

О ВОСПЛАМЕНЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КАНАЛА КОНДЕНСИРОВАННОГО ВЕЩЕСТВА В ПОЛУЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ¹

В. Н. Вилюнов, В. М. Ушаков, Э. Р. Шрагер
(Томск)

Рассмотрим простейшую постановку задачи о выходе давления в канале конденсированного вещества, находящегося в условиях полузамкнутого объема, на стационарный режим.

Предположим, что зажигается лишь сравнительно небольшая часть конденсированного вещества. Дальнейший процесс воспламенения лимитируется в основном распространением пламени вдоль вещества.

Газодинамическая часть задачи описывается системой гиперболических дифференциальных уравнений в безразмерных переменных относительно \bar{u} , \bar{c} , $\bar{\Phi}$, \bar{p} :

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} = A^0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{2}{k-1} \bar{c} + \bar{u} \right) + (\bar{u} + \bar{c}) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{2}{k-1} \bar{c} + \bar{u} \right) - \frac{\bar{c}^2}{k(k-1)\bar{\Phi}} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} = A^+, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{2}{k-1} \bar{c} - \bar{u} \right) + (\bar{u} - \bar{c}) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{2}{k-1} \bar{c} - \bar{u} \right) + \\ + \frac{\bar{c}^2}{k(k-1)\bar{\Phi}} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \xi} = A^-, \end{aligned} \quad (3)$$

где используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A^0 &= \frac{K_1 \bar{\Phi}}{\bar{p}} \{ D^0 e(t - t_3) \bar{p}^{n_1} - A_q \}; \\ A^+ &= \frac{K_1 \bar{c}}{(k-1)\bar{p}} \{ D^+ e(t - t_3) \bar{p}^{n_1} - A_q \}; \\ A^- &= \frac{K_1 \bar{c}}{(k-1)\bar{p}} \{ D^- e(t - t_3) \bar{p}^{n_1} - A_q \}; \\ D^0 &= 1 + \frac{k-1}{2} \bar{u}^2 - \bar{c}^2; \\ D^+ &= 1 + \frac{k-1}{2} \bar{u}^2 - \frac{k-1}{2} \bar{u} \bar{c} - \frac{\bar{c}^2}{k}; \\ D^- &= 1 + \frac{k-1}{2} \bar{u}^2 + \frac{k-1}{2} \bar{u} \bar{c} - \frac{\bar{c}^2}{k}. \end{aligned}$$

Функция A_q учитывает теплотери в стенки конденсированного вещества в период его прогрева

$$A_q = K_2 \frac{\bar{u}^{0,8} \bar{p}^{0,8}}{\xi^{0,2}} [K_4 \bar{c}^2 - (1 + \gamma \theta_s)];$$

¹ Статья является изложением доклада на Первом Всесоюзном симпозиуме по горению и взрыву.

здесь k — показатель адиабаты; \bar{u} — скорость потока; \bar{c} — местная скорость звука; $\bar{\Phi}$ — энтропийная функция; \bar{p} — давление; τ — безразмерная временная координата; ξ — безразмерная пространственная координата; $e(t - t_3)$ — функция единичного скачка, $e(t - t_3) = 0$ при $t < t_3$, $e(t - t_3) = 1$ при $t \geq t_3$, t_3 — время зажигания.

$$K_2 = \frac{\alpha_* \cdot T_*' (k - 1)}{\rho_{01} c_*^2 a_1 p^{n_1}};$$

$$K_4 = \frac{T_{p_1}}{T_*};$$

$$K_1 = \frac{k \rho_{01}}{\rho_0} \frac{\sigma_{01}}{s_H} \frac{a_1 p_*^{n_1}}{c_*}$$

(a_1 и n_1 — константы в законе скорости горения конденсированного вещества, ρ_{01} — плотность конденсированного вещества, σ_{01} — полная поверхность горения канала, T_{p_1} — температура продуктов горения при постоянном давлении).

Для определения величины времени зажигания как функции ξ необходимо к уравнениям (1)–(3) присоединить уравнение зажигания. Предполагается, что зажигание и распространение пламени по поверхности конденсированного вещества лимитируется процессами, протекающими в конденсированной фазе. Пренебрегая кривизной поверхности канала (толщина прогретого слоя к моменту зажигания намного меньше характерного размера, например, диаметра канала), запишем уравнение зажигания в виде

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right) + \frac{Qz}{c} e^{-\frac{E}{R_0 T'}}. \quad (4)$$

Как правило, в рассматриваемом случае температурный градиент вдоль оси y существенно превосходит градиент вдоль оси x , поэтому вместо уравнения (4) запишем приближенное уравнение

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{Qz}{c} e^{-\frac{E}{R_0 T'}}, \quad (5)$$

