Эту систему можно также получить из вариационного принципа, приведенного в работе [2]. Преобразованный к переменным x_1, x_2, μ, он принимает вид

$$\delta M = 0,$$

где

(21)
$$M = \int_t \int_{x_1} \int_{x_2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} L \frac{\partial x_3}{\partial \mu} d\mu dx_1 dx_2 dt;$$

$$L = \frac{\partial}{\partial t}(\gamma + \eta) - v_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{1}{2} v_i^2 \quad (i = 1, 2, 3);$$

v_i определены соотношениями (8). Варьируя функционал (21) по γ, η, x_3, получаем соответственно уравнения (13), (14), (15). При этом на граничных поверхностях $\mu = \mu_1$, $\mu = \mu_2$ естественные граничные условия определяются следующим образом:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\gamma + \eta) + \frac{1}{2}(v_i^2 - v_3^2) + v_3 v_i \frac{\partial x_3}{\partial x_i}\right] \delta x_3 = 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$\left(\frac{\partial x_3}{\partial t} + v_i \frac{\partial x_3}{\partial x_i} - v_3\right) \delta\gamma = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Условия (17) — (20) являются, как видно, частным случаем этих условий.

Авторы выражают благодарность В. В. Пухначеву за полезное обсуждение затронутой проблемы.

Поступила 22 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Richtmyer R. D., Morton K. W.** Difference methods for initial - value problems. N. Y., John Wiley & Sons, 1967. Рус. пер. **Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач. М., Мир, 1972.
2. **Seliger R. L., Whitham G. B.** Variational principles in continuum mechanics.— Proc. Roy. Soc., ser. A, 1968, vol. 305, p. 1—25. Рус. пер. Сб. Механика, 1969, № 5 (117).
3. **Serrin J.** Mathematical principles of classical fluid mechanics.— In: Handb. Phys., 1959, vol. 8/1. Рус. пер. **Серрин Дж.** Математические основы классической механики жидкости. М., ИЛ, 1963.
4. **Марчук Г. И.** Численные методы в прогнозе погоды. Л., Гидрометеоиздат, 1967.
5. **Яненко Н. Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Наука, 1967.

УДК 532.526

ОБ АСИМПТОТИКЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ПРИ ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТИ

В. А. Батищев

(*Ростов-на-Дону*)

Для уравнений Навье — Стокса при исчезающей вязкости рассматривается плоская нелинейная задача о движении несжимаемой жидкости в области D, ограниченной свободной поверхностью Γ и непроницаемой стенкой S, под действием заданных начальных возмущений:

(1)
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0;$$

(2)
$$\mathbf{v}|_S = 0;$$

$$p - 2\varepsilon^2 \frac{\partial v_n}{\partial n} = p_*, \quad (x, y) \in \Gamma; \tag{3}$$

$$-4n_x n_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + (n_x^2 - n_y^2)\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = T, \quad (x, y) \in \Gamma; \tag{4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0, \quad (x, y) \in \Gamma; \tag{5}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_*(x, y) \ (t = 0). \tag{6}$$

Все величины, входящие в (1) — (6), безразмерны. Здесь $\varepsilon^2 = 1/\mathrm{Re}$ — малый параметр; Re — число Рейнольдса; $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ — единичный вектор внутренней нормали к свободной границе Г; $F(x, y, t) = 0$ — уравнение Г в неявной форме. Жидкость приводится в движение начальным полем скоростей, начальным возвышением свободной границы и внешним поверхностным напряжением (p_*, T). Касательное напряжение на Г предполагается малым порядка $O(\varepsilon^2)$. Исследование задачи проводится при условии, что твердая стенка и свободная граница не имеют точек контакта.

При исчезающей вязкости $\varepsilon \to 0$ вблизи границ области формируются пограничные слои, имеющие различную природу. Именно вблизи твердой стенки возникает слой бесконечно большой завихренности порядка $O(1/\varepsilon)$, а в окрестности свободной поверхности порождается конечная завихренность. Уравнения пограничного слоя нелинейны в первом случае и линейны — во втором. Во внешней области (вне пограничных слоев) течение приближенно описывается уравнениями Эйлера.

