ПМТФ, № 1, 1973

УДК 536.46

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФРОНТА ДВУХСТАДИЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЭКЗОТЕРМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В КОНДЕНСИРОВАННОЙ СРЕДЕ

В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

В работе развита приближенная теория стационарного распространения плоского фронта двухстадийной экзотермической последовательной химической реакции в конденсированной среде. При построении решений используется метод сращиваемых асимптотических разложений. Параметром разложения является отношение суммы энергий активаций реакций к конечной адиабатической температуре горения. Выявлены характерные предельные режимы стационарного распространения волны, соответствующие различным значениям фигурирующих в задаче параметров. Для каждого из режимов получены приближенные аналитические выражения для скорости волны и распределения концентраций.

1. Формулировка задачи. Стационарное распространение плоского фронта двухстадийной последовательной экзотермической реакции $A_1 \to A_2 \to A_3$ в конденсированной среде может быть описано следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) - mc\frac{dT}{dx} + Q_1 a_1 \rho \Phi_1(T) + Q_2 a_2 \rho \Phi_2(T) = 0 \tag{1.1}$$

$$m\frac{da_1}{dx} = -a_1 \rho \Phi_1(T) \tag{1.2}$$

$$m\frac{da_2}{dx} = a_1 \rho \Phi_1(T) - a_2 \rho \Phi_2(T) \tag{1.3}$$

$$\Phi_1(T) = k_1 \exp\frac{-E_1}{RT}, \quad \Phi_2(T) = k_2 \exp\frac{-E_2}{RT} \tag{1.4}$$

$$x = -\infty, \quad a_1 = 1, \quad T = T_-, \quad a_2 = 0 \tag{1.5}$$

$$x = \infty, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad T = T_+ = T_- + c^{-1}(Q_1 + Q_2) \tag{1.6}$$

Здесь x — координата, a_1, a_2 — массовые доли веществ A_1, A_2, T — температура, ρ — плотность, m — массовая скорость горения, c — теплоемкость, λ — теплопроводность, R — газовая постоянная, Q_1, Q_2 — тепловые эффекты реакций, k_1, k_2 — предэкспоненциальные множители, E_1, E_2 — энергии активации.

Предполагается, что в ходе химических реакций плотность и все теплофизические характеристики среды сохраняют постоянные значения и что скорости химических реакций зависят от температуры по закону Аррениуса.

Задача (1.1)—(1.6) является двухточечной краевой задачей, решение которой заключается в определении функций $a_1(x)$, $a_2(x)$, $T(x)$ и собственного значения задачи m.

Для существования решения принимается, что функция Φ_1 отлична от нуля и определяется формулой (1.4) везде, кроме малого интервала температур $T_- \leqslant T < T_\varepsilon$, где она обращается в нуль [1, 2].

Задача (1.1)—(1.6) имеет первый интеграл

$$\lambda dT/dx = mc\,(T - T_+) + m\,(Q_1 + Q_2)\,a_1 + mQ_2a_2 \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) будет использоваться вместо уравнения (1.1). Если принять температуру за независимую переменную, задачу (1.2)—(1.7) можно представить в виде

$$\mu\frac{dr}{d\tau} = \frac{\sigma_k\,(1-r)}{\tau - \sigma_Q r - (1-\sigma_Q)\,q}\exp\left[-\beta\sigma_E - \frac{\beta\sigma_E\,(1-\tau)}{\sigma+\tau}\right] \tag{1.8}$$

$$\mu\frac{dq}{d\tau} = \frac{(1-\sigma_k)\,(r-q)}{\tau - \sigma_Q r - (1-\sigma_Q)\,q}\exp\left[-\beta\,(1-\sigma_E) - \frac{\beta\,(1-\sigma_E)\,(1-\tau)}{\sigma+\tau}\right] \tag{1.9}$$

$$\tau = 0, \qquad r = 0, \qquad q = 0 \tag{1.10}$$

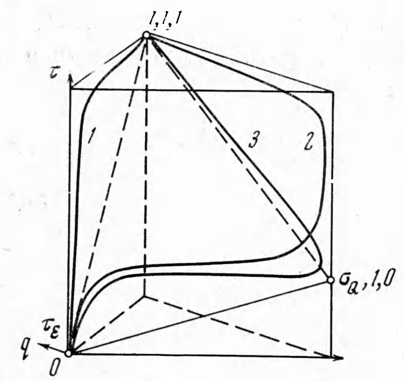
$$\tau = 1, \qquad r = 1, \quad q = 1 \tag{1.11}$$

$$r = 1 - a_1, \quad q = 1 - a_1 - a_2, \quad \sigma_k = \frac{k_1}{k_1+k_2}, \quad \sigma_E = \frac{E_1}{E_1+E_2}$$

$$\sigma_Q = \frac{Q_1}{Q_1+Q_2}, \quad \beta = \frac{E_1+E_2}{RT_+}, \quad \tau = \frac{T-T_-}{T_+-T_-}, \quad \sigma = \frac{T_-}{T_+-T_-}, \quad \mu = \frac{m^2c}{\lambda\rho\,(k_1+k_2)}$$

Здесь $r(\tau)$ и $q(\tau)$ — искомые функции, μ — собственное значение задачи.

2. Некоторые свойства интегральных кривых. В пространстве τ, r, q интегральные кривые задачи (1.8)—(1.11) должны проходить через точки $(\tau_\varepsilon, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$, $0 < \tau_\varepsilon \ll 1$. Из условия неотрицательности концентрации и последовательности превращения реагентов $r \geqslant q \geqslant 0$ и условия неотрицательности градиента температуры (теплового потока) $\tau - \sigma_Q r - (1 - \sigma_Q)q \geqslant 0$, а также из граничных условий можно заключить, что область, где располагаются имеющие физический смысл интегральные кривые, ограничена пятью плоскостями (см. фигуру)



$$q = 0, \qquad r = q, \qquad \tau = 1, \qquad r = 1,$$
$$\tau - \sigma_Q r - (1 - \sigma_Q)\,q = 0$$

Точка $(\tau_\varepsilon, 0, 0)$, соответствующая холодной границе волны горения, является обыкновенной точкой, в то время как точка $(1, 1, 1)$, соответствующая горячей границе зоны горения, особая. Через нее проходят три интегральные кривые

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_1 = \left(\frac{dq}{d\tau}\right)_1 = 0 \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2 = 0, \qquad \left(\frac{dq}{d\tau}\right)_2 = \frac{1}{1-\sigma_Q} + \frac{1-\sigma_k}{\mu\,(1-\sigma_Q)}\,e^{-\beta(1-\sigma_E)} \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_3 = -\left(\frac{dq}{d\tau}\right)_3\left[\frac{\sigma_k}{1-\sigma_k}\,e^{(1-2\sigma_E)\beta} - 1\right],$$

$$\left(\frac{dq}{d\tau}\right)_3 = \left(1 + \frac{\sigma_k}{\mu}\,e^{-\beta\sigma_E}\right)\left[1 - \frac{\sigma_Q\sigma_k}{1-\sigma_k}\,e^{(1-2\sigma_E)\beta}\right]^{-1} \tag{2.3}$$

Первая из этих кривых не может быть решением задачи ни при каких значениях параметров, так как эта интегральная кривая не попадает в область допустимых значений τ, r, q (фигура). Две других кривых могут представлять собой решение. Из (2.3) видно, что при больших β одна из производных должна быть отрицательной, если $\sigma_E < {}^1/_2$. Такая кривая не может быть решением, так как функции r и q должны быть возрастающими. При $\sigma_E < {}^1/_2$ решение задачи представляется кривой (2.2).

