

способствует более интенсивному развитию процесса конвективного движения в целом.

Отмечаемое на фиг. 2 (кривая 3) сокращение периода разгона расплава до максимального значения скорости объясняется, очевидно, рассмотренной выше причиной.

С уменьшением числа Ar_0 ($Ar_0 = 0,2 \cdot 10^7$) максимальное значение скорости движения концентрационной конвекции заметно уменьшается (см. фиг. 2, кривая 1). При этом период разгона расплава до максимального значения скорости увеличивается.

Объясняется это тем, что с уменьшением числа Ar_0 уменьшается значение члена уравнения (1) $Sm^2 Ar_0 \delta S$. Это приводит к существенному снижению уровня концентрационной неоднородности, что и является причиной более медленного развития всех описанных выше процессов.

Поступила 11 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайсман Б. И., Тарунин Е. Л. О влиянии кристаллизации на процесс свободной конвекции в расплавленных металлах.— В кн.: Гидродинамика. Вып. 4. Пермь, изд. Перм. ун-та, 1972.
2. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
3. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач в математической физике. Новосибирск, «Наука», 1968.
4. Завгородний П. Ф., Повх И. Л., Севостьянов Г. М. Влияние «стефановских» потоков затвердевающего расплава на процесс тепловой конвекции.— ПМТФ, 1975, № 2.
5. Иодко Э. А., Завгородний П. Ф., Севостьянов Г. М. Расчет тепловой конвекции в затвердевающем расплаве.— ТВТ, 1971, т. 9, № 5.

УДК 531 : 539.374

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В. М. Волчков, М. А. Виноградов, А. А. Козлов

(Волгоград)

Хорошо известен факт принципиальной неоднородности пластической деформации, которая может сосредоточиваться в отдельных плоскостях скольжения. При достаточно высоких скоростях деформирования локализация деформации может приводить к разрушению [1]. Уменьшение температуры сказывается аналогично увеличению скорости деформации [2].

Указанную задачу в данной работе предлагается рассматривать с точки зрения устойчивости упругопластических течений.

В дальнейшем принимается модель упруговязкой жидкости, что удовлетворительно описывает поведение материала при высоких скоростях деформирования.

Движение упруговязкой среды описывается уравнениями

$$(1) \quad \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k};$$

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{2\mu'} \left[\sigma_{ik} - \frac{\lambda'}{2\mu' + 3\lambda'} \delta_{ik} \sigma_{pp} \right] + \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \delta_{ik} \frac{\partial \sigma_{pp}}{\partial t} \right];$$

$$(4) \quad \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right);$$

$$(5) \quad \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2\mu'} \sigma_{ik} \left[\sigma_{ik} - \frac{\lambda'}{2\mu' + 3\lambda'} \delta_{ik} \sigma_{pp} \right] + k \Delta T;$$

$$(6) \quad \varepsilon_{ii}^s = 0,$$

где σ_{ik} — тензор напряжений; ρ — плотность среды; ε_{ii}^s — шаровая часть тензора вязких деформаций; c — удельная теплоемкость; k — коэффициент теплопроводности; μ , λ — коэффициент Ламэ; u_i — компоненты скоростей; T — температура; μ' , λ' — коэффициенты вязкости, зависящие от температуры. В уравнении (5) первое слагаемое справа есть работа вязкой деформации.

Для решения задачи об устойчивости движения требуется наложить возмущение на основное движение, описываемое уравнениями (1)–(6), и проследить их поведение со временем.

Для простейшего случая плоского «слоистого» течения (фиг. 1, а) будем иметь

$$\sigma_{3i} = \varepsilon_{3i} = u_3 = u_2 = 0.$$

В случае несжимаемости среды и независимости коэффициентов упругости от температуры для нашего случая

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11} = 0.$$

Кроме того, примем простейшую зависимость коэффициента вязкости от температуры $\mu' = 1/bT$ ($b = \text{const}$). Тогда уравнения (1)–(6) для компонент σ_{12} , u_1 (индексы в дальнейшем опускаются) примут вид

$$\rho du/dt = \partial \sigma / \partial y, \quad \partial u / \partial y = (1/2\mu) \partial \sigma / \partial t + bT\sigma, \quad \rho c \partial T / \partial t = k \partial^2 T / \partial y^2 + bT\sigma^2,$$

или, переходя к безразмерным переменным

$$\tilde{\sigma} = \sigma/G; \quad \tilde{T} = (bk/c)T; \quad \tilde{y} = y\sqrt{(b/k)G}; \quad \tilde{t} = (cG/k)t; \quad G = 2\mu,$$

получим

$$(7) \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}} = A \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{y}}; \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{T}\tilde{\sigma},$$

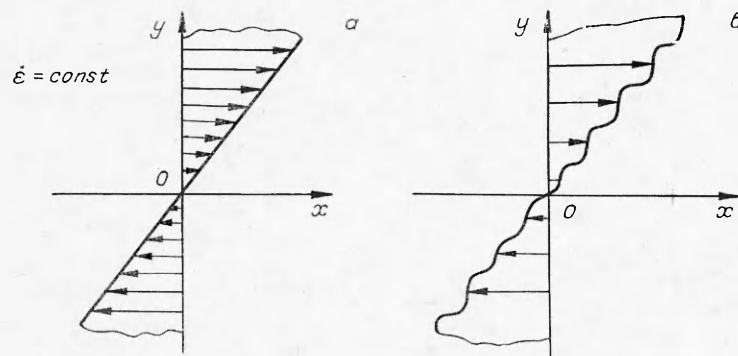
где

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = A \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + A\tilde{T}\tilde{\sigma}^2; \quad A = \frac{bGk}{\rho c^2}$$

(в дальнейшем верхняя черта, обозначающая безразмерную переменную, опускается).