которое интегрируем при следующих условиях:

$$T'(x, y, 0) = T_n, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y < \infty;$$

$$-\lambda \frac{\partial T'(x, 0, t)}{\partial y} = \alpha_m (T - T_{st}), \quad t > 0;$$

$$-\lambda \frac{\partial T'(x, \infty, t)}{\partial y} = 0, \quad t > 0.$$

Здесь T_{st} — температура поверхности канала; α_m — коэффициент теплоотдачи, который выражается эмпирической формулой [1]:

$$\alpha_m = \frac{a^0 \lambda_g}{L^{0,8} x^{0,2}} \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,4} \left(\frac{T_p}{T_n} \right)^{0,18}, \quad (6)$$

где Pr — число Прандтля, Re — число Рейнольдса, a^0 — постоянный коэффициент, L — длина канала конденсированного вещества, λ_g — коэффициент теплопроводности газов.

Переходя к обычно используемым в теории зажигания безразмерным переменным [2]:

$$\theta = \frac{E}{R T_*^2} (T - T_*), \quad t_a = \frac{R T_*^2 c_n}{E Q z} e^{\frac{E}{R T_*}}, \quad y_* = \sqrt{\chi t_a},$$

запишем уравнение (5) в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + K_e e^{\frac{\theta}{1 + \gamma \theta}}. \quad (7)$$

В безразмерных переменных граничные условия для уравнения (7) следующие:

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = K_5 \frac{\bar{u}^{0,8} \bar{p}^{0,8}}{\xi^{0,2}} [K_4 \bar{c}^2 - (1 + \gamma \theta_s)] \text{ при } \eta = 0;$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0, \text{ при } \eta_i \rightarrow \infty.$$

Здесь $\gamma = \frac{R_0 T_*}{E}$, $K_e = \frac{t_*}{t_a}$, $K_5 = \frac{\alpha_* y_*}{\lambda_n} \frac{E}{R_0 T_*}$ — безразмерные параметры; R_0 — газовая постоянная; E — энергия активации конденсированного вещества; λ_n — коэффициент теплопроводности конденсированного вещества.

Физические параметры определяются следующими естественными зависимостями:

а) масштаб скорости потока и местной скорости звука является величина скорости звука при изобарной температуре T_{p_1} ,

$$c_* = \sqrt{k R T_{p_1}};$$

б) за масштаб расстояний по оси выбрана длина канала конденсированного вещества L ,

$$x_* = L;$$

в) масштаб времени определяется временем пробега звуковой волны расстояния, равного длине канала конденсированного вещества

$$t_* = \frac{L}{c_*};$$

г) за масштаб расстояний в конденсированном веществе по оси y выбрана тепловая длина релаксации

$$y_* = \sqrt{\chi t_*};$$

д) масштаб давления служит величина предельного давления, достигаемая при горении конденсированного вещества

$$p_* = \left(\frac{\rho_{01} a_1 \sqrt{R T_{p_1}}}{\Gamma(k)} \frac{\sigma_{01}}{s_{kp}} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

где

$$\Gamma(k) = \sqrt{k} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}},$$

е) масштаб площади поперечного сечения

$$s_* = s_n.$$

Заметим, что масштабы измерения плотности, энтропии и коэффициента теплоотдачи не являются независимыми, а связаны с основными единицами измерения:

$$\begin{aligned} t_* &= \frac{k p_*}{c_*^2}; \\ \Phi_* &= \frac{p_*}{\rho_*^k}; \\ \alpha_* &= \frac{a^0 \lambda_g}{L} \text{Re}_*^{0,8} \text{Pr}_*^{0,4} \left(\frac{T_p}{T_H} \right)^{0,18}. \end{aligned}$$

За масштаб температуры T_* в конденсированном веществе примем квазистационарную температуру зажигания. Наконец, связь давления и плотности (в безразмерном виде) с местной скоростью звука и энтропией дается равенствами

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \bar{c}^{\frac{2k}{k-1}} \Phi^{-\frac{1}{k-1}}; \\ \bar{\rho} &= \bar{c}^{\frac{2}{k-1}} \Phi^{-\frac{1}{k-1}}. \end{aligned}$$

Для перехода к размерным переменным достаточно умножить соответствующую переменную на ее масштаб.

Начальные и краевые условия. Итак, процесс зажигания и выхода давления на режим описывается системой уравнений (1) — (3) и (7).

Сформулируем в системе (1) — (3) начальные и краевые условия. Начальные условия $\bar{u}(\xi, 0) = 0$, $\bar{c}(\xi, 0) = c_H$, $\Phi(\xi, 0) = \Phi_H$, $\theta(\eta, 0) = \theta_H$.