Отметим еще одно свойство уравнений (1.8), (1.11), Прямая $\tau - \sigma_Q r - (1 - \sigma_Q)\, q = 0$ на плоскости $r = 1$, соединяющая точки $(\sigma_Q, 1, 0)$ и $(1, 1, 1)$, состоит из особых точек уравнения (1.8). Каждая из этих точек является седлом, через которое в плоскости $q = \mathrm{const}$ проходят две сепаратриссы с касательными

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^{(1)} = 0, \qquad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^{(2)} = \frac{\sigma_k}{\mu\sigma_Q} \exp \frac{-\beta\sigma_E (1+\sigma)}{\sigma_Q + \sigma} - \frac{1}{\sigma_Q} \tag{2.4}$$

3. Предварительный анализ уравнений. Описание частных случаев. В п. 4—7 методом сращиваемых асимптотических разложений [3] будут построены приближенные решения задачи (1.8)—(1.11), соответствующие различным значениям параметра σ_E. Эти частные случаи выявляются при последовательном анализе различных предположений о возможном асимптотическом поведении собственного значения μ и функций r и q при больших β. Прежде чем перейти к построению решений, наметим ход рассуждений, однозначно приводящий к исследованным далее существенно различным частным случаям.

Из вида уравнений (1.8), (1.9) следует, что при больших значениях β области, в которых происходит основное изменение функций r и q, могут занимать малые доли интервала $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Правые части уравнений (1.8), (1.9) содержат малые экспоненциальные множители, которые при больших значениях β должны быть скомпенсированы, чтобы функции r и q на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ могли возрастать от 0 до 1. Для компенсации этих множителей необходимо принять, что величина μ включает в себя множитель $\exp(-\beta\alpha)$, при этом компенсация экспоненциальных членов в уравнениях (1.8), (1.9) будет иметь место в точках $\tau = \tau_1{}^\circ$ и $\tau_2{}^\circ$

$$\tau_1{}^\circ = \alpha^{-1}\sigma_E (1 + \sigma) - \sigma, \qquad \tau_2{}^\circ = \alpha^{-1} (1 - \sigma_E)(1 + \sigma) - \sigma \tag{3.1}$$

Выбор константы α определяет положение точек $\tau_1{}^\circ$, $\tau_2{}^\circ$ и асимптотическое поведение функций $r(\tau)$, $q(\tau)$.

Пусть $0 \leqslant \tau_1{}^\circ \leqslant 1$, $\tau_2{}^\circ < 0$. При таком выборе α экспоненциальный множитель компенсируется лишь в выражении для производной $dr/d\tau$, в то время как в выражении для $dq/d\tau$ появляется растущая экспонента. При $\tau < \tau_1{}^\circ$ производная $dr/d\tau$ и функция $r(\tau)$ экпоненциально малы. Малая окрестность точки $\tau = \tau_1{}^\circ$ является областью основного изменения функции $r(\tau)$ от нуля до единицы. Компенсация растущего экспоненциального множителя в выражении для $dq/d\tau$ может обеспечиваться соответствующим поведением разности $r - q$, которая должна быть экспоненциально малой, при этом область основного изменения q от 0 до 1 будет совпадать с соответствующей областью изменения r, т. е. представлять собой малую окрестность точки $\tau = \tau_1{}^\circ$. Из условия $\tau - \sigma_Q\tau - (1 - \sigma_Q)\, q > 0$ тогда следует, что это возможно, если $\tau_1{}^\circ = 1$. Из (3.1) находим, что $\alpha = \sigma_E$. Разделив (1.9) на (1.8), получим

$$\frac{dq}{dr} = \frac{r - q}{1 - r}\, e^{-\beta(1-2\sigma_E)} \exp \frac{-\beta(1 - 2\sigma_E)(1 - \tau)}{\sigma + \tau} \tag{3.2}$$

Из уравнения (3.2) видно, что область основного изменения q может совпадать с областью основного изменения r лишь при $\sigma_E > {}^1/_2$ и должна располагаться в малой окрестности $\tau = 1$. Случай $\sigma_E = {}^1/_2$ будет несколько отличаться от случая ${}^1/_2 < \sigma_E \leqslant 1$. Хотя области основного изменения r и q здесь будут совпадать и располагаться вблизи $\tau = 1$, разность $r - q$ уже не будет экспоненциально малой.

Интегральные кривые задачи (1.8)—(1.11) при ${}^1/_2 < \sigma_E \leqslant 1$ при больших β характеризуются одинаковым асимптотическим поведением. В особой точке (1, 1, 1) им соответствуют значения производных, определяемые формулой (2.3). Ход этих кривых, проходящих вблизи прямых $r = 0$, $q = 0$, и $r = q$, $r = 1$, показан на фигуре (кривая *1*).

Пусть теперь точки $\tau = \tau_1^\circ$ и $\tau = \tau_2^\circ$ находятся внутри интервала $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. При этом, как и прежде, основное изменение r будет происходить в окрестности $\tau = \tau_1^\circ$; при $\tau > \tau_1^\circ$ производная $dr/d\tau$ снова становится малой, так как здесь рост экспоненциального множителя в выражении для $dr/d\tau$ подавляется еще более резким уменьшением величины $(1 - r)$. Основное изменение q от 0 до 1 будет иметь место вблизи $\tau = \tau_2^\circ$, где обращается в единицу экспоненциальный множитель в выражении для производной $dq/d\tau$. Из условия $r > q$ следует, что $\tau_1^\circ < \tau_2^\circ$, а из условия $\tau - \sigma_Q r - (1 - \sigma_Q)\, q > 1$ следует, что $\tau_1^\circ > \sigma_Q$, $\tau_2^\circ = 1$. С учетом (3.1) найдем

$$\alpha = 1 - \sigma_E, \qquad (\sigma_Q + \sigma)\,(1 + \sigma_Q + 2\sigma)^{-1} < \sigma_E < {}^1/_2$$

В этом случае интегральные кривые, выйдя из точки $(\tau_\varepsilon, 0, 0)$, проходят вдоль прямой $r = 0$, $q = 0$, далее оставаясь вблизи поверхности $q = 0$, переходят к прямой $r = 1$, $q = 0$, и после поворота около точки (1, 1, 0) проходят в окрестности прямой $r = \tau = 1$ в особую точку (1, 1, 1) (кривая *2* на фигуре). Производные интегральных кривых в особой точке определяются формулой (2.2), из которой можно найти, что в рассматриваемом случае $(dq/d\tau)_+ \to \infty$.

