

СТРУКТУРА КОСОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ МАХА

Ю. А. Березин, Г. И. Дудникова, В. Г. Еселевич, Р. Х. Куртмуллаев

(Новосибирск)

В работе приведены результаты исследования структуры ударных волн, распространяющихся под углом $1/2\pi - \theta$ ($\theta \neq 0$) к магнитному полю, в зависимости от их скорости (числа Маха M). Подобные вопросы для поперечных волн изучались в ряде работ [1-3], где показано, что при увеличении числа Маха профили плотности и продольной скорости в поперечной волне приближаются к разрывным (имеется тенденция к опрокидыванию, которое фиксируется в эксперименте [4]). Возможность опрокидывания косых волн в холодной разреженной плазме оставалась неясной, поскольку анализ соответствующих стационарных уравнений в отличие от случая поперечных волн [3] не дает качественно различной структуры при увеличении числа Маха (соответствующий анализ см. ниже). Для выяснения этой проблемы были проведены на ЭВМ расчеты нестационарных плоских волн, распространяющихся под углом к невозмущенному магнитному полю, и результаты сравнивались с экспериментом. Было показано, что с возрастанием амплитуды волны убегающий вперед осцилляторный шлейф, типичный для квазистационарной волны, исчезает. При значениях $M_* \approx 5 \div 6$ профиль магнитного поля приобретает аperiодический характер, а профиль скорости частиц стремится к разрывному. В эксперименте наблюдается образование подножия во фронте и его уширение, аналогично тому, как это происходит в прямой волне.

Наиболее общий подход к решению задач динамики разреженной плазмы заключается в использовании кинетических уравнений для электронов и ионов с самосогласованными электромагнитными полями. Однако такой способ весьма сложен и в ряде случаев не является необходимым. Часто для многих задач бывает вполне достаточно гидродинамическое приближение, т. е. решение уравнений моментов (макроскопических уравнений движения электронов и ионов) и уравнений Максвелла с самосогласованными электромагнитными полями. Именно в рамках такого приближения изучены многие вопросы, связанные с распространением волн конечной амплитуды и ударных волн в разреженной плазме [3,5].

1. Математическая постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу. В начальный момент в однородном магнитном поле H_0 имеется квазинейтральная холодная плазма (т. е. начальное давление $P_0 \ll H_0^2/8\pi$) с плотностью N_0 и поперечным размером R . Затем на границе плазма — вакуум по синусоидальному закону начинает нарастать магнитное поле, направленное под углом θ к полю H_0 . Плазменный объем сжимается, а впереди поршня под углом $1/2\pi - \theta$ к полю H_0 распространяются плоские возмущения.

Система уравнений, соответствующая задаче о распространении этих возмущений, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Nu_x) &= 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{1}{8\pi m_i N} \frac{\partial}{\partial x}(H_y^2 + H_z^2) \\ \frac{\partial u_{yz}}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_{yz}}{\partial x} &= \frac{H_x}{4\pi m_i N} \frac{\partial H_{yz}}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(u_x H_y - u_y H_x) + \frac{cH_x}{4\pi e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{N} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{m_e c^2}{4\pi e^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{N} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \frac{c^2}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{H_y}{\sigma} \right) \\ \sigma &= \frac{Ne^2}{m_e \nu} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(u_x H_z - u_z H_x) - \frac{cH_x}{4\pi e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{N} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{m_e c^2}{4\pi e^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{N} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{c^2}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{H_z}{\sigma} \right) \\ H_x &= \text{const} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь σ — эффективная проводимость, ν — эффективная частота столкновений, u — скорость ударной волны, m_e — масса электрона, m_i — масса иона, c — скорость света, e — заряд электрона.

Граничные условия

$$H_z(0, t) = H_0(\cos \theta + A \sin \omega t), \quad H_y(0, t) = 0, \quad A = H_\infty^0/H_0 \quad (1.2)$$

Здесь H_∞^0 — амплитуда внешнего поля, ω — частота изменения внешнего поля, θ — угол между плоскостью фронта и направлением невозмущенного магнитного поля. Аналогичная система уравнений при отсутствии диссипации и при сравнительно небольших числах Маха изучалась в работах [5,6], где была получена осцилляторная структура косых волн и исследован вопрос об отражении таких волн от оси системы. В данной работе задача (1.1), (1.2) решена численно при условиях, достаточно близких к условиям экспериментов [7].