Асимптотические разложения решения задачи (1) — (6) при малой вязкости $\varepsilon \to 0$ строятся в виде

$$\mathbf{v} \sim \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \mathbf{v}_k(x, y, t) + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \mathbf{w}_k(x, y, t; \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \mathbf{h}_k(x, y, t; \varepsilon), \tag{7}$$

$$p \sim \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k p_k(x, y, t) + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k r_k(x, y, t; \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k q_k(x, y, t; \varepsilon),$$

$$\zeta \sim \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \zeta_k(x, t)$$

($\zeta(x, t)$ — возвышение свободной границы). Обозначим через D_S и D_Γ области пограничных слоев соответственно вблизи твердой границы S и свободной поверхности Г. Тогда $\mathbf{w}_k$, r_k — функции типа решений задачи пограничного слоя в D_S, а $\mathbf{h}_k$, q_k — в D_Γ.

Главные члены асимптотики $\mathbf{v}_0$, p_0, ζ_0 находятся из решения задачи о течении идеальной несжимаемой жидкости в области D_0, ограниченной стенкой S и свободной границей Γ_0, под действием заданных начальных возмущений (6)

$$\partial \mathbf{v}_0/\partial t + (\mathbf{v}_0, \nabla)\mathbf{v}_0 = -\nabla p_0 + \mathbf{g}, \ \mathrm{div}\, \mathbf{v}_0 = 0, \tag{8}$$

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|_S = 0, \ \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_*, \ \zeta_0 = \zeta_* \ (t = 0).$$

$$p_0 = p_*, \ \partial\zeta_0/\partial t + v_{x0}\partial\zeta_0/\partial x = v_{y0}, \ (x, y) \in \Gamma_0.$$

Функции $\mathbf{v}_k$, p_k в разложении (7), определяющие течение в области D, находятся в результате первого итерационного процесса [1] и удовлетворяют линейным системам

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} + \sum_{i+j=k} (\mathbf{v}_i, \nabla)\mathbf{v}_j = -\nabla p_k + \Delta \mathbf{v}_{k-2}, \ \mathrm{div}\, \mathbf{v}_k = 0, \tag{9}$$

$$\mathbf{v}_k|_{t=0} = 0,\ (\mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k)\cdot\mathbf{n}|_S = 0,\quad \mathbf{v}_{-1} = 0\quad (k \geqslant 1),$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к S. Краевые условия на свободной границе для системы (9) будут даны ниже.

Функции пограничного слоя $\mathbf{w}_k$, r_k проявляют себя в области D_S окрестности границы S и компенсируют невязки при выполнении условий прилипания (2). Для упрощения записи предполагается, что граница S прямолинейна и описывается уравнением $y = 0$. Определим уравнения, которым удовлетворяют функции $\mathbf{w}_k$, r_k.

Пусть w_{xk}, w_{yk}, v_{xk}, v_{yk} — соответственно проекции векторов $\mathbf{w}_k$, $\mathbf{v}_k$ на оси O_x и O_y. Подставляем разложения (7) в (1), разлагаем известные коэффициенты в ряды Тэйлора по степеням y, учитываем уравнения (8), (9) и полагаем $\mathbf{h}_k = q_k = 0$ в D_S с точностью до малых высшего порядка. Вводим преобразование растяжения $y = \varepsilon s$. Последовательно, приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^N$, получаем уравнения для определения $\mathbf{w}_k$, r_k. В частности, $h_{y0} = r_0 = r_1 = 0$. Полагая $W_1 = w_{y1} + v_{y1}|_{y=0}$, для w_{x0}, W_1 выводим систему нелинейных уравнений

$$\frac{\partial w_{x0}}{\partial t} + w_{x0}\frac{\partial w_{x0}}{\partial x} + W_1\frac{\partial w_{x0}}{\partial s} + sa\frac{\partial w_{x0}}{\partial s} + b\frac{\partial w_{x0}}{\partial x} - aw_{x0} = \frac{\partial^2 w_{x0}}{\partial s^2}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial w_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial W_1}{\partial s} = 0$$