При $0 < \sigma_E < (\sigma_Q + \sigma)(1 + \sigma_Q + 2\sigma)^{-1}$ интегральные кривые задачи (1.8)—(1.11) при больших β также обладают общими особенностями. В этом случае следует выбрать $\alpha = \sigma_E\,(1 + \sigma)(\sigma_Q + \sigma)^{-1}$. При этом $\tau_1^0 = \sigma_Q$, $\tau_2^0 > 0$; экспоненциальный множитель $\exp(-\alpha\beta)$ компенсирует малый экспоненциальный множитель лишь в выражении для $dr/d\tau$, в то время как «выравнивание» порядков в левой и правой частях уравнения (1.9) обеспечивается соответствующим экспоненциальным поведением знаменателя в правой части (1.9). Рость r от 0 до 1 происходит в малой окрестности точки $\tau = \sigma_Q$. Увеличение q от 0 до 1 происходит «равномерно» на всем участке $\sigma_Q \leqslant \tau \leqslant 1$. Ход интегральной кривой показан на фигуре (кривая *3*). В особой точке (1, 1, 1) интегральные кривые имеют производные (2.2). Можно убедиться, что в отличие от кривой *2* производная $dq/d\tau$ в особой точке в этом случае имеет конечную величину.

Из проведенного качественного анализа можно заключить, что асимптотическое поведение интегральных кривых задачи существенно различается при изменении величины σ_E в следующих интервалах:

$$ {}^1/_2 < \sigma_E \leqslant 1, \qquad \sigma_E = {}^1/_2, \qquad (\sigma_Q + \sigma)\,(1 + \sigma_Q + 2\sigma)^{-1} < \sigma_E < {}^1/_2$$
$$0 \leqslant \sigma_E < (\sigma_Q + \sigma)\,(1 + \sigma_Q + 2\sigma)^{-1}$$

Этот вывод подтверждается фактическим построением четырех различных решений. При выборе вида асимптотического разложения оказывается полезным знание асимптотических решений более простой задачи, рассмотренной в работе [4].

4. Решение при ${}^1/_2 < \sigma_E \leqslant 1$. В этом случае следует выделить две области с различным асимптотическим поведением решений — малую окрестность точки $\tau = 1$ (внутренняя область) и остальную часть интервала (внешняя область). Во внутренней области вместо τ введем переменную $\tau^* = \beta(1-\tau)$ и будем искать решение в каждой из областей в виде внешних и внутренних разложений

$$r(\tau^*) = f_0(\beta) r_0(\tau^*) + f_1(\beta) r_1(\tau^*) + \ldots, \quad r(\tau) = F_0(\beta) r_0(\tau) + F_1(\beta) r_1(\tau) + \ldots$$
$$(f_1/f_0 \to 0, \quad F_1/F_0 \to 0, \quad \beta \to \infty) \tag{4.1}$$

$$q(\tau^*) = n_0(\beta) q_0(\tau^*) + n_1(\beta) q_1(\tau^*) + \ldots, q(\tau) = N_0(\beta) q_0(\tau) + N_1(\beta) q_1(\tau) + \ldots$$
$$(n_1/n_0 \to 0, \quad N_1/N_0 \to 0, \quad \beta \to \infty) \tag{4.2}$$

Разложение для собственного значения μ в обеих областях ищем в виде

$$\mu = \varphi_0(\beta)\mu_0 + \varphi_1(\beta)\mu_1 + \ldots, \quad \varphi_1/\varphi_0 \to 0 \text{ при } \beta \to \infty \tag{4.3}$$

Внешние разложения должны удовлетворять граничным условиям (1.10), внутренние — условиям (1.11). Соответствие между разложениями во внешней и внутренней областях устанавливается из условия сращивания, которое состоит в требовании одинакового предельного поведения внутренних и внешних разложений, записанных в одинаковых переменных [3, 4]. Ограничимся определением двух членов разложений (4.1)—(4.3).

После перехода к переменной τ^* и подстановки разложений (4.1)—(4.3) в (1.8), (1.9), (1.11) с точностью до членов более высокого порядка малости получим

$$-\beta\varphi_0\mu_0 \frac{dr_0}{d\tau^*} = \frac{\sigma_k(1-r_0)}{1-\sigma_Q r_0 - (1-\sigma_Q) q_0} \exp\left[-\beta\sigma_E - \frac{\sigma_E \tau^*}{1+\sigma}\right] \tag{4.4}$$

$$-\beta\varphi_0\mu_0 \frac{dq_0}{d\tau^*} = \frac{(1-\sigma_k)(r_0 + f_1 r_1 - q_0 - n_1 q_1)}{1-\sigma_Q r_0 - (1-\sigma_Q) q_0} \exp\left[-\beta(1-\sigma_E) - \frac{(1-\sigma_E)\tau^*}{1+\sigma}\right] \tag{4.5}$$

$$\tau^* = 0, \qquad r_0 = 1, \; q_0 = 1 \tag{4.6}$$

В уравнениях (4.4), (4.5) использовано равенство $n_0(\beta) = f_0(\beta) = 1$, которое следует из (4.6).

Из (4.4) видно, что для выравнивания порядков малости левой и правой частей в (4.4) следует выбрать

$$\varphi_0(\beta) = \beta^{-1} \exp(-\beta\sigma_E) \tag{4.7}$$

При этом уравнению (4.5) можно удовлетворить, если принять

$$r_0 = q_0, \qquad f_1 = n_1, \qquad r_1 = q_1 \tag{4.8}$$

Это означает, что различие между функциями r_0, q_0, и r_1, q_1 экспоненциально мало

$$r_0 + f_1 r_1 - q_0 - n_1 q_1 \sim \frac{\sigma_k}{1-\sigma_k} e^{-(2\sigma_E - 1)\beta} \exp\frac{-(2\sigma_E - 1)\tau^*}{1+\sigma} \tag{4.9}$$

Теперь из (4.4), (4.6) с учетом (4.7), (4.8) найдем

$$r_0(\tau^*) = 1 - \frac{\sigma_k(1+\sigma)}{\mu_0\sigma_E}\left[1 - \exp\frac{-\sigma_E\tau^*}{1+\sigma}\right] \tag{4.10}$$

Приняв во внимание (4.7), можно убедиться, что решения $r(\tau)$ и $q(\tau)$ уравнений (1.8), (1.9) во внешней области экпоненциально малы. Поэтому во внешних разложениях (4.1), (4.2)

$$r_0(\tau) = q_0(\tau) = r_1(\tau) = q_1(\tau) = 0$$

Тогда условие сращивания сводится к требованию

$$r_0(\tau^*) \to 0, \quad q_0(\tau^*) \to 0, \quad r_1(\tau^*) \to 0, \quad q_1(\tau^*) \to 0 \text{ при } \tau^* \to \infty \tag{4.11}$$

Применяя (4.11) к (4.10), найдем

$$\mu_0 = \frac{\sigma_k(1+\sigma)}{\sigma_E}, \quad r_0(\tau^*) = \exp\frac{-\sigma_E\tau^*}{1+\sigma} \tag{4.12}$$