2. Характер стационарных решений. Для выяснения вопроса о характере стационарных решений системы уравнений (1.1) рассмотрим тип особых точек, соответствующих возмущенному (за волной) и невозмущенному (перед волной) состояниям плазмы, аналогично тому, как это сделано в [3] для случая поперечных ударных волн. Линеаризуя систему стационарных уравнений, получающихся из (1.1), найдем характеристическое уравнение

$$C^2 K^2 - \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} \eta K - B = 0 \quad (2.1)$$

где

$$C = \frac{cH_x}{4\pi eN_0}, \quad \eta = \frac{c^2}{4\pi\delta}, \quad B = \left(\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0 u} - u \right) \left(u - \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0 u} \right), \quad \rho_0 = N_0 m_i$$

Корни характеристического уравнения имеют вид

$$K_{1,2} = \frac{H_0^2}{8\pi\rho_0 c^2} \eta \pm i \frac{\sqrt{|B|}}{C} \quad (2.2)$$

так как ударная волна является сверхзвуковой по отношению к невозмущенному состоянию. Согласно [8] особая точка с корнями типа (2.2) является фокусом. Из (2.2) следует, что ее характер не зависит от амплитуды волны.

Линеаризация стационарных уравнений вблизи возмущенного состояния приводит к характеристическому уравнению, корни которого вещественны и имеют разные знаки (ввиду того, что ударная волна является дозвуковой по отношению к возмущенному состоянию) независимо от амплитуды волны. Согласно [8] такая особая точка является седлом.

Таким образом, анализ стационарных состояний показывает, что независимо от амплитуды косой ударной волны переход принадлежит к типу седло — фокус, т. е. является непрерывным. Напомним, что в случае поперечной волны переход при сравнительно небольших амплитудах будет непрерывным (типа седло — фокус), а при больших амплитудах — разрывным (типа седло — седло) [3].

Предварительные эксперименты показали, однако, что при больших числах Маха структура косых ударных волн претерпевает изменения, которые можно интерпретировать как опрокидывание. В связи с этим особую актуальность приобретает решение нестационарной задачи о распространении сильных косых волн.

3. Результаты численного решения. Рассмотрим результаты численного решения задачи (1.1), (1.2). В случае малой диссипации

$$v \sim (10^{-2} \div 10^{-1}) \omega_{He}, \quad \omega_{He} = \frac{eH_0}{m_e c}$$

при небольших числах Маха

$$M = \frac{u}{V_A} \lesssim 2, \quad V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi N_0 m_i}}$$

(где V_A — альфвеновская скорость) формируется квазиустановившаяся ударная волна с уходящим вперед осцилляторным шлейфом (фиг. 1). Характерные масштабы осцилляции δ и длина осцилляторного шлейфа

$$\delta \sim (0.5 \div 1) \frac{c}{\omega_{oi}}, \quad \Delta \sim (2 \div 2.5) \frac{c}{\omega_{oi}}$$

хорошо согласуются с теоретическими значениями [9]

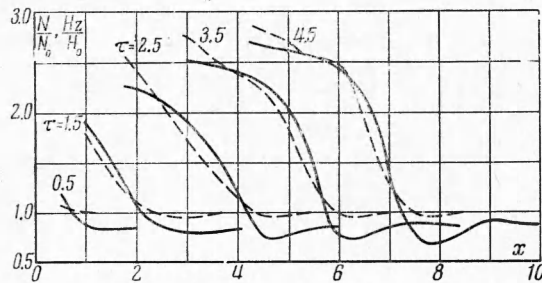
$$\delta \sim \frac{c}{\omega_{oi}} \Theta, \quad \Delta \sim \frac{u}{v} \frac{m_i}{m_e} \left(\Theta^2 + \frac{m_e}{m_i} \right)$$

Здесь ω_{oi} — ионная ленгмюровская частота.

