О РАСЧЕТЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ДИФФУЗИИ В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ

А. М. Супоницкий (*Москва*)

Известно, что поток вещества при молекулярной диффузии зависит не только от градиента концентрации, но и от градиента температуры. Этим фактом широко пользуются при разделении растворов различных веществ в делительных колонках, представляющих собой щелевые резервуары, стенки которых поддерживаются при различных температурах. В литературе описаны методы экспериментального исследования и приведены расчеты для процесса разделения в делительных колонках, в которых процесс обусловлен молекулярным переносом вещества и свободной конвекцией [1]. Если же раствор обтекает тело, находящееся при температуре, отличной от температуры потока, то также возникает термодиффузионный процесс. Процессу разделения при обтекании сжимаемой жидкостью плоской пористой пластины, через поверхность которой производится отсасывание жидкости, посвящена работа Лю [2]. В настоящей работе исследуется процесс разделения в потоке несжимаемой жидкости при больших числах Прандтля.

1. Пусть поток вязкой жидкости, содержащий некоторое вещество, обтекает тело, температура которого отлична от температуры потока. Вблизи тела возникает температурный пограничный слой, который вызывает перераспределение вещества вблизи поверхности. В работе предполагается, что диффузионное число Прандтля $P = \nu / D$ и тепловое число Прандтля $P' = \nu / \chi$ велики и, следовательно, толщины теплового и диффузионного пограничных слоев малы по сравнению с толщиной вязкого пограничного слоя (ν, D, χ — соответственно коэффициенты кинематической вязкости, диффузии и температуропроводности).

Будем предполагать, что наличие в потоке инородного вещества не оказывает влияния на гидродинамику потока. Введем связанную с телом ортогональную систему координат x, y, причем линия $y = 0$ совпадает с контуром поверхности тела. Составляющие скорости $u\,(x, y)$, v, (x, y) определяются из решения соответствующей задачи гидродинамики вязкой жидкости и считаются известными функциями. Ввиду малости толщин температурного и диффузионного слоев по сравнению с толщиной вязкого слоя для $u\,(x, y)$ и $v\,(x, y)$ можно принять их значения вблизи поверхности [3,4]

$$u\,(x,\ y) = \frac{\tau\,(x)\,y}{\mu}, \qquad v\,(x,\ y) = -\frac{\tau'\,(x)\,y^2}{2\mu} \tag{1.1}$$

Здесь $\tau\,(x)$ — напряжение трения на поверхности, μ — коэффициент динамической вязкости.

Поток вещества, переносимый через поверхность молекулярным механизмом, при учете термодиффузии дается выражением [1].

$$j = -\rho D\left[\frac{\partial c}{\partial y} + \sigma c\,(1-c)\,\frac{\partial T}{\partial y}\right] \tag{1.2}$$

где c — концентрация вещества, T — температура жидкости, ρ — плотность жидкости, σ — коэффициент Соре, y — нормаль к поверхности.

В данном параграфе учитывается зависимость коэффициентов диффузии, температуропроводности и коэффициента Соре от концентрации и температуры.

Для ламинарного плоского потока капельной жидкости уравнения для определения концентрации вещества и температуры в диффузионном и тепловом пограничных слоях запишутся следующим образом:

$$u\,\frac{\partial c}{\partial x} + v\,\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{D\,(c,\ T)\left[\frac{\partial c}{\partial y} + \sigma\,(c,\ T)\,c\,(1-c)\,\frac{\partial T}{\partial y}\right]\right\}$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi\,\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{1.3}$$

Будем считать, что тело непроницаемо для вещества, а концентрация вещества и температура вдали от тела, также как и температура поверхности, постоянны; тогда граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial c\,(x,\ y)}{\partial y} + \sigma\,[c\,(x,\ y), T\,(x, y)]\,c\,(x,\ y)\,[1 - c\,(x,\ y)]\,\frac{\partial T\,(x,\ y)}{\partial y} = 0$$

$$T\,(x,\ y) = T_1 \qquad \text{при } y = 0 \tag{1.4}$$

$$c\,(x,\ y) = c_0, \quad T\,(x,\ y) = T_0 \quad \text{при } y = \infty$$

$$c\,(x,\ y) = c_0, \quad T\,(x,\ y) = T_0 \quad \text{при } x = 0$$

Нетрудно убедиться, что задача (1.1), (1.3), (1.4) автомодельна, так что

$$T = T(\eta), \qquad c = c(\eta)$$

$$\left(\eta = \varphi t^{-1/3}, \ \varphi = \frac{y\sqrt{\tau(x)}}{\sqrt{2\mu}}, \ t = \frac{1}{2\sqrt{2\mu}} \int_0^x \sqrt{\tau(\xi)}\, d\xi\right) \tag{1.5}$$