с начальными и краевыми условиями

$$w_{x0} = W_1 = 0 (t = 0),\ w_{x0} = 0\ (s = \infty),$$
$$w_{x0} = -b(x, t),\ W_1 = 0\ (s = 0).$$

Здесь коэффициенты $a(x, t)$, $b(x, t)$ известны, если определено соответствующее течение идеальной жидкости (8),

$$a(x, t) = \partial v_{y0}/\partial y|_{y=0},\ b(x, t) = v_{x0}|_{y=0}.$$

Заметим, что система (10) приводится к уравнениям пограничного слоя Прандтля [2] относительно u_x, u_y в результате замены

$$u_x = w_{x0} + b,\ u_y = w_{y1} + sa + v_{y1}|_{s=0}.$$

Функция r_2 определяется из соотношения

$$r_2 = \int\limits_{\infty}^{s}\left[\frac{\partial^2 w_{y1}}{\partial s^2} - \frac{\partial w_{y1}}{\partial t} - w_{x0}\frac{\partial w_{y1}}{\partial x} - (W_1 + sa)\frac{\partial w_{y1}}{\partial s} - \right.$$
$$\left. - b\frac{\partial w_{y1}}{\partial s} - aw_{y1} - \left(\frac{\partial v_{y1}}{\partial x}\bigg|_{y=0} + s\frac{\partial a}{\partial x}\right)w_{x0}\right]ds.$$

Высшие приближения $\mathbf{w}_m$, r_m удовлетворяют линейным уравнениям и определяются после решения задачи (9) при $k = m$. Выпишем уравнения в первом приближении

$$\frac{\partial w_{x1}}{\partial t} + W_1\frac{\partial w_{x1}}{\partial s} + w_{x0}\frac{\partial w_{x1}}{\partial x} + sa\frac{\partial w_{x1}}{\partial s} + b\frac{\partial w_{x1}}{\partial x} - aw_{x1} + w_{x1}\frac{\partial w_{x0}}{\partial x} +$$
$$+ W_2\frac{\partial w_{x0}}{\partial s} = \frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial s^2} - \left[v_{x1} + s\frac{\partial v_{x0}}{\partial y}\right]_{y=0}\frac{\partial w_{x0}}{\partial x} - \left[\frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + s\frac{\partial^2 v_{x0}}{\partial x\partial y}\right]_{y=0} w_{x0} -$$
$$- \frac{\partial v_{x0}}{\partial y}\bigg|_{y=0} w_{y1} - \left[s\frac{\partial v_{y1}}{\partial y} + \frac{s^2}{2}\frac{\partial^2 v_{y0}}{\partial y^2}\right]_{y=0}\frac{\partial w_{x0}}{\partial s},\quad \frac{\partial w_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial s} = 0$$

при соответствующих краевых и начальных условиях

$$w_{x1} = 0 \ (s = \infty), \ w_{x1} + v_{x1} = 0, \ W_2 = 0 \ (s = 0),$$
$$w_{x1} = W_2 = 0 \ (t = 0),$$

где $W_2 = w_{y2} + v_{y2}|_{y=0}$.