Перейдем к определению второго приближения. После перехода к переменной τ^* и подстановки двучленных разложений (4.1) — (4.3) в (1.8), (1.9) с учетом (4.9), сохраняя в уравнениях члены более высокого, чем при определении r_0, q_0, μ_0, порядка малости, для $r_1(\tau^*)$ получим уравнение

$$\beta\mu_1\varphi_1\frac{dr_0}{d\tau^*} + \beta\mu_0\varphi_0 f_1\frac{dr_1}{d\tau^*} = \sigma_k\frac{1}{\beta}\left[\frac{\sigma_E\tau^{*2}}{(1+\sigma)^2} - \frac{\tau^*}{1-r_0}\right]\exp\left(-\beta\sigma_E - \frac{\sigma_E\tau^*}{1+\sigma}\right) \tag{4.13}$$

Определение из (4.13) функции $r_1(\tau^*)$, удовлетворяющей граничному условию и условию сращивания, станет возможным, если

$$f_1(\beta) = \beta^{-1}, \quad \varphi_1(\beta) = \beta^{-1}\varphi_0(\beta) = \beta^{-2}\exp(-\beta\sigma_E) \tag{4.14}$$

Уравнение и граничное условие для r_1 примут вид

$$\mu_0\frac{dr_1}{d\tau^*} = \sigma_k\left[\frac{\sigma_E\tau^{*2}}{(1+\sigma)^2} - \frac{\tau^*}{1-r_0(\tau^*)} + \frac{\mu_1}{\mu_0}\right]\exp\frac{-\sigma_E\tau^*}{1+\sigma} \tag{4.15}$$
$$\tau^* = r_1 = 0$$

Здесь μ_0 и $r_0(\tau^*)$ определены формулами (4.12). Из (4.15) найдем

$$r_1(\tau^*) = \frac{\mu_1\sigma_E}{\sigma_k(1+\sigma)}\left[1 - \exp\frac{-\sigma_E\tau^*}{1+\sigma}\right] + \frac{2}{\sigma_E} - \frac{(1+\sigma)}{\sigma_E}J\left(\frac{\sigma_E\tau^*}{1+\sigma}\right) -$$
$$- \frac{2}{\sigma_E}\left[1 + \frac{\sigma_E\tau^*}{1+\sigma} + \frac{\sigma_E^2\tau^{*2}}{2(1+\sigma)}\right]\exp\frac{-\sigma_E\tau^*}{1+\sigma} \tag{4.16}$$

$$J(\alpha) = \int_0^\alpha (e^z - 1)^{-1} z\,dz, \quad J(\infty) = \frac{\pi^2}{6}$$

Применив к (4.16) условие сращивания (4.11), найдем

$$\mu_1 = \frac{\sigma_k(1+\sigma)}{\sigma_E^2}\left[(1+\sigma)\frac{\pi^2}{6} - 2\right] \tag{4.17}$$

Таким образом двучленные внутренние и внешние разложения функций $r(\tau)$ и $q(\tau)$ и разложение собственного значения μ, представляющие собой приближенное решение задачи (1.8)—(1.11) в рассматриваемом частном случае, имеют вид

$$r(\tau^*) = q(\tau^*) = r_0(\tau^*) + \beta^{-1}r_1(\tau^*), \quad r(\tau) = q(\tau) = 0, \tag{4.18}$$
$$\mu = \beta^{-1}(\mu_0 + \beta^{-1}\mu_1)\exp(-\beta\sigma_E)$$

Здесь r_1, r_0, μ_0, μ_1 определяются формулами (4.12), (4.16), (4.17). Запишем двучленное выражение для массовой скорости распространения горения в размерных переменных

$$m = \left[\frac{k_1\lambda\rho(1+\sigma)}{c}\right]^{1/2}\left(\frac{E_1}{RT_+}\right)^{-1/2}\left\{1 + \left(\frac{E_1}{RT_+}\right)^{-1}\left[(1+\sigma)\frac{\pi^2}{12} - 1\right]\right\}\exp\frac{-E_1}{2RT_+} \tag{4.19}$$

Видно, что в рассмотренном частном случае скорость горения зависит только от кинетических параметров k_1, E_1 первой реакции.

Сравнение (4.19) с полученной в [4] формулой для скорости распространения одностадийной экзотермической реакции в конденсированной фазе показывает, что наличие второй реакции проявляется лишь в значении температуры горения, которая определяется суммарным тепловыделением двух реакций.

5. **Решение при** $\sigma_E = {}^1/_2$. Система уравнений (1.8), (1.9) может быть сведена к одному уравнению. После подстановки $\sigma_E = {}^1/_2$ и деления (1.9) на (1.8) получим

$$\frac{dq}{dr} = \frac{(1-\sigma_k)}{\sigma_k} \frac{r-q}{1-r} \tag{5.1}$$

При помощи (5.1) выразим q через r

$$q(r) = \begin{cases} (1-\delta_k)^{-1}\left[1-\delta_k r-(1-r)^{\delta_k}\right], & \delta_k = \sigma_k^{-1}(1-\sigma_k), \quad \sigma_k \neq {}^1/_2 \\ r+(1-r)\ln(1-r), & \sigma_k = {}^1/_2 \end{cases} \tag{5.2}$$

С учетом (5.2) задача (1.8)—(1.11) сводится к решению одного уравнения с условиями

$$\mu \frac{dr}{d\tau} = \frac{\sigma_k(1-r)}{\tau-\sigma_Q r-(1-\sigma_Q)\,q(r)} \exp\left[-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta(1-\tau)}{2(\sigma+\tau)}\right] \tag{5.3}$$

$$\tau = 0, \qquad r = 0 \tag{5.4}$$

$$\tau = 1, \qquad r = 1 \tag{5.5}$$

Здесь функция $q(r)$ задана формулой (5.2).

При построении приближенного решения задачи (5.3)—(5.5) аналогично п. 4 выделим внутреннюю и внешнюю области изменения переменной τ; в окрестности $\tau = 1$ введем переменную $\tau^* = \beta(1-\tau)$ и будем искать функцию r и собственное значение μ в виде разложений (4.1)—(4.3). Из (5.3), (5.5) для нулевого приближения получим

$$-\mu_0\beta\varphi_0 \frac{dr_0}{d\tau^*} = \frac{\sigma_k(1-r_0)}{1-\sigma_Q r_0-(1-\sigma_Q)\,q_0(r_0)} \exp\left[-\frac{\beta}{2}-\frac{\tau^*}{2(1+\sigma)}\right], \qquad r_0(0) = 1 \tag{5.6}$$