Уравнения (1.3) и граничные условия (1.4) могут быть записаны в виде

$$-\frac{1}{3}\eta^2 c_\eta' = \{D(c, T)[c_\eta' + \sigma(c, T)c(1-c)T_\eta']\}_\eta', \qquad -\frac{1}{3}\eta^2 T_\eta' = (\chi T_\eta')_\eta' \tag{1.6}$$

$$c_\eta' + \sigma(c, T)c(1-c)T_\eta' = 0, \qquad T = T_1 \qquad \text{при } \eta = 0$$

$$c(\eta) = c_0, \qquad T(\eta) = T_0 \qquad \text{при } \eta = \infty$$

Рассмотрим осесимметричные задачи термодиффузии в течении жидкости, индуцированном вращающимся бесконечным диском, и термодиффузии вблизи передней критической точки обтекаемого тела. Если учесть, что в этих задачах нормальная компонента скорости вблизи поверхности зависит только от расстояния y по нормали к поверхности [3]

$$v_y = -Ay^2 \quad (A = \text{const}) \tag{1.7}$$

то нетрудно убедиться, что эти задачи также автомодельны. Уравнения и граничные условия имеют вид

$$-Ay^2 c_y' = \{D(c, T)[c_y' + \sigma(c, T)c(1-c)T_y']\}_y', \quad -Ay^2 T_y' = [\chi T_y]'_y \tag{1.8}$$

$$c_y' + \sigma(c, T)c(1-c)T_y' = 0, \quad T = T_1 \quad \text{при } y = 0$$

$$c = c_0, \quad T = T_0 \quad \text{при } y = \infty$$

2. В дальнейшем примем, что жидкость обладает постоянными физическими характеристиками, тогда задачи (1.6) и (1.8) проводятся к соотношениям

$$-My^2 c_y' = c_y'' + \sigma[c(1-c)T_y']_y' \qquad -Ny^2 T_y' = T_y'' \tag{2.1}$$

$$c_y' + \sigma(c, T)c(1-c)T_y' = 0, \qquad T = T_1 \quad \text{при } y = 0$$

$$c = c_0, \qquad T = T_0 \quad \text{при } y = \infty$$

В плоской задаче $M = (3D)^{-1}$, $N = (3\chi)^{-1}$, в осесимметричной $M = AD^{-1}$, $N = A\chi^{-1}$. Введем безразмерную переменную $z = N^{1/3}y$ и положим $\gamma = N / M = D / \chi$. Уравнение переноса тепла легко интегрируется и решение имеет вид

$$T(z) = \frac{T_0 - T_1}{\Gamma(4/3)\, 3^{1/3}} \int_0^z \exp\frac{-\xi^3}{3}\, d\xi + T_1 \tag{2.2}$$

Уравнение диффузии принимает вид

$$\frac{-z^2}{\gamma} c_z' = c_z'' + \left[3^{-1/3}\frac{\sigma(T_0 - T_1)}{\Gamma(4/3)} \exp\frac{-z^3}{3}\, c(1-c)\right]_z' \tag{2.3}$$

при граничных условиях

$$c_z' + 3^{-1/3}\Gamma^{-1}(4/3)\,\sigma(T_0 - T_1)\,c(1-c) = 0 \quad \text{при } z = 0, \qquad c = c_0 \quad \text{при } z = \infty \tag{2.4}$$

Соотношения (2.3), (2.4) показывают, что в рассматриваемых задачах концентрация на поверхности зависит только от двух безразмерных параметров $\varepsilon = \sigma(T_0 - T_1)$, γ и не зависит от гидродинамических характеристик течения и геометрической формы поверхности.