Теперь определим функции пограничного слоя $\mathbf{h}_k$, q_k, которые сосредоточены в окрестности свободной границы и компенсируют невязки, возникающие при выполнении динамического условия для касательного напряжения на Г. Построение $\mathbf{h}_k$, q_k проведено в работе [3]. Вблизи Г вводятся подвижные локальные координаты ρ, φ по формулам

$$x = X(t, \varphi) + \rho n_{x0}, \ y = Y(t, \varphi) + \rho n_{y0},$$

где ρ — расстояние точки (x, y) до Γ_0 — свободной поверхности невязкого течения (8); $n_{x0}(t, \varphi)$, $n_{y0}(t, \varphi)$ — компоненты единичного вектора нормали к Γ_0; $x = X(t, \varphi)$, $y = Y(t, \varphi)$ — параметрическое уравнение контура Γ_0. Подставляем (7) в (1) и полученные уравнения записываем в локальных координатах. Разлагаем известные коэффициенты в ряды Тэйлора по степеням ρ, учитываем справедливое при $\rho = 0$ соотношение $\partial\rho/\partial t + \mathbf{v}_0\cdot\nabla\rho = 0$ и полагаем $\rho = \varepsilon\xi$. С точностью до малых высшего порядка полагаем $\mathbf{w}_k = r_k = 0$ в D_Γ. Приравнивая нулю коэффициенты при ε^k, для $\mathbf{h}_k (k \geqslant 1)$ получаем системы линейных уравнений

$$(11) \qquad \frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial t} + \xi a_1(t, \varphi)\frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial \xi} + b_1(t, \varphi)\frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial \varphi} - a_1 h_{\varphi k} = \frac{\partial^2 h_{\varphi k}}{\partial \xi^2} + F_k,$$
$$\frac{\partial h_{\rho k}}{\partial \xi} - \varkappa\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi h_{\rho, k-1}) + \delta^{-1}\frac{\partial h_{\varphi, k-1}}{\partial \varphi} = 0,$$
$$\frac{\partial q_k}{\partial \xi} = -2\left[\varkappa v_{\varphi 0} + \delta^{-1}\frac{\partial v_{\rho 0}}{\partial \varphi}\right]_{\rho=0} h_{\varphi, k-1} + D_k$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial \xi} = -\left[\delta^{-1}\frac{\partial v_{\rho, k-1}}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_{\varphi, k-1}}{\partial \rho} + \varkappa v_{\varphi, k-1}\right]_{\rho=0} + M_k \quad (\xi = 0),$$
$$\mathbf{h}_k = q_k = 0 \quad (\xi = \infty), \quad \mathbf{h}_k = 0 \quad (t = 0).$$

Коэффициенты F_k, D_k, M_k известны и не выписаны ввиду их громоздкости, а $F_1 = D_1 = M_1 = D_2 = 0$. Здесь

$$a_1(t, \varphi) = \frac{\partial}{\partial \rho}[\rho_t + \mathbf{v}_0\cdot\nabla\rho]_{\rho=0}, \quad b_1(t, \varphi) = [\varphi_t + \mathbf{v}_0\cdot\nabla\varphi]_{\rho=0},$$

$\varkappa$ и δ — кривизна и коэффициент Ламэ контура Γ_0. Заметим [3], что $\mathbf{h}_0 = \mathrm{h}_{\rho 1} = q_0 = q_1 = 0$. Так же, как и в [3], решение системы (11) находится в квадратурах.

Функции ζ_k, определяющие асимптотическую форму свободной границы, находятся совместно с v_k при решении задач (9). Краевые условия на границе Г для системы (9) получаются применением первого и второго итерационных процессов [1] одновременно к условию (3) и в локальных координатах имеют вид

$$(12) \qquad p_k + r_k + \zeta_k\frac{\partial p_0}{\partial \rho} - 2\frac{\partial v_{\rho, k-2}}{\partial \rho} + Q_k = 0 \quad (\rho = 0),$$

где $k \geqslant 1$; $\mathbf{v}_{-1} = 0$; $Q_1 = 0$.

Полагая в (5) $F = -\rho + \zeta(t, \varphi)$ и используя те же рассуждения, что и при выводе (12), получим уравнения для определения ζ_k

$$(13)\qquad \frac{\partial\zeta_k}{\partial t}+b_1(t,\varphi)\frac{\partial\zeta_k}{\partial\varphi}-a_1(t,\varphi)\zeta_k=[v_{\rho k}+h_{\rho k}]_{\rho=0}+E_k,$$

$$\zeta_k=0(t=0),\ E_1=0.$$

Заметим, что $\zeta_0=0$, так как $\rho=0$ есть уравнение границы Γ_0.