Для системы уравнений (1) — (3) задаются лишь два краевых условия — одно на левой границе области движения ($\xi = 0$) и другое на правой ($\xi = 1$). Эти условия гласят:

$$\begin{aligned} \bar{u}(0, \tau) &= 0 \quad \text{при } \tau \geq 0, \\ \frac{\bar{u}(1, \tau)}{\bar{c}(1, \tau)} &= \frac{M_{LH}}{2} \quad \text{при } \tau > \tau_1, \end{aligned}$$

где M_{LH} — функция, зависящая от геометрии.

Краевые и начальные условия для уравнения (7) были сформулированы выше.

Особенностью рассматриваемой задачи является то обстоятельство, что первые части уравнений газовой динамики (1) — (3) разрывны. Действительно, в момент времени $\tau = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} A^0 &= \begin{cases} \frac{K_1 \bar{\Phi}}{\bar{p}} D^0 \bar{p}^{n_1}, & 0 \leq \xi < \xi_p \\ -\frac{K_1 \bar{\Phi}}{\bar{p}} A_q, & \xi_p < \xi \leq 1; \end{cases} \\ A^+ &= \begin{cases} \frac{K_1 \bar{c}}{(k-1)\bar{p}} D^+ \bar{p}^{n_1}, & 0 \leq \xi < \xi_p \\ -\frac{K_1 \bar{c}}{(k-1)\bar{p}} A_q; & \xi_p < \xi \leq 1; \end{cases} \end{aligned}$$

$$A^- = \begin{cases} \frac{K_1 \bar{c}}{(k-1)\bar{p}} D \bar{p}^{n_1}, & 0 \leq \xi < \xi_p \\ -\frac{K_1 \bar{c}}{(k-1)\bar{p}} A_q, & \xi_p < \xi \leq 1. \end{cases}$$

Здесь ξ_p — определяет величину зажженного в начальный момент времени участка. В последующие моменты времени A^0, A^+, A^- испытывают скачок вдоль кривой $\xi(\tau)$, которая является фронтом перемещения воспламенения и находится в результате решения задачи.

Решение задачи зависит от следующих безразмерных параметров: $k, K_1, K_2, K_4, K_e, \gamma, Q_n, c_n, \Phi_n, M_{LH}, K_5, \xi_p$.

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА СЧЕТА

Обычно для решения уравнений (1) — (3) использовался метод характеристик. Однако этот метод, являясь наиболее точным для решения гиперболических систем, мало пригоден для данного случая по двум основным причинам: а) чрезвычайная сложность расчета разрывных решений; б) практическая непригодность совместного счета уравнений газовой динамики (1) — (3), численное решение которых определяется на кри-

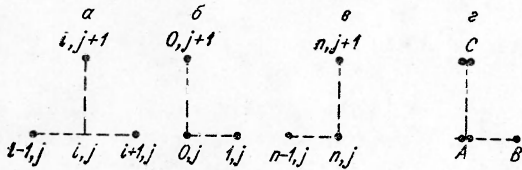


Рис. 1.

волинейной сетке плоскости ξ, τ , и уравнения зажигания (7), решение которого определяется на прямоугольной сетке η, τ . Поэтому для исследования задачи выхода давления на режим были использованы разностные методы вычислений, допускающие сквозной счет через возможные разрывы («вязкостные» разностные схемы). Для решения системы (1) — (3) применялась явная разностная схема Лакса [2] (рис. 1, а, б, в, г). Область движения газа ξ, τ рассекается прямоугольной сеткой; координаты узлов:

$$\tau = j\Delta\tau; \xi = i\Delta\xi; j = 0, 1, 2, \dots; i = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь $\Delta\tau$ и $\Delta\xi$ — соответственно шаги по времени и пространству, $r = \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi}$ — число Куранта.

Любое уравнение системы (1) — (3) может быть представлено в следующем общем виде:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + a_n \frac{\partial v}{\partial \xi} = f_v(\xi, \tau). \quad (8)$$

Например, для уравнения (1) $v \equiv \bar{\Phi}, a_v \equiv \bar{u}, f_v(\xi, \tau) \equiv A^0$. Производные $\frac{\partial v}{\partial \tau}, \frac{\partial v}{\partial \xi}$ в (8) заменяются приближенными разностными соотношениями:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} \approx \frac{v_i^{j+1} - \frac{v_{i+1}^j + v_{i-1}^j}{2}}{\Delta\tau},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} \approx \frac{v_{i+1}^j - v_{i-1}^j}{2\Delta \xi},$$

поэтому разностная аппроксимация с порядком $\theta(\Delta \xi)$ уравнения (8) имеет вид

$$\frac{v_{i+1}^{j+1} - \frac{v_{i+1}^j + v_{i-1}^j}{2}}{\Delta \tau} + a_{v_i}^j \frac{v_{i+1}^j - v_{i-1}^j}{2\Delta \xi} = f_{v_i}^j. \quad (9)$$

Используя принцип максимума, можно показать, что схема (9) устойчива при $a_{v_i}^j r < 1$. Счет граничных точек осуществлялся с помощью соответствующего явного «уголка» (см. рис. 1).