Невозмущенное течение с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon}_0$ деформации (переменная с индексом 0) удовлетворяет уравнениям

$$(8) \quad \frac{d\sigma_0}{dt} = \frac{du}{dy} - T_0\sigma_0, \quad \frac{dT_0}{dt} = AT_0\sigma_0^2.$$



Ф и г. 1

Проварьировав систему уравнений (7), получим для возмущений u' , σ' , T'

$$(9) \quad \frac{\partial u'}{\partial t} = A \frac{\partial \sigma'}{\partial y}, \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial t} = \frac{\partial u'}{\partial y} - T_0 \sigma' - \sigma_0 T', \quad \frac{\partial T'}{\partial t} = A \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + 2AT_0 \sigma_0 \sigma' + A\sigma_0^2 T'.$$

Строго говоря, система (8) не имеет стационарных решений. Однако для небольших A можно рассмотреть квазистационарный случай ($d\sigma_0/dt = 0$). Тогда $T_0 \sigma_0 = du'/dy = \dot{\epsilon}$, и коэффициенты T_0 , σ_0 в системе уравнений (9) будут постоянными величинами. (В дальнейшем непосредственным численным интегрированием системы (8), (9) проверялась погрешность, вносимая последним предположением.)

Разыскивая решение системы (9) с постоянными коэффициентами в виде

$$u' = A' \exp(i\omega y + \beta t),$$

$$\sigma' = B' \exp(i\omega y + \beta t), \quad T' = C' \exp(i\omega y + \beta t),$$

получим характеристическое уравнение

$$\beta^3 + A(\omega^2 + T_0 - A\sigma_0^2)\beta^2 + [A\omega^2(T_0 + 1) + A\sigma_0^2 T_0]\beta + A^2\omega^4 - A^2\omega^2\sigma_0^2 = 0.$$

Собственные векторы $\mathbf{R} = \{u, \sigma, T\}$, соответствующие собственным значениям $\beta_i \omega_i$, имеют вид

$$\mathbf{R}_i = \left\{ -\frac{A\sigma_0\omega}{A\omega^2 + T_0\beta_i + \beta_i^2}; -\frac{\sigma_0\beta_i}{A\omega^2 + T_0\beta_i + \beta_i^2}; 1 \right\}.$$

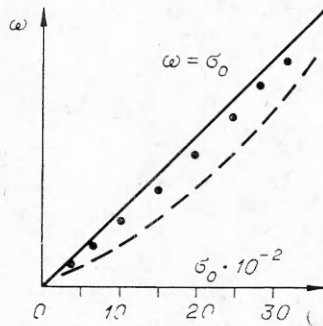
Для неустойчивых возмущений $\text{Re}\beta > 0$ (хотя бы для одного корня). Поэтому, воспользовавшись условием Гурвица, получим условие неустойчивости течения

$$\omega < \sigma_0,$$

или в размерном виде $\omega < (\dot{\epsilon}/T)\sqrt{1/bk}$.

Естественно предположить, что реальная конечная картина течения (см. фиг. 1, б) определяется теми возмущениями, для которых скорость

их роста будет максимальной. Численные расчеты по уравнению (9) для определения таких возмущений показаны штриховой кривой на фиг. 2 (сплошная линия отделяет область неустойчивости ($\omega < \sigma_0$) от области устойчивости); точками показано положение границы области неустой-



Ф и г. 2

чивости, полученное совместным численным решением систем (8), (9), т. е. с учетом изменения по времени коэффициентов T_0 , σ_0 в уравнении (9).

Полученные результаты показывают, что с увеличением скорости деформирования (или уменьшением температуры) расстояние между плоскостями локализации деформации уменьшается (что соответствует опытным данным).

Существенно, что полученные выводы имеют качественный принципиальный характер и справедливы только для больших скоростей деформации. В частности, вывод о существовании неустойчивых возмущений при любых малых скоростях деформирования не является

физическим, так как в этом случае требуется иная модель среды.

Кроме того, в общем случае требуется решать краевую задачу, что может внести существенные изменения. Полученные здесь выводы могут быть справедливыми только для областей, характерный размер в которых существенно больше характерного размера неустойчивых возмущений

Поступила 19 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Рехт Р. Ф. Разрушающий термопластический сдвиг.—«Труды Америк. об-ва инж.-механиков. Прикладная механика», 1964, № 2, с. 34—39.
2. Браун А. Ф. Поверхностные явления при пластической деформации металлов.—«Усп. физ. наук», 1957, т. 62, № 3, с. 305—357.

УДК 539.374 : 534.231 .1

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

Н. Мамадалиев, Ш. Маматкулов

(Москва, Ташкент)

Приводятся аналитические решения задач о распространении одномерной и двумерной стационарной ударной волны в идеальной нелинейно-сжимаемой среде при воздействии интенсивных кратковременных нагрузок в виде взрывного импульса. Рассматриваются одномерные нестационарные задачи о плоском и сферическом слое, а в двумерной постановке решается задача о воздействии подвижной нагрузки на полупло-