3. Решение диффузионного уравнения будем искать в виде ряда по параметру ε

$$c(z) = c_0(z) + \varepsilon c_1(z) + \ldots \tag{3.1}$$

Расчеты дают для двух первых членов ряда (3.1) при $\gamma \neq 1$ следующее выражение:

$$c(z) = c_0 + \sigma(T_0 - T_1)\left\{-\frac{c_0(1-c_0)}{\Gamma(4/3)\,3^{1/3}}\left[\frac{1}{1-\gamma^{-1}}\int_0^z \exp\frac{-\xi^3}{3}\, d\xi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{1-\gamma}\int_0^z \exp\frac{-\xi^3}{3\gamma} d\xi\right] + \frac{c_0(1-c_0)\gamma^{1/3}(1-\gamma^{2/3})}{1-\gamma}\right\} \tag{3.2}$$

Концентрация на поверхности определится из (3.2) соотношением

$$c(0) = c_0 + \sigma(T_0 - T_1)\gamma^{1/3}(1-\gamma^{2/3})(1-\gamma)^{-1}c_0(1-c_0) \tag{3.3}$$

В растворах слабой концентрации при малых γ

$$c(0) = c_0[1 + \sigma(T_0 - T_1)\gamma^{1/3}] \tag{3.4}$$

При $\gamma = 1$ первые два члена ряда (2.3) имеют вид

$$c(z) = c_0 + \sigma(T_0 - T_1)\left\{-3^{-1/3}\frac{c_0(1-c_0)}{\Gamma(4/3)}\left[\int_0^z \exp\frac{-\xi^3}{3}d\xi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{3}\int_0^z \xi^3\exp\frac{-\xi^3}{3}d\xi\right] + \frac{2}{3}c_0(1-c_0)\right\} \tag{3.5}$$

Концентрация на поверхности определится из (3.5) соотношением

$$c(0) = c_0 + \frac{2}{3}\sigma(T_0 - T_1)c_0(1-c_0) \tag{3.6}$$

которое следует также из (3.3) при $\gamma \to 1$.

4. Предположим, что диффузионный слой много тоньше теплового слоя. Разложим в ряд Маклорена выражение для распределения температуры в потоке жидкости (2.2) и ограничимся первыми двумя членами разложения

$$T(z) = T_1 + 3^{-1/3}\Gamma^{-1}(4/3)(T_0 - T_1)z \tag{4.1}$$

В случае растворов слабой концентрации уравнение (2.1) с учетом (4.1) интегрируется в квадратурах

$$c(z) = -\frac{c_0 q}{1 - 3^{-2/3}q\gamma^{1/3}J}\int_0^z \exp\left(-\frac{\xi^3}{3\gamma} - q\xi\right)d\xi + c_0(1 - 3^{-2/3}q\gamma^{1/3}J)^{-1}$$

$$\left(J = \int_0^\infty \exp\left(-\xi - 3^{1/3}q\gamma^{1/3}\xi^{1/3}\right)\xi^{-3/2}d\xi, \quad q = \frac{\sigma(T_0 - T_1)}{\Gamma(4/3)3^{1/3}}\right) \tag{4.2}$$

Концентрация вещества на поверхности определится из (4.2) соотношением

$$c(0) = c_0(1 - 3^{-2/3}q\gamma^{1/3}J)^{-1} \tag{4.3}$$

При малых значениях параметра $\varepsilon = \sigma(T_0 - T_1)$ из (4.3) следует выражение (3.4).

Автор благодарит Г. И. Баренблатта за предложенную задачу и советы.

Поступила 27 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Г р ю К. Э., И б б с Т. Л. Термическая диффузия в газах. М., Гостехиздат, 1956.
2. L i u V. C. On the separation of gas mixtures by suction of thermal-diffusion boundary Layer. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, vol. 12, Part. 1.
3. Л е в и ч В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
4. L i g h t h i l l M. J. Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. Proc. Roy. Soc. 1950, vol 202, S. A., № 1070.

ОБ УЧЕТЕ ВЛАЖНОСТИ В УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВ

С. С. Григорян

(*Москва*)

В работах [1,2] была предложена система уравнений, описывающих движения слабосцементированных грунтов. В естественных условиях такие грунты, представляющие собой пористую массу из минеральных частиц, оказываются насыщенными водой в той или иной степени.

Очевидно, что механические (в частности, динамические) свойства таких грунтов должны существенно зависеть от насыщенности пор водой и воздухом, поэтому в системе уравнений, описывающей движения этих грунтов, должны быть учтены количественные характеристики водо- и воздухосодержания. Исследованием движений грунтов, поры которых почти полностью заполнены водой и содержат лишь ничтожное количество воздуха, занимался Г. М. Ляхов [3,4].

Поставленные им опыты по изучению распространения в водонасыщенных грунтах взрывных волн показали, что при высоких напряжениях в таких грунтах касательные напряжения оказываются пренебрежимыми по сравнению со средним давлением, поэтому при этих условиях водонасыщенные грунты можно рассматривать как идеальные жидкости.