974, № 3, вып. 1.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
7. Алгазин В. А. К расчету аэродинамических характеристик крыла конечного размаха. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 24. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1976.
8. Горелов Д. И., Куллев Р. Л. Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 6.
9. Гординский В. Я., Соколова О. И. Некоторые результаты расчетов обтекания прямоугольных крыльев по нелинейной теории. — Труды ЦАГИ, 1974, вып. 1561.
10. Winter H. Strömungsvorgänge an Platten und profilierter Körpern bei kleinen Spannweiten. — Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1935, Bd 6, N 1, 2.

11. Петров Е. Г., Табачников В. Г. Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик прямоугольных пластин различного удлинения в широком диапазоне углов атаки. — Труды ЦАГИ, 1974, вып. 1621.
12. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. М., Изд. АН СССР, 1947.
13. Кудрявцева Н. А., Тимофеев И. Я. О подсосывающей силе крыльев произвольной формы в плане при неустановившемся движении. — Труды ЦАГИ, 1975, вып. 1705.

УДК 532.517.43

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ПРЕГРАДОЙ СЛЕДА ЗА ПЛОХООБТЕКАЕМЫМ ТЕЛОМ

И. А. Белов

(Ленинград)

В продолжение исследований, начатых в [1], рассмотрим задачу о расчете плоского вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости вблизи плоской преграды, установленной по нормали к потоку. Появление ненулевой завихренности во внешнем потоке вызвано формированием следа за плохообтекаемым телом, расположенным перед преградой. Решение поставленной задачи проиллюстрируем на примере течения, возникающего при симметричном обтекании равномерным потоком со скоростью U двух параллельных пластин, одна из которых имитирует тело, а другая — преграду.

В качестве расчетной модели обтекания пластин использована нестационарная вихревая модель, практическая реализация которой с помощью метода дискретных вихрей осуществлена в [2] для случая двух пластин одного размера (течение Рябушинского). В отличие от указанной работы здесь исследуется обтекание разновеликих пластин. Полуширина второй по потоку пластины обозначена R , а первой — H , причем $H < R$. Соотношения между размерами пластин H/R и L/R , где L — расстояние между пластинами, приняты за варьируемые параметры.

Анализ вихревых структур и полей направлений вектора скорости потока в следе за пластинами для $H/R = 0,1-1,0$ и $L/R = 0,4-2,2$ показывает, что вследствие срыва потока на первой пластине в пространстве между пластинами формируется развитое циркуляционное течение (вихрь), интенсивность и габариты которого определяются величинами варьируемых параметров. Максимальная скорость потока в вихре достигает величины порядка $0,5 U$. Как результат из-за значительного разрежения в пространстве между пластинами при определенных H/R и L/R реализуется