Профиль магнитного поля опережает профиль плотности частиц (фиг. 1) на расстоянии

$$l \sim 0.2 \frac{c}{\omega_{0i}} \sim \frac{c^2}{4\pi\sigma V_A (M-1)} < \frac{c}{\omega_{0i}} \theta$$

как и должно быть при резистивном механизме диссипации во фронте. С возрастанием



Фиг. 1. Профиль «косой» ударной волны при $M < M_*$ в последовательные моменты времени;

$$\kappa = \frac{v}{\omega H_e} = 0.2, \quad A = \frac{H_{\infty 0}}{H_0} = 2$$

$$\tau = \frac{V A t \omega_{0i}}{c}, \quad x = \frac{r \omega_{0i}}{c}$$

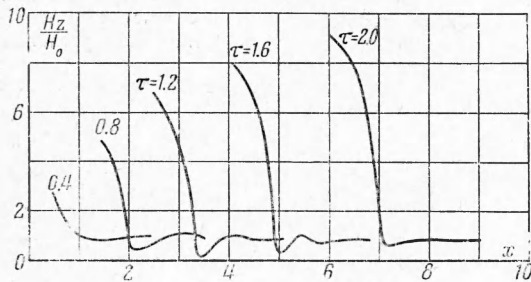
— соответственно частота столкновений, максимальная амплитуда поршня, время и расстояние в относительных единицах; $\theta = 30^\circ$; пунктирная линия — плотность плазмы, сплошная — магнитное поле

диссипации происходит непрерывное изменение профиля ударной волны от осцилляторного к монотонному, при этом осцилляции исчезают, когда

$$\sigma \lesssim \frac{\omega_{0i}}{4\pi} \frac{c}{u\theta}$$

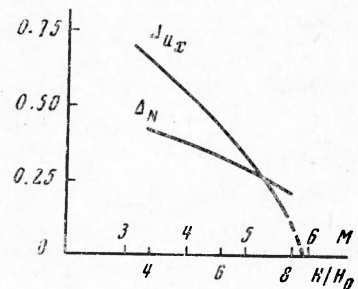
Увеличение амплитуды магнитного поля приводит к сильной нестационарности процесса и существенному изменению структуры ударной волны. Эти изменения проявляются в следующем:

- 1) с течением времени происходит исчезновение сформировавшихся ранее осцилляций магнитного поля (структура фронта становится аperiodической); при этом наблюдается некоторое уширение основного скачка магнитного поля (фиг. 2);
- 2) крутизна профиля плотности и продольной скорости резко увеличивается, т. е. $\Delta_N, \Delta_{u_x} \rightarrow 0$ (фиг. 3), тогда как ширина профиля магнитного поля Δ_H остается примерно постоянной (изомагнитный скачок).



Фиг. 2

Фиг. 2. Трансформация магнитного профиля косой ударной волны вблизи критического числа Маха M ($A = 10, \kappa = 0.2, \theta = 30^\circ$)

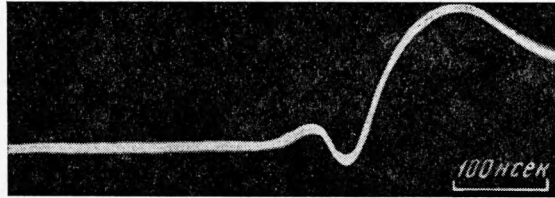


Фиг. 3

Фиг. 3. Зависимость ширины Δ_{u_x} профиля скоростей u_x и скачка плотности Δ_N во фронте косой ударной волны от числа Маха M при приближении к $M_* \sim 5 \div 6$ ($A = 10, \kappa = 0.2$)

