ПМТФ, № 1, 1962

ДАВЛЕНИЕ ГАЗОВОЙ СТРУИ НА РАВНОБОКИЙ КЛИН

Г. И. Назаров

(*Томск*)

Методом Бергмана решаются две задачи о прямом давлении газового потока на равнобокий клин: 1) симметричное обтекание клина газовой струей, 2) обтекание клина, прикрывающего вход в канал, потоком сжимаемой жидкости.

Во второй задаче проводится предельный переход к обтеканию клина беспредельным потоком газа и показывается также, что для частной задачи прямого обтекания пластинки несжимаемой жидкостью формулы, устанавливающие связь между физическими величинами, совпадают с теми зависимостями, которые были получены Н. Е. Жуковским.

§ 1. Основные видоизмененные формулы метода Бергмана. Потенциальное, дозвуковое движение газа при адиабатическом процессе определяется следующим уравнением в переменных плоскости годографа $s\theta$ для функции тока ψ [1]

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + T(s)\,\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0 \tag{1.1}$$

где

$$T(s) = -\frac{1}{2}\,\frac{d\ln K}{ds}, \qquad K = (1-M^2)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$\left(\gamma = \frac{c_p}{c_v};\ M = \frac{v}{a}\right) \tag{1.2}$$

$$s = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,\ln\frac{1+\sqrt{(1-M^2)(\gamma-1)/(\gamma+1)}}{1-\sqrt{(1-M^2)(\gamma-1)/(\gamma+1)}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-M^2}}{1-\sqrt{1-M^2}}\right] \tag{1.3}$$

$$s = 0 \quad \text{при } M = 1, \qquad s = -\infty \quad \text{при} \quad M = 0 \tag{1.4}$$

Здесь θ — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс ξ физической плоскости течения; a — местная скорость звука, K — функция Чаплыгина; s — функция, зависящая от модуля скорости.

Переход к физической плоскости $\xi\eta$ осуществляется при помощи формулы (ρ — плотность газа)

$$dz = \left(d\varphi + \frac{i}{\rho}d\psi\right)\frac{e^{i\theta}}{v} \qquad (z = \xi + i\eta) \tag{1.5}$$

Потенциал скорости φ и функция тока ψ связаны уравнениями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\sqrt{K}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \sqrt{K}\,\frac{\partial\psi}{\partial} \tag{1.6}$$

Имеют место равенства

$$p = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \qquad \rho = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$v = M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1/2} \tag{1.7}$$

Здесь давление p, плотность ρ и модуль скорости v отнесены соответственно к давлению, плотности и скорости звука в точке торможения.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде ряда [1]

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(s, \theta) f_k(s) \tag{1.8}$$

где Φ_k — гармонические функции ($k = 0, 1, 2\ldots$).

Внося (1.8) в (1.1), получим уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\Phi_k (f_k'' + T f_k') + \frac{\partial \Phi_k}{\partial s} (2 f_k' + T f_k) \right] = 0 \tag{1.9}$$

На произвольные функции Φ_k и f_k наложим условия, аналогичные условиям Бергмана [3,2]:

$$2 f_0' + T f_0 = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_k}{\partial s} = \Phi_{k-1} \tag{1.10}$$

$$2 f_k' + T f_k = -(f_{k-1}'' + T f_{k-1}') \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.11}$$

Тогда уравнение (1.9) удовлетворяется при произвольной функции $\Phi_0(s, \theta)$; все остальные функции Φ_k и f_k выражаются через предыдущую и в конечном счете через $\Phi_0(s, \theta)$ и $f_0(s)$.