Здесь, как и в п. 4, $f_0(\beta) = 1$. Зависимость $q_0(r_0)$ устанавливается из (5.2). Для компенсации малого экспоненциального члена в правой части уравнения (5.6) положим

$$\varphi_0(\beta) = \beta^{-1}\exp(-\beta/2) \tag{5.7}$$

С учетом (5.7), (5.2) из (5.6) можно найти

$$\mu_0(1-r_0)\{1+(1-\sigma_Q)[1-\ln(1-r_0)]\} = (1+\sigma)\left[1-\exp\frac{-\tau^*}{2(1+\sigma)}\right] \tag{5.8}$$

$$(\sigma_k = {}^1/_2)$$

$$\frac{\mu_0(1-r_0)}{1-\delta_k}\left[\sigma_Q-\delta_k+\frac{1-\sigma_Q}{\delta_k}(1-r_0)^{\delta_k-1}\right] = 2\sigma_k(1+\sigma)\left[1-\exp\frac{-\sigma_E\tau^*}{1+\sigma}\right]$$

$$(\sigma_h \neq {}^1/_2) \tag{5.9}$$

Применив к (5.8), (5.9) условие сращивания, которое как и в п. 4 выражается в требовании $r_0(\tau^*) \to 0$ при $\tau^* \to \infty$ получим

$$\mu_0 = \frac{(1-\sigma_k)\sigma_k(1+\sigma)}{(1-\sigma_k\sigma_Q)\sigma_E}, \quad m_0 = \left[\frac{k_1k_2\lambda\rho T_+}{k_1Q_2+k_2(Q_1+Q_2)}\right]^{1/2}\left(\frac{E}{RT_+}\right)^{-1/2}\exp\frac{-E}{2RT_+} \tag{5.10}$$

Формулы (5.8)—(5.10) определяют нулевое приближение для функции и собственного значения задачи μ. Следующие члены разложений, которые дадут поправку порядка β^{-1}, не могут быть получены в аналитической форме, их определение сводится к численному интегрированию несложного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dr_1}{d\tau^*}=\left\{\frac{\tau^{*2}}{2(1+\sigma)^2}-\frac{\tau^*+\sigma_Q r_1+r_1(1-\sigma_Q)\,\delta_k\,[r_0-q_0(r_0)]\,(1-r_0)^{-1}}{1-\sigma_Q r_0-(1-\sigma_Q)\,q_0(r_0)}+\frac{r_1}{1-r_0}+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu_1}{\mu_0}\right\}\frac{\sigma_k}{\mu_0}\,\frac{(1-r_0)}{[1-\sigma_Q r_0-(1-\sigma_Q)\,q_0(r_0)]}\exp\frac{-\tau^*}{2(1+\sigma)},\quad r_1(0)=0 \qquad (5.11)$$

Заметим, что выражение (5.10) для μ_0 совпадает с (4.12) при $\sigma_k \ll 1$ ($k_2 \gg k_1$). Этот результат выражает тот факт, что при равенстве энергий активаций двух реакций, определяющим фактором при сравнении скоростей химического реагирования становится относительная величина предэкспоненциальных множителей. При $k_2 \gg k_1$ разность $r-q$ мала, отличие от п. 4 становится несущественным.

6. Решение при $(\sigma_Q+\sigma)(1+\sigma_Q+2\sigma)^{-1}<\sigma_E<{}^1/_2$. В данном случае разбиение интервала $0\leqslant\tau\leqslant 1$ на внутреннюю и внешнюю области для уравнений (1.8) и (1.9) будет различным. Для уравнения (1.9) внутренней областью будет малая окрестность $\tau=\tau_2^0=1$, внешней — остальная часть интервала. Для уравнения (1.8) внутренней областью будет малая окрестность некоторой точки $\tau=\tau_1^0<1$, внешняя область будет состоять из двух отрезков интервала $0\leqslant\tau\leqslant 1$, отделяющих малую окрестность точки τ_1^0 от точек $\tau=1$ и $\tau=0$. Построение решения сводится к отысканию внешних и внутренних разложений для каждого из двух разбиений интервала.

Исследуем область, примыкающую к $\tau=\tau_2^0=1$. Вместо переменной τ в (1.8)—(1.11) введем $\tau_2^*=\beta(1-\tau)$. Приближенное решение во внутренней области будем искать в виде двучленных разложений

$$\mu=\varphi_0(\beta)\,\mu_0+\varphi_1(\beta)\,\mu_1,\qquad r(\tau_2^*)=f_0(\beta)\,r_0(\tau_2^*)+f_1(\beta)\,r_1(\tau_2^*)$$
$$q(\tau_2^*)=n_0(\beta)\,q_0(\tau_2^*)+\eta_1(\beta)\,q_1(\tau_2^*) \qquad (6.1)$$
$$\varphi_1/\varphi_0\to 0,\qquad f_1/f_0\to 0,\qquad n_1/n_0\to 0\qquad \text{при}\qquad \beta\to\infty$$

Из граничных условий (1.11) найдем

$$f_0(\beta)=n_0(\beta)=1 \qquad (6.2)$$

В рассматриваемом частном случае следует выбрать

$$\varphi_0(\beta)=\beta^{-1}\exp[-(1-\sigma_E)\,\beta],\qquad \varphi_1(\beta)=\beta^{-1}\varphi_0(\beta),$$
$$n_0(\beta)=1,\quad n_1(\beta)=\beta^{-1} \qquad (6.3)$$

После подстановки (6.1) в уравнение (1.8) с учетом (6.2), (6.3) можно получить

$$1-r(\tau_2^*)\sim\exp(2\sigma_E-1)\beta$$

Видно, что функция $r(\tau_2^*)$ при $\beta\to\infty$ отличается от единицы лишь малым экспоненциальным членом, поэтому

$$r_0(\tau_2^*)=1,\qquad r_1(\tau_2^*)=0$$

Уравнение и граничное условие для функции $q_0(\tau_2^*)$ имеют вид

$$-\mu_0\frac{dq_0}{d\tau_2^*}=\frac{(1-\sigma_k)}{(1-\sigma_Q)}\exp\frac{-(1-\sigma_E)\,\tau^*}{1+\sigma},\quad q_0(0)=1 \qquad (6.4)$$

Из (6.4) находим

$$q_0(\tau_2^*) = 1 - \frac{(1-\sigma_k)(1+\sigma)}{\mu_0(1-\sigma_Q)(1-\sigma_E)}\left[1 - \exp\frac{-(1-\sigma_E)\tau_2^*}{1+\sigma}\right] \tag{6.5}$$

Константа μ_0 в (6.5) должна определяться из условия сращивания (6.5) с решением $q(\tau)$ во внешней области, которое с точностью до экспоненциальных членов равно нулю. Поэтому условие сращивания выражается в требовании

$$q_0(\tau_2^*) \to 0, \qquad q_1(\tau_2^*) \to 0 \text{ при } \tau^*_2 \to \infty \tag{6.6}$$

Применив (6.6) к (6.5), получим

$$\mu_0 = \frac{(1-\sigma_Q)(1-\sigma_E)}{(1-\sigma_k)(1+\sigma)}, \quad q_0(\tau_2^*) = \exp\frac{-(1-\sigma_E)\tau_2^*}{1+\sigma} \tag{6.7}$$