Теперь выпишем задачу определения внешнего течения в D в первом приближении. Функции $\mathbf{v}_1$, p_1 совместно с ζ_1 удовлетворяют системе (9), (13) при $k=1$. Краевое условие при $y=0$ получаем, полагая $s=\infty$ в соотношении $W_1=w_{y1}+v_{y1}|_{y=0}$ и учитывая, что w_{y1} — функция типа пограничного слоя, т. е. $w_{y1}=0$ ($s=\infty$). Итак, $v_{y1}|_{y=0}=W_1|_{s=\infty}$. Краевое условие на Г следует из (12) при $k=1$. Предположим, что течение идеальной жидкости (8) потенциально, т. е. $\mathbf{v}_0=\nabla\Phi_0$, тогда вектор $\mathbf{v}_1$ также потенциален ($\mathbf{v}_1=\nabla\Phi_1$), а из (9) выводим интеграл

$$(14)\qquad p_1+\partial\Phi_1/\partial t+\nabla\Phi_0\nabla\Phi_1=0.$$

Исключая p_1 из (12), (14) и полагая $k=1$ в (13), получаем задачу определения внешнего течения в D в первом приближении

$$(15)\qquad \Delta\Phi_1=0,$$

$$\partial\zeta_1/\partial t+\partial_1\partial\zeta_1/\partial\varphi-a_1\zeta_1=v_{\rho 1}\ (\rho=0),$$

$$\partial\Phi_1/\partial t+\nabla\Phi_0\nabla\Phi_1-\zeta_1\partial p_0/\partial\rho=0\ (\rho=0),$$

$$\partial\Phi_1/\partial y\,|_{y=0}=W_1|_{s=\infty},\ \nabla\Phi_1=\zeta_1=0(t=0).$$

Итак, при асимптотическом интегрировании системы (1) — (6) сначала решается задача о течении идеальной жидкости (8), затем определяется течение в пограничном слое вблизи твердой стенки (10) и первое приближение внешнего течения (15), а затем течение в пограничном слое вблизи свободной границы. Далее, в той же последовательности определяются высшие приближения.

Пример. Рассмотрим влияние малой вязкости на неустановившееся течение в круговом цилиндре несжимаемой жидкости. Область D_0, заполненная идеальной жидкостью, представляет собой цилиндр $-H(t)\leqslant z\leqslant H(t)$, $r\leqslant R(t)$. Здесь (r,θ,z) — цилиндрические координаты. Боковая граница $\Gamma_0(r=R/t)$ свободна, на Γ_0 давление терпит разрыв ($p-p_0=\sigma/R$, σ — коэффициент поверхностного натяжения). Непроницаемые стенки $z=\pm H(t)$ движутся навстречу друг другу с постоянной скоростью V. Решение уравнений Эйлера без учета сил тяжести имеет вид [4]

$$v_{r0}=\tau r,\ v_{z0}=-2\tau z,\ v_{\theta 0}=0,\ p_0=0{,}5(\tau^2+\tau_t)(R^2-r^2)+\sigma/R,$$

$$\tau(t)=(\lambda/2)(1-\lambda t)^{-1/2},\ H(t)=h(1-\lambda t),\ R=$$

$$=R_0(1-\lambda t)^{-1/2},\ \lambda=-V/h=\mathrm{const}.$$

Свободная граница Γ_0 при $t=0$ есть круглый цилиндр, с ростом t цилиндр сплющивается к плоскости $z=0$.