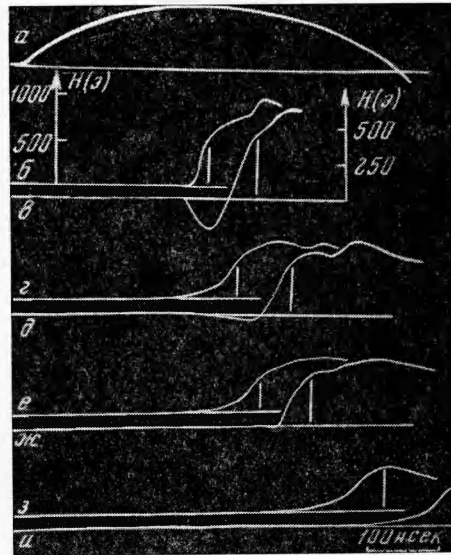
Эти результаты указывают на приближение косой ударной волны при больших амплитудах к фазе опрокидывания. Для случая $\theta \approx 30^\circ$ значение числа Маха, при котором наблюдалась тенденция к опрокидыванию, равно $M_* \sim 5 \div 6$, а значение относительной амплитуды волны $h_* = H / H_0 \sim 7 \div 8$.

4. Экспериментальные результаты. Опыты проводились на установке УН-4 [2,7]. Ударные волны генерировались в цилиндрическом плазменном объеме (диаметр $d = 16$ см, длина $l = 100$ см) с помощью «магнитного поршня», возбуждаемого ударным витком. Переменное поле витка ($\bar{H}_\infty \approx 2$ кэ) существенно неоднородно на его краю, благодаря этому давление поршня быстро падает с удалением от края витка. В результате направление движения поршня относительно оси системы образуют угол $1/2\pi - \theta$. В присутствии начального магнитного поля H_0 ($H_0 \approx 100-1000$ э), параллельного оси, это приводит к возбуждению «косой» волны, типичный профиль которой приведен на фиг. 4.



Фиг. 4. Типичный профиль косой ударной волны в водороде
 $N_0 \sim 5 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$, $\theta \sim 15^\circ$

Измерения осуществлялись с помощью магнитных зондов, размещенных в плоскости r, z , которые позволяли в каждом эксперименте непосредственно регистрировать магнитное поле $H(r, z, t)$, составляющие скорости волны u_r, u_z и угол наклона фронта θ относительно направления начального магнитного поля H_0 . В частности, для сравнения переходных процессов в прямой и косой волнах одновременно регистрировались магнитные возмущения внутри и вне витка. Внутренний зонд 1 располагался на расстоянии $r_1 = 2$ см от оси системы вблизи края витка, где поршень движется поперек поля ($\theta \approx 0^\circ$). Внешний зонд 2 был размещен на том же радиусе ($r_2 = 2$ см) и на расстоянии $\Delta Z = 5$ см от первого зонда. В этой области движение поршня происходит под углом к полю H_0 , равным $1/2\pi - \theta$, при этом $\theta \gg \sqrt{m_e/m_i}$.



Фиг. 5. Перестройка структуры магнитного фронта при изменении относительной амплитуды прямой (б, г, е, з, $\theta \approx 0^\circ$) и косой (в, д, ж, и, $\theta \sim 15-30^\circ$) ударных волн; водород; $N_0 \sim 5 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$; а — изменение внешнего поля $H_\infty(t)$.

Масштабы магнитного поля на осциллограммах г, е, з и д, ж, и соответственно равны указанным масштабам сигналов б и в. Начальное магнитное поле $H_0 \sim 450$ э (б, в), 200 э (г, д), 150 э (е, ж), 100 э (з, и)

На фиг. 5 приведена последовательность осциллограмм, полученных с этих зондов при уменьшении начального поля H_0 от 450 до 100 э и водородной плазме с плотностью $N_0 \sim 5 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$. При неизменной амплитуде «магнитного поршня» это приводит к возрастанию относительной амплитуды волны и числа Маха M . По временной сдвигке Δt между магнитными сигналами первого и второго зондов (фиг. 5, б — в, г — д, е — ж, з — и) определялся средний угол перекоса фронта θ в области локализации зонда 2 из соотношения: $\theta \approx \arcsin(U \Delta t / \Delta Z)$, где u — скорость косой ударной волны, $\Delta Z = 5$ см — расстояние между первым и вторым зондами.