Из (1.9) после подстановки $\tau_2^* = \beta(1-\tau)$ и (6.1), сохранив члены более высокого порядка малости, с учетом (6.2)—(6.4) можно получить уравнение для q_1

$$\mu_0\frac{dq_1}{d\tau_2^*} = \frac{(1-\sigma_k)}{(1-\sigma_Q)}\left\{\frac{\mu_1}{\mu_0} + \frac{(1-\sigma_E)\tau_2^{*2}}{(1+\sigma)^2} - \frac{\tau_2^*}{(1-\sigma_Q)(1-q_0)}\right\}\exp\frac{-(1-\sigma_E)\tau_2^*}{1+\sigma} \tag{6.8}$$

Решение уравнения (6.8), удовлетворяющее условию $q_1(0) = 0$, имеет вид

$$q_1(\tau_2^*) = \frac{\mu_1(1-\sigma_k)(1-\sigma_E)}{(1-\sigma_Q)(1+\sigma)}\left[1 - \exp\frac{-(1-\sigma_E)\tau_2^*}{1+\sigma}\right] - \frac{(1+\sigma)}{(1-\sigma_Q)(1-\sigma_E)}J\left[\frac{(1-\sigma_E)\tau_2^*}{1+\sigma}\right] + \frac{2}{1-\sigma_E} - \left[\frac{2}{1-\sigma_E} + \frac{2\tau_2^*}{1+\sigma} + \frac{(1-\sigma_E)\tau_2^{*2}}{(1+\sigma)^2}\right]\exp\frac{-(1-\sigma_E)\tau_2^*}{1+\sigma} \tag{6.9}$$

Здесь функция J определена так же, как в (4.17).

Из условия (6.6) найдем

$$\mu_1 = \frac{(1-\sigma_k)(1+\sigma)}{(1-\sigma_Q)(1-\sigma_E)^2}\left[\frac{(1+\sigma)}{(1-\sigma_Q)}\frac{\pi^2}{6} - 2\right] \tag{6.10}$$

Формулы (6.7), (6.9), (6.10) дают приближенные выражения для собственного значения μ функции q. Однако, для того чтобы они могли рассматриваться как приближенное решение задачи (1.8)—(1.11), необходимо еще определить приближенное выражение для функции $r(\tau)$, согласующееся со всеми введенными при определении μ и q предположениями. Предполагалось, в частности, что в окрестности $\tau = 1$ функция $r(\tau)$ равна единице с точностью до малых экспоненциальных членов. Приняв во внимание явный вид μ, из уравнения (1.8) можно заключить, что областью существенного изменения r является малая окрестность точки $\tau = \tau_1^\circ = \sigma_E(1+\sigma)(1-\sigma_E)^{-1} - \sigma$. В этой области введем вместо τ переменную $\tau_1^* = \beta(\tau_1^0 - \tau)$ и будем искать решения в виде внутренних разложений

$$r(\tau_1^*) = f_0^{(1)}(\beta)\, r_0(\tau_1^*) + f_1^{(1)}(\beta)\, r_1(\tau_1^*)$$

$$q(\tau_1)^* = n_0^{(1)}(\beta)\, q_0(\tau_1^*) + n_1^{(1)}(\beta)\, q_1(\tau_1^*) \tag{6.11}$$

Точка $\tau = \tau_1^0$ является внутренней точкой интервала, поэтому граничные условия, которым должны удовлетворять функции (6.11), представляют собой условия сращивания внутренних разложений (6.11) с решениями уравнений (1.8), (1.9) во внешних областях. Можно убедиться, что во внешних областях при $\beta \to \infty$ функция $q(\tau)$ экспоненциально близка к нулю, а функция $r(\tau)$ — к единице ($\tau > \tau_1{}^\circ$) и нулю ($\tau < \tau_1{}^\circ$), поэтому условия сращивания принимают вид

$$r_0(\tau_1{}^*) \to 0, \quad r_1(\tau_1{}^*) \to 0, \quad q_0(\tau_1{}^*) \to 0, \quad q_1(\tau_1{}^*) \to 0 \text{ при } \tau_1{}^* \to \infty \qquad (6.12)$$

$$r_0(\tau_1{}^*) \to 1, r_1(\tau_1{}^*) \to 0, q_0(\tau_1{}^*) \to 0, \quad q_1(\tau_1{}^*) \to 0 \text{ при } \tau_1{}^* \to -\infty \qquad (6.13)$$

Подставляя (6.11) в записанные в переменной $\tau_1{}^*$ уравнения (1.8), (1.9), после оценки величин с учетом явного вида μ можно получить, что

$$q_0(\tau_1{}^*) = q_1(\tau_1{}^*) = 0, \qquad f_0{}^{(1)}(\beta) = 1, \qquad f_1{}^{(1)}(\beta) = \beta^{-1} \qquad (6.14)$$

При этом уравнение для $r_0(\tau_1{}^*)$ может быть записано в виде

$$-\frac{(1-\sigma_E)(1-\sigma_Q)}{\sigma_k(1-\sigma_k)(1+\sigma)}\frac{dr_0}{d\tau_1{}^*} = \frac{1-r_0}{\tau_1{}^\circ - \sigma_Q r_0}\exp\frac{-\sigma_E(1+\sigma)\tau_1{}^*}{(\tau_1{}^\circ+\sigma)^2} \qquad (6.15)$$

Из (6.15), (6.12) найдем неявное выражение для $r_0(\tau_1{}^*)$

$$(\sigma_Q - \tau_1{}^\circ)\ln(1-r_0) + \sigma_Q r_0 = \frac{\sigma_k(1-\sigma_k)(\tau_1{}^\circ+\sigma)^2}{(1-\sigma_Q)(1-\sigma_E)\sigma_E}\exp\frac{-\sigma_E(1+\sigma)\tau_1{}^*}{(\tau_1{}^\circ+\sigma)^2} \qquad (6.16)$$

Функция $r_0(\tau_1{}^*)$, определяемая соотношением (6.16), удовлетворяет условию сращивания (6.13), если только

$$\tau_1{}^\circ > \sigma_Q \text{ или } \sigma_E > (\sigma_Q + \text{o})(1 + \sigma_Q + 2\sigma)^{-1} \qquad (6.17)$$

Неравенство (6.17) ограничивает снизу область значений σ_E, при которых структура волны двухстадийного превращения описывается построенным в этом разделе решением, т. е. состоит из двух обособленных зон, в каждой из которых в основном протекает одна из двух последовательных реакций.

Отметим, что определение функции $r_1(\tau_1{}^*)$ в данном случае сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, не имеющего аналитического решения, и может быть произведено путем несложного численного интегрирования.

7. Решение при $0 < \sigma_E < (\sigma_Q + \sigma)(1 + \sigma_Q + 2\sigma)^{-1}$. Рассмотрение различных вариантов асимптотического поведения решения задачи (1.8)—(1.11) в указанном диапазоне изменения σ_E приводит к выводу о том, что областью основного изменения r от 0 до 1, как в п. 6, оказывается малая окрестность внутренней точки $\tau = \tau_1{}^\circ$, вне которой функция r отличается от 0 и 1 малыми экпоненциальными членами (при $\tau < \tau_1{}^\circ$ и $\tau > \tau_1{}^\circ$ соответственно). Однако теперь положение точки $\tau_1{}^\circ$ не будет зависеть от σ_E и определяется равенством $\tau_1{}^\circ = \sigma_Q$.