Уравнение нелинейной теплопроводности (7) аппроксимируется четырехточечной неявной схемой второго порядка точности [3]. Эта схема устойчива при всех $\frac{\Delta \tau}{(\Delta \xi)^2}$. Соответствующие разностные уравнения решались методом прогонки.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Приведем результаты расчета, когда в начальный момент времени зажигается 10% поверхности канала конденсированного вещества ($\xi_p = 0,1$). После зажигания элемента конденсированного вещества A_q полагается равной нулю, ибо учет теплотерь от газа к горящему конденсированному веществу лишен физического смысла.

В практических расчетах в первом приближении функция A_q «отключалась» в тот момент, когда величина температуры на поверхности конденсированного вещества θ_s обращалась в нуль.

Характер изменения давления, местной скорости звука и скорости потока показан на рис. 2 (1 — скорость потока, 2 — давление на правой границе, 3 — давление на левой границе, 4 — скорость звука на правой

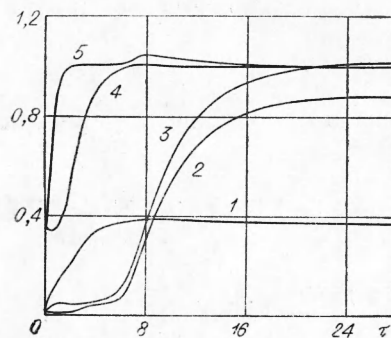


Рис. 2.

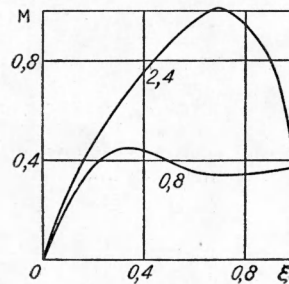


Рис. 3.

границе, 5 — скорость звука на левой границе). Как и следовало ожидать, в данных условиях зажигания выход давления на режим монотонен.

В момент времени $\tau = 5,3$ ($t = 7,4 \cdot 10^{-3}$ сек) формируется фронт воспламенения, который перемещается к правой границе полузамкнутого объема со средней скоростью ≈ 320 м/сек, и при $\tau = 7,1$ ($t = 9,9 \cdot 10^{-3}$ сек)

пламя охватывает всю поверхность канала конденсированного вещества. До момента $\tau=5,3$, т. е. в периоде прогрева конденсированного вещества и вытеснения сравнительно холодных исходных продуктов, в полости полузамкнутого объема (приблизительно в сечении $\xi=0,7$) наблюдаются сверхзвуковые скорости потока. На рис. 3 показано изменение числа

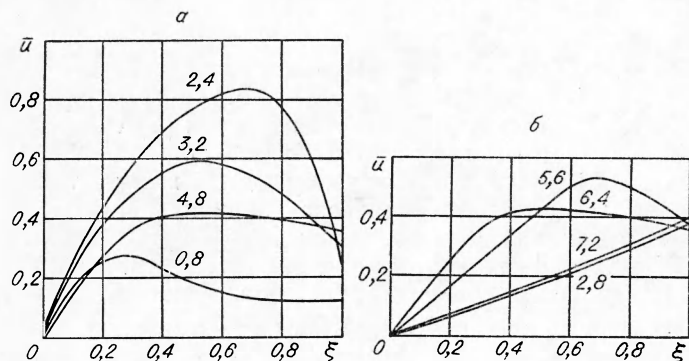


Рис. 4.

Маха в зависимости от ξ для различных моментов времени. Закономерности распределения скорости потока, давления и местной скорости звука в различные моменты времени показаны соответственно на рис. 4 а, б; 5; 6.

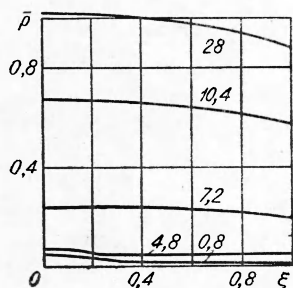


Рис. 5.

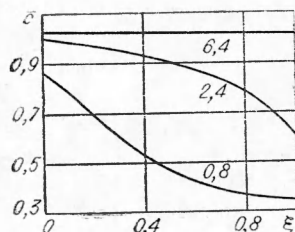


Рис. 6.

Поступила в редакцию
15/V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. Теплопередача. М.—Л., «Энергия», 1965.
2. Д. А. Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1947.
3. С. К. Годунов, В. С. Рябенский. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.