Из свойств гармонических функций следует, что все Φ_k, определяемые из (1.10) в виде неопределенных интегралов по s, останутся гармоническими

$$\Phi_k(s, \theta) = \int \Phi_{k-1}(s, \theta)\, ds \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.12}$$

При определении функций f_k можно рассматривать общие решения уравнений (1.10), (1.11), однако ограничимся частными решениями. Тем самым выделяется определенный класс решений, весьма общий, зависящий от произвольной функции двух переменных $\Phi_0(s, \theta)$. Из (1.2), (1.10) находим

$$f_0 = K^{-1/4} \tag{1.13}$$

Считая правую часть в (1.11) известной и интегрируя с учетом (1.2), получим

$$f_k = -\frac{f_{k-1}'}{2} - \frac{1}{8} K^{-1/4} \int f_{k-1}' K' K^{-3/4} ds \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.14}$$

где K' и f_{k-1}' — производные от соответствующих функций по s.

Интегралы (1.14) могут быть вычислены и выражены элементарно для значений функции K, функции f_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$)— затабулированы.

Так, например, из (1.13) и (1.14) найдем

$$f_1 = \frac{1}{8} K^{-1/4} \left(\frac{K'}{K} + \frac{J}{4} \right), \qquad J = \int \left(\frac{K_s'}{K} \right)^2 ds = \int \left(\frac{K_M'}{K} \right)^2 \frac{dM}{ds} dM \tag{1.15}$$

Из (1.2) и (1.3) имеем (1.16)

$$\frac{ds}{dM} = \frac{(1 - M^2)^{1/2}}{M(1 + M^2(\gamma - 1)/2)}, \qquad K_M' = -(\gamma + 1) M^3 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}}$$

Тогда, вводя замену $y = \sqrt{1 - M^2}$ и вычисляя интеграл, получим

$$J = -\frac{2(\gamma + 1)^2}{\gamma - 1} y - \frac{4(\gamma^2 + \gamma - 2)}{\gamma - 1} \frac{1}{y} + \frac{2(\gamma + 1)}{3} \frac{1}{y^3} + \frac{5\gamma^2 + 8\gamma - 1}{h(\gamma - 1)} \ln \frac{h + y}{h - y}$$

$$h = \sqrt{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}$$

[1] Абсолютная и равномерная сходимость ряда (1.8) и первых производных от него по s и θ доказана для некоторой области, ограниченной гиперболой [2].

Полагая $\gamma = 1.4$, формулу (1.15) легко привести к виду

$$f_1 = K^{-1/4}\left(-\frac{0.25}{y^3} + \frac{0.175}{y} - 1.2\,y + \frac{1.5625}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+y}{\sqrt{6}-y}\right)$$

Аналогично находится

$$f_2 = K^{-1/4}\left[\frac{0.48125}{x^3} - \frac{0.67375}{x^2} + \frac{0.1053125}{x} - 0.2625 + 0.6\,x + \right.$$

$$\left. + \frac{1.5625}{\sqrt{6}}\left(-\frac{0.25}{y^3} + \frac{0.175}{y} - 1.2\,y\right)\ln\frac{\sqrt{6}+y}{\sqrt{6}-y} + \frac{1.5625\cdot 6.25}{48}\ln^2\frac{\sqrt{6}+y}{\sqrt{6}-y}\right]$$

где

$$x = y^2 = 1 - M^2$$

Графики функции f_0, f_1, f_2 нанесены на фиг. 1.

Если в ряде (1.8) взять конечное число членов ν, как это и имеет место при всяком практическом расчете, то при условиях (1.10) — (1.11), где $k = 1, 2 \ldots \nu$, уравнение (1.9) удовлетворяется при дополнительном условии:

$$f_\nu'' + Tf_\nu' = 0 \qquad (1.17)$$

Решая совместно уравнения (1.2), (1.10), (1.11), (1.17), можно определить $K(s)$ для некоторого гипотетического газа. Так, например, полагая $\psi = \Phi_0 f_0$, будем иметь два уравнения

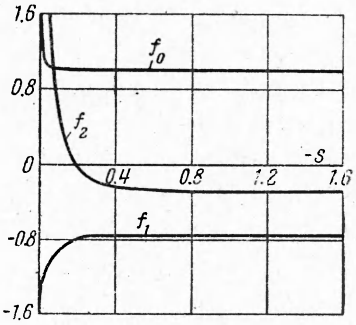
$$2f_0' + Tf_0 = 0, \qquad f_0'' + Tf_0' = 0 \qquad (1.18)$$