Поведение функции q будет существенно иным, чем в п. 6. При $\tau < \sigma_Q$ функция q отличается от нуля малыми экспоненциальными членами (при $\tau > \sigma_Q$ поведение q с точностью до малых экспоненциальных членов описывается линейной функцией $(\tau - \sigma_Q)(1 - \sigma_Q)^{-1}$.

Рассмотрим решения уравнений (1.8), (1.9) в окрестности точки $\tau = \tau_1{}^\circ = \sigma_Q$. Введем переменную $\tau_1{}^* = \beta(\sigma_Q - \tau)$ и будем строить решения в виде разложений

$$\begin{aligned} r(\tau_1{}^*) &= f_0{}^{(1)}(\beta)\, r_0(\tau_1{}^*) + f_1{}^{(1)}(\beta)\, r_1(\tau_1{}^*) \\ q(\tau_1{}^*) &= n_0{}^{(1)}(\beta) q_0(\tau_1{}^*) + n_1{}^{(1)}(\beta)\, q_1(\tau_1{}^*) \\ \mu &= \varphi_0(\beta)\mu_0 + \varphi_1(\beta)\mu_1 \end{aligned} \qquad (7.1)$$

Прежде чем записать уравнения для членов минимального порядка, обратим внимание на следующие обстоятельства. Из предположения о том, что основное изменение r от 0 до 1 сосредоточено вблизи $\tau = \sigma_Q$ следует, что в (7.1) $f_0^{(1)}(\beta) = 1$. В окрестности точки $\tau = \sigma_Q$, где $r \sim 1$, разложение функции $q(\tau_1^*)$ не может начинаться с члена порядка единицы, так как в противном случае будет нарушено условие $\tau \geqslant \sigma_Q r + (1 - \sigma_Q) q$. Следовательно, если $n_0^{(1)}(\beta) = 1$, то $q_0(\tau_1^*) = 0$. Еще одно обстоятельство связано с тем, что точка $(\sigma_Q, 1, 0)$ является особой точкой уравнения (1.8) (см. п. 2). Решение уравнения (1.8) около точки $\tau = \sigma_Q$, где по предположению функция $q(\tau)$ по порядку величины меньше функции $r(\tau)$, должно быть близким к сепаратрисам, одна из которых описывается уравнениями $r = 1$, $q = 0$.

Из уравнения (1.8) видно, что если в окрестности $\tau_1^0 = \sigma_Q$ функция $q(\tau)$ существенно меньше функции $r(\tau)$, так что можно положить $q(\tau) = 0$, то при переходе к переменной $\tau_1^* = \beta(\sigma_Q - \tau)$ характер решения сильно изменяется, так как решение $r(\tau) = 1$ утрачивается. Поэтому при отыскании функции $r(\tau_1^*)$ в качестве решения в области $\tau > \sigma_Q$ следует принять

$$r_0(\tau_1^*) = 1, \qquad r_1(\tau_1^*) = 0, \qquad \tau_1^* < 0 \tag{7.2}$$

С учетом сделанных замечаний для функции $r_0(\tau_1^*)$ при $\tau_1^* < 0$ придем к уравнению

$$-\mu_0\varphi_0(\beta)\beta\frac{dr_0}{d\tau_1^*} = \frac{\sigma_k}{\sigma_Q}\exp\left[-\frac{\beta\sigma_E(1+\sigma)}{\sigma_Q+\sigma} - \frac{\sigma_E(1+\sigma)\tau_1^*}{(\sigma_Q+\sigma)^2}\right] \tag{7.3}$$

Видно, что необходимо принять

$$\varphi_0(\beta) = \beta^{-1}\exp\frac{-\sigma_E(1+\sigma)\beta}{\sigma_Q+\sigma} \tag{7.4}$$

С учетом (7.4) решение уравнения (7.3), удовлетворяющее условию сращивания с решением во внешней области ($r_0(\tau_1^*) \to 0$ $\tau_1^* \to \infty$), получим в виде

$$r_0(\tau_1^*) = \frac{\sigma_k}{\mu_0\sigma_Q}\frac{(\sigma_Q+\sigma)^2}{\sigma_E(1+\sigma)}\exp\frac{-\sigma_E(1+\sigma)\tau_1^*}{(\sigma_Q+\sigma)} \tag{7.5}$$

Константа μ_0 в (7.5) определяется из требования непрерывности функции $r_0(\tau_1^*)$ в точке $\tau = \sigma_Q$; имеем

$$\mu_0 = \frac{\sigma_k}{\sigma_Q}\frac{(\sigma_Q+\sigma)^2}{\sigma_E(1+\sigma)}, \qquad r_0(\tau_1^*) = \exp\frac{-\sigma_E(1+\sigma)\tau_1^*}{\sigma_Q+\sigma} \tag{7.6}$$

После подстановки (7.1) в (1.9), учитывая полученные выше результаты; можно установить, что уравнение для $q_1(\tau_1^*)$ приобретает форму

$$-\mu_0 n_1^{(1)}\frac{dq_1}{d\tau_1^*} = \frac{(1-\sigma_k)(r_0 - n_1^{(1)}q_1)}{\sigma_Q(1-r_0) - \beta^{-1}\tau_1^* - (1-\sigma_Q)n_1^{(1)}q_1}\exp\left[\delta_q - \frac{\sigma_E(1+\sigma)\tau_1^*}{(\sigma_Q+\sigma)^2}\right],$$

$$\delta_q = \frac{-(1-2\sigma_E)(1+\sigma)}{\sigma_Q+\sigma} < 0 \tag{7.7}$$

При определении функции $q(\tau_1^*)$ необходимо учитывать, что функция $r_0(\tau_1^*)$ имеет различный вид в областях $\tau > \sigma_Q$ и $\tau < \sigma_Q$. Тогда из (7.7) можно видеть, что при $\tau < \sigma_Q$, когда функция $r_0(\tau_1^*)$ определяется по (7.6), следует положить $q_1(\tau_1^*) = 0$, или же выбрать $n_1^{(1)}(\beta)$ в виде экспоненциальной, а не степенной функции β^{-1}.

В области $\tau > \sigma_Q$, где $r_0(\tau_1^*) = 1$, функция $q_1(\tau_1^*)$, удовлетворяющая условию $q_1(0) = 0$, может быть найдена, если положить $n_1^{(1)}(\beta) = \beta^{-1}$. Получим

$$q_1(\tau_1^*) = -(1 - \sigma_Q)^{-1} \tau_1^* + O(\exp \delta_q) \tag{7.8}$$

Найденные решения должны быть сопряжены с решениями в окрестности горячей границы $\tau = 1$.