Как видно из фиг. 5, б, г, д, з, при возрастании относительной амплитуды h наблюдается перестройка фронта прямой волны, описанная в [4], образование и нарастание подножки, уширение фронта до значения $\Delta \sim c / \omega_{oi}$.

Профиль магнитного поля кривой волны также испытывает перестройку, которая протекает с некоторым запаздыванием относительно переходных процессов в прямой волне, что отчасти объясняется меньшим значением h в области вне витка (из-за ослабления H_∞ на его краю).

Существенной особенностью рассматриваемых процессов во фронте кривой ударной волны является постепенное исчезновение осцилляции, опережающей основной скачок, в результате чего профиль принимает апериодический характер (фиг. 5, в, д, ж). Вплоть до этого момента основные черты изменения структуры волны хорошо повторены в приведенных выше результатах машинного эксперимента (фиг. 2).

Дальнейшее возрастание относительной амплитуды h в кривой волне приводит к образованию подножия и уширению фронта (фиг. 5, и).

В этой фазе профили магнитного поля прямой ($\Theta \approx 0^\circ$) и кривой ($\Theta \approx 30^\circ$) ударных волн практически неотличимы (фиг. 5, з, и).

Описанное явление развивается при числах Маха $M \sim 3 \div 5$ (последние результаты измерений электрического потенциала ϕ показали, что возмущение проходит два критических состояния: образование скачка N , ϕ с шириной порядка дебаевского радиуса r_D ($M \sim M_{*1}$) и его опрокидывание ($M \gtrsim M_{*2}$).

Следует отметить, что с уменьшением квазитационарного поля H_0 (т. е. при увеличении h) угол Θ возрастает, стремясь при $H_0 / H_\infty \ll 1$ к величине, определяемой кривизной силовых линий внешнего поля $H_\infty(t)$ в вакууме (начальное давление $P_0 \ll H_0^2 / 8\pi$). Однако это изменение угла только способствует выполнению принципиального условия данного эксперимента: $\Theta \gg \sqrt{m_e / m_i}$. Проведенные одновременные измерения плотности плазмы N и магнитного поля H показали возникновение скачков N вблизи $M = M_*$, что также подтверждено результатами решения задачи на ЭВМ.

Таким образом, экспериментальные и численные результаты свидетельствуют о такой перестройке структуры сильных кривых ударных волн, которую можно интерпретировать, как опрокидывание.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность Р. З. Сагдееву за плодотворные обсуждения и помощь в работе.

Поступила 13 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. В Сб: «Вопр. теории плазмы», М., Атомиздат, 1964, вып. 4.
2. Куртмуллаев Р. Х., Нестерихин Ю. Е., Пильский В. И., Сагдеев Р. З. Механизм нагрева плазмы бесстолкновительными ударными волнами. Plasma physics and controlled nuclear fusion. Proc. Conf. Culham, 1965, Vienna, 1966, vol. 2.
3. Березин Ю. А., Куртмуллаев Р. Х. Цилиндрические волны в разреженной плазме при наличии сильной «бесстолкновительной» диссипации. Физика горения и взрыва, 1966, т. 3, № 3.
4. Куртмуллаев Р. Х., Масалов В. Л., Меклер К. И., Пильский В. И. Письма в редакцию ЖЭТФ, 1968, т. 7, № 2.
5. Morton K. W. Finite amplitude compression waves in a collision — free plasma. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 11.
6. Березин Ю. А. Цилиндрические волны конечной амплитуды в разреженной плазме. ПМТФ, 1965, № 5.
7. Еселевич В. Г., Куртмуллаев Р. Х., Пильский В. И. Влияние дисперсионных эффектов на структуру ударной волны в замагниченной плазме. Письма в редакцию ЖЭТФ, 1967, т. 5, вып. 9.
8. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
9. Березин Ю. А., Куртмуллаев Р. Х., Нестерихин Ю. Е. Бесстолкновительные волны в разреженной плазме. Физика горения и взрыва, 1966, т. 2, № 3.