Исключая из (1.18) f_0 и учитывая (1.2), получим дифференциальное уравнение

$$K'' - \frac{3}{4}\frac{K'^2}{K} = 0 \qquad (1.19)$$

Интегрируя (1.19), придем к аппроксимации С. А. Христиановича [4]

$$K = [A(s+b)]^4 \qquad (1.20)$$



Фиг. 1

где A, b — постоянные интегрирования.

Полагая $\psi = \Phi_0 f_0 + \Phi_1 f_1$, получим следующую систему уравнений

$$2f_0' + Tf_0 = 0, \quad 2f_1' + Tf_1 = -(f_0'' + Tf_0'), \quad f_1'' + Tf_1' = 0 \qquad (1.21)$$

Учитывая (1.2), (1.14), (1.17) и исключая f_1 из системы (1.21), получим

$$\frac{J}{16} = \frac{K''}{K'} - \frac{K'}{K} - \frac{8K^{3/4}}{K'}$$

Возьмем производную по s от обеих частей этого равенства; после приведения подобных членов получим дифференциальное уравнение

$$K'''K'K^2 + (8K^{11/4} - KK'^2 - K^2K'')K'' + \left(\frac{15}{16}K^{(1)^2} - 6K^{7/4}\right)K^{(1)^2} = 0 \qquad (1.22)$$

Интегрируя это уравнение, придем опять к функции (1.20), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой (1.20) в (1.22).

Рассмотренные конечные ряды являются точными решениями для гипотетического газа С. А. Христиановича и приближенными решениями уравнения (1.1) при точном значении функции Чаплыгина.

Если вместо условий (1.10), (1.11) наложить условия (1.23)

$$f_0'' + Tf_0' = 0, \quad f_k'' + Tf_k' = -(2f_{k-1}' + Tf_{k-1}), \quad \Phi_k = \frac{\partial \Phi_{k-1}}{\partial s} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

то для конечного ряда (1.8) уравнение (1.9) удовлетворится при дополнительном условии

$$2f_\nu' + Tf_\nu = 0 \tag{1.24}$$

Частное решение для f_0 из (1.23) можно взять в виде $f_0 = -1$.

Рассуждая аналогично предыдущему, при $\nu = 0$ придем к функции (1.20), а при $\nu = 1$ получим систему уравнений:

$$f_1'' + Tf_1' = T, \qquad 2f_1' + Tf_1 = 0 \tag{1.25}$$

Исключая f_1 из уравнений (1.25) и учитывая (1.2), получим

$$K' = \frac{4K^{3/4}}{b}(a^2 - K^{1/2}), \qquad f_1 = bK^{-1/4}$$

где a, b — постоянные интегрирования уравнений (1.25). Интегрируя это уравнение, придем к аппроксимации Г. А. Домбровского [5]

$$K = [a \operatorname{th} m(s + c)]^4, \qquad f_1 = \frac{1}{m} \operatorname{cth} m(s + c) \qquad \left(m = \frac{a}{b}, c = \mathrm{const}\right)$$

Тогда решение для ψ принимает тот же вид, что и в работе [5]

$$\psi = \operatorname{Im}\left\{-W(z) + \frac{\operatorname{cth} m(s + c)}{m} \frac{dW(z)}{dz}\right\}, \qquad \Phi_0 = \operatorname{Im} W(z)$$

$$(z = s + i\theta) \tag{1.26}$$

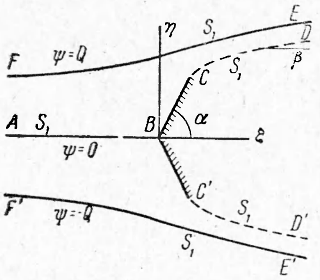
где $W(z)$ — произвольный комплексный потенциал, определяемый из краевых условий.

Решение (1.26) получено в [5] методом прикосновения Лежандра и использовано для решения некоторых задач о газовых струях.

§ 2. Давление газовой струи на равнобокий клин при симметричном обтекании. Допустим, что плоская газовая струя, имеющая в бесконечности заданную скорость v_1 и ширину $2b$, симметрично обтекает клин со стороной l и углом α, образованным с осью симметрии.

С концов клина срываются свободные линии тока CD и $C'D'$. Линии $F\varepsilon$ и $F'\varepsilon'$ ограничивают газовую струю. На этих линиях скорость постоянна и равна v_1. Точка B является точкой торможения.

Пусть на линии тока $ABCD$ и $ABC'D'$ функция тока $\psi(s, \theta)$ равна нулю, на линии тока $F\varepsilon$ она равна $Q > 0$ и на $F'\varepsilon'$ равна $Q < 0$, где Q — расход газа в потоке. Обозначим через β угол между направлением сбегающей струи CD и осью $O\xi$ на ∞. Оси координат ξ, η указаны на фиг. 2.



Фиг. 2

Нашей задачей является определение давления газовой струи на клин.

Функция $\psi(s, \theta)$ удовлетворяет уравнению (1.1). В силу симметрии задачи нам необходимо найти интеграл этого уравнения, удовлетворяющий граничным условиям:

$$\begin{aligned}
&\psi = 0 \quad \text{при } \theta = 0, && -\infty < s < s_1 \\
&\psi = 0 \quad \text{при } \theta = \alpha, && -\infty < s < s_1 \\
&\psi = 0 \quad \text{при } \beta < \theta < \alpha, && s = s_1 \\
&\psi = Q \quad \text{при } 0 < \theta < \beta, && s = s_1
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Согласно описанному выше методу будем искать решение для несжимаемой жидкости Φ_0 из уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \theta^2} = 0$$

при тех же граничных условиях (2.1) для Φ_0, что и для газа, в виде

$$\Phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(s) \sin \omega\theta \qquad \left(\omega = \frac{n\pi}{\alpha}\right) \tag{2.2}$$

Тогда функция Z_n удовлетворяет уравнению

$$Z_n'' - \omega^2 Z_n = 0, \qquad Z_n = a_n e^{\omega s} + b_n e^{-\omega s} \tag{2.3}$$

Отсюда в точке B имеем $\Phi_0 = 0$, $s = -\infty$. Тогда, разыскивая всюду ограниченные решения, мы должны положить $b_n = 0$, следовательно

$$\Phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\omega s} \sin \omega\theta \tag{2.4}$$

В силу (1.13) и (2.4) формула (1.8) принимает вид

$$\psi(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\omega s} W_n(s) \sin \omega\theta \qquad \left(W_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(s)}{\omega^k}\right) \tag{2.5}$$

Функция (2.5) удовлетворяет двум первым условиям (2.1). Мы удовлетворим и другие условия, если потребуем

$$\psi(s_1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n W_n(s_1) e^{\omega s_1} \sin \omega\theta = \begin{cases} Q & (0 < \theta < \beta) \\ 0 & (\beta < \theta < \alpha) \end{cases} \tag{2.6}$$

Применяя теорию рядов Фурье, получим

$$a_n = \frac{4Q}{\omega\alpha} \frac{\sin^2(\omega\beta/2)}{W_n(s_1)} e^{-\omega s_1} \tag{2.7}$$

Удовлетворяя тем же граничным условиям, функцию Φ_0 найдем

$$a_n = \frac{4Q^\circ}{\omega\alpha} \sin^2 \frac{\omega\beta}{2} e^{-\omega s_1}$$

где Q° — расход для несжимаемой жидкости.

Таким образом, имеет место связь между расходами сжимаемой и несжимаемой жидкости в виде

$$Q = Q^\circ W_n(s_1)$$

Пользуясь формулами (1.6), найдем потенциал скорости

$$\varphi = -\sum_{n=1}^{\infty} \omega a_n \cos \omega\theta \int_{-\infty}^{s} K^{1/2} W_n(s) e^{\omega s} ds \tag{2.8}$$

При вычислении этого интеграла за отправную точку взята точка B.

Перейдем к нахождению ряда геометрических величин, относящихся к размерам и форме потока.

На линии тока $\psi = \mathrm{const}$ из (1.5) имеем

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{v} d\varphi \tag{2.9}$$

На участке BC имеем $\theta = \alpha$, $-\infty < s < s_1$; находим

$$l = -\frac{4Q}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega\beta/2) \cos \omega\alpha}{W_n(s_1)} J_n(s_1) \tag{2.10}$$

Здесь

$$J_n(s_1) = \int_0^{M_1} \frac{K^{1/2}}{v} W_n(s) e^{\omega(s-s_1)} \frac{ds}{dM} dM$$

Это уравнение служит для определения угла β (или длины l по заданному β).

На линии CD, на которой $\alpha < \theta < \beta$, $s = s_1$, имеем

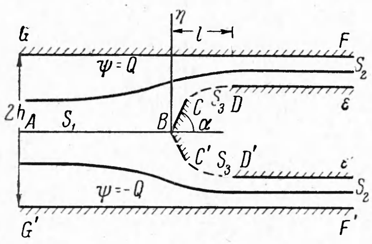
$$\xi - \xi_c = \int\limits_{\alpha}^{\theta} \frac{\cos\theta}{v_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_{s=s_1} d\theta, \qquad \eta - \eta_c = \int\limits_{\alpha}^{\theta} \frac{\sin\theta}{v_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_{s=s_1} d\theta$$

После вычислений получим

$$\begin{aligned} \xi &= l\cos\alpha - \frac{2\,QK_1^{1/2}}{\alpha v_1}\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{\omega\beta}{2}\left[\frac{\cos(\omega+1)\,\theta}{\omega+1} + \frac{\cos(\omega-1)\,\theta}{\omega-1}\right]_{\alpha}^{\theta} \\ \eta &= l\sin\alpha + \frac{2\,QK_1^{1/2}}{\alpha v_1}\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{\omega\beta}{2}\left[\frac{\sin(\omega-1)\,\theta}{\omega-1} - \frac{\sin(\omega+1)\,\theta}{\omega+1}\right]_{\alpha}^{\theta} \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Эти уравнения определяют в параметрическом виде свободную струю CD, где θ — параметр.

Для построения линии $F\varepsilon$ за исходную точку можно выбрать точку N, лежащую на пересечении линии $\psi = Q$ и эквипотенциальной линии $\varphi = 0$. Из уравнения $\varphi(s, \theta) = 0$ определится $\theta = \theta(s)$. Полагая $s = s_1$, найдем θ_N. После этого легко получить параметрические формулы для построения линии $F\varepsilon$, аналогичные (2.11).



Фиг. 3

Давление на клин определяется формулой

$$P = 2\left(\int\limits_{0}^{l} p\,d\sigma - p_1 l\right) \qquad (2.12)$$

где

$$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{\theta=\alpha} ds$$

Окончательно выражение для P можно получить в следующем виде

$$P = -2\left(p_1 l + \frac{4Q}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\omega\beta/2)\cos\omega\alpha}{W_n(s_1)} N_n(s_1)\right) \qquad (2.13)$$

Здесь

$$N_n(s_1) = \int\limits_{0}^{M_1} pK^{1/2}\,\frac{W_n(s)}{v}\,e^{\omega(s-s_1)}\,\frac{ds}{dM}\,dM$$

p, v, K определяются формулами (1.2) и (1.7).

При $\alpha = \pi/2$ формула (2.10) характеризует обтекание пластинки газовой струей, которая решена Л. Н. Сретенским [6] методом Чаплыгина в предположении, что точка