Учет вязкости приводит к разложениям (7) всюду, кроме малой окрестности линии контакта свободной границы и стенок S. Асимптотика течения в окрестности линии контакта построена в работе [5]. Главный член разложения (7) $\mathbf{w}_0$ удовлетворяет уравнениям вида (10) в цилиндрических координатах. Введем функцию $\psi(s,t)$ по формуле $w_{r0}=r\partial\psi/\partial s$, $w_{z1}=2\psi-v_{z1}|_{z=H}$, тогда в окрестности стенки $z=H$ уравнение (10) автомодельно и имеет вид

$$(16)\qquad \Phi'''+4\Phi\Phi''-2\Phi'^2-8\Phi'+2s\Phi''=0,$$

$$\Phi'(0)=-1,\ \Phi(0)=\Phi'(\infty)=0,$$

здесь

$$s = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{1-\lambda t}}\,\frac{H - z}{\varepsilon}, \quad \Phi(s) = \frac{\psi\sqrt{1-\lambda t}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Уравнение (16) проинтегрировано численно. Функция $\Phi(s)$ монотонно убывает от нуля до минимального значения $\gamma = -0{,}2063$ при $s = \infty$. Таким образом, определено $v_{z1}|_{z=\pm H} = \pm 2\gamma/\sqrt{1-\lambda t}$.

Теперь определим первое приближение $\mathbf{v}_1$, p_1, ζ_1 во внешней области (вне D_S и D_Γ). Ввиду потенциальности течения идеальной жидкости имеет место интеграл

$$\partial\Phi_1/\partial t + \tau r\partial\Phi_1/\partial r - 2\tau z\partial\Phi_1/\partial z + p_1 = 0,$$

здесь $\mathbf{v}_1 = \nabla\Phi_1$. Для Φ_1, ζ_1 получаем задачу (15) в области D_0

$$\Delta\Phi_1 = 0,$$

$$\partial\Phi_1/\partial t + \tau R\partial\Phi_1/\partial r - 2\tau z\partial\Phi_1/\partial z + (\tau^2 + \tau_t)R\zeta +$$

$$+ \sigma(\partial^2\zeta_1/\partial z^2 - \zeta_1 R^{-2}) = 0 \quad (r = R),$$

$$\partial\zeta_1/\partial t - 2\tau z\partial\zeta_1/\partial z - \tau\zeta_1 = \partial\Phi_1/\partial r \quad (r = R(t)),$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \pm\frac{2\sqrt{\lambda}\gamma}{\sqrt{1-\lambda t}} \quad (z = \pm H).$$

С учетом симметрии течения решение последней задачи получается в виде

$$\Phi_1 = \frac{2\sqrt{\lambda}\gamma}{4h}(1-\lambda t)^{-3/2}(2z^2 - r^2) + \sum_{k=0}^{\infty}\Phi_{k1}(t)\,I_0\left(\frac{\pi k r}{h(1-\lambda t)}\right)\times$$

$$\times\cos\frac{\pi k z}{1-\lambda t}, \quad \zeta_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\zeta_{k1}(t)\cos\frac{\pi k z}{1-\lambda t}.$$

Функции Φ_{k1}, ζ_{k1} удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений и найдены численно. В частности, ζ_{01}, Φ_{01} получаются явно

$$\zeta_{01} = \frac{2\sqrt{\lambda}\gamma}{\lambda h}\,\frac{\sqrt{1-\lambda t} - 1}{1-\lambda t}.$$

Вклад в возвышение свободной границы от функций пограничного слоя $\mathbf{h}_k$, q_k имеет второй порядок малости и здесь не учитывается. Из анализа формулы для $\zeta_1(t, z)$ следует, что с ростом времени свободная граница деформируется, становясь все более выпуклой.

Поступила 29 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— УМН, 1957, т. 12, № 5 (77).
2. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974.
3. **Батищев В. А., Срубщик Л. С.** Об асимптотике свободной поверхности жидкости при исчезающей вязкости.— ДАН СССР, 1975, т. 222, № 4.
4. **Овсянников Л. В.** Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей.— В кн.: Общие уравнения и примеры. Новосибирск, Наука, 1967.
5. **Черноусько Ф. Л.** О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.