Введем в (1.8), (1.9) вместо τ переменную $\tau^* = \beta(1 - \tau)$ и будем искать функции $r(\tau^*)$, $q(\tau^*)$ в виде разложений

$$r(\tau^*) = f_0(\beta) r_0(\tau^*) + f_1(\beta) r_1(\tau^*)$$

$$q(\tau^*) = n_0(\beta) q_0(\tau^*) + n_1(\beta) q_1(\tau^*) \tag{7.9}$$

Анализируя возможные варианты асимптотического поведения функций r и q с учетом (7.4) и граничного условия (1.11), можно прийти к выводу, что в разложении (7.9) следует положить $n_0(\beta) = 1$, $f_0(\beta) = 1$. Кроме того, $r_0(\tau^*) = 1$, $r_1(\tau^*) = 0$, так как отличие $r(\tau^*)$ от единицы может быть выражено лишь слагаемыми гораздо более высокого порядка малости, чем степени β^{-1}.

Уравнению для $q(\tau^*)$ можно удовлетворить, полагая $n_1(\beta) = \beta^{-1}$. Тогда

$$q(\tau_1^*) = 1 - \frac{1}{\beta} \frac{\tau^*}{1 - \sigma_Q} + O\left(\exp\left[\frac{\sigma_E(1 + \sigma_Q + 2\sigma)}{\sigma_Q + \sigma} - 1\right]\beta\right) \tag{7.10}$$

Функция (7.10) удовлетворяет граничному условию на горячей границе. Переходя в (7.10) от переменной τ^* к τ_1^*, убеждаемся, что двучленное решение (7.10) сращивается с одночленным решением (7.8).

Полученные соотношения исчерпывают построение приближенного асимптотического решения задачи, позволяющего определить нулевой член в разложении собственного значения.

Перейдя в (7.6) к размерным переменным, запишем явное нулевое приближение выражения для массовой скорости волны экзотермического превращения. В рассматриваемом предельном случае

$$m^2 = \lambda \rho k_1 \frac{RT_+^{(1)}}{E_1} \frac{T_+^{(1)}}{Q_1} \exp \frac{-E_1}{RT_+^{(1)}}, \qquad T_+^{(1)} \equiv T_- + c^{-1} Q_1 \tag{7.11}$$

Видно, что скорость горения зависит от кинетических характеристик и адиабатической температуры первой стадии. При этом нулевое приближение (7.11) совпадает с формулой для скорости распространения одностадийной реакции с кинетическими характеристиками k_1, E_1 и температурой горения $T_+^{(1)}$, полученной методом Зельдовича — Франк-Каменецкого [1].

Можно определить также следующий член в разложении собственного значения μ. Для этого достаточно рассмотреть уравнение для r_1, (τ_1^*) вблизи $\tau = \sigma_Q$ при $\tau < \sigma_Q$. Можно получить

$$\mu_0 \frac{dr_1}{d\tau_1^*} = \frac{\sigma_k}{\sigma_Q}\left[\frac{\mu_1}{\mu_0} + \frac{\sigma_E(1 + \sigma)\tau_1^{*2}}{(\sigma + \sigma_Q)^3} - \frac{\tau_1^*}{\sigma_Q(1 - r_0)}\right] \times$$
$$\times \exp \frac{-\sigma_E(1 + \sigma)\tau_1^*}{(\sigma + \sigma_Q)^2}, \qquad r_1(0) = 0 \tag{7.12}$$

Интегрируя (7.12), найдем

$$r_1(\tau_1^*) = \frac{\mu_1 \sigma_Q \sigma_E (1+\sigma)}{\sigma_k (\sigma+\sigma_Q)^2} \left[1 - \exp \frac{-\sigma_E (1+\sigma)\tau_1^*}{(\sigma+\sigma_Q)^2}\right] + \frac{2(\sigma+\sigma_Q)}{\sigma_E(1+\sigma)} - \tag{7.13}$$
$$- \left[\frac{\sigma_E (1+\sigma)\tau_1^{*2}}{(\sigma+\sigma_Q)^3} + \frac{2\tau_1^*}{(\sigma+\sigma_Q)} + \frac{2(\sigma+\sigma_Q)}{\sigma_E(1+\sigma)}\right] - \frac{(\sigma+\sigma_Q)^2}{\sigma_E \sigma_Q (1+\sigma)} J \left[\frac{\sigma_E (1+\sigma)\tau_1^*}{(\sigma+\sigma_Q)^2}\right].$$

Из условия сращивания $r_1 \to 0$, $\tau_1^* \to \infty$ получим

$$\mu_1 = \frac{\sigma_k}{\sigma_Q} \frac{(\sigma+\sigma_Q)^4}{\sigma_E^2 (1+\sigma)^2} \left[\frac{\pi^2}{6\sigma_Q} - \frac{2}{\sigma+\sigma_Q}\right] \tag{7.14}$$

8. Обсуждение результатов. Установленные в п. 4—7 аналитические соотношения позволяют по заданным физико-химическим характеристикам конденсированной системы провести классификацию режимов горения, приближенно рассчитать скорость распространения фронта горения и исследовать профили концентраций и температуры. Ввиду отсутствия точного численного решения рассмотренной задачи сопоставим полученные результаты с данными работы [5], в которой выполнены детальные численные расчеты распространения волны горения в газе, обусловленной протеканием двухстадийной последовательной экзотермической реакции.

Несмотря на различие распространения пламени в газе и горения безгазовой конденсированной системы, нетрудно заметить аналогию между режимами, выделенными в [5] путем анализа результатов численного расчета и различными асимптотическими решениями, построенными в данной работе.

Воспользовавшись введенной в [6] удачной терминологией, следует называть режим, которому соответствуют решения п. 4, слиянием, режим п. 6 — управлением и режим п. 7 — отрывом. Режим, изученный в п. 5 естественно назвать неполным слиянием. В режиме слияния, $E_1 > E_2$, скорость горения в основном определяется кинетикой первой из реакций и адиабатической температурой полного превращения. В режиме управления $E_2 > E_1$, $E_1/T_+^{(1)} < E_2/T_+$, скорость горения определяется в основном кинетикой второй реакции и адиабатической температурой полного превращения, в режиме отрыва $E_2 > E_1$, $E_1/T_+^{(1)} > E_2/T_+$, скорость горения определяется характеристиками и адиабатической температурой первой стадии, вторая реакция протекает в индукционном режиме.

Поступила 5 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. Теория теплового распространения пламени. Ж. физ. химии, 1938, т. 12, вып. 1.
2. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. К теории горения конденсированных систем. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 6.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
4. Берман В. С., Рязанцев Ю. С. Применение метода сращиваемых асимптотических разложений к расчету стационарного теплового распространения фронта экзотермической реакции в конденсированной среде. ПМТФ, 1972, № 5.
5. Хайкин Б. И., Филоненко А. К., Худяев С. И. Распространение пламени при протекании в газе двух последовательных реакций. Физика горения и взрыва, 1968, т. 4, № 4, стр. 591—594.
6. Мержанов А. Г., Руманов Э. И., Хайкин Б. И. Многозонное горение конденсированных систем. ПМТФ, 1972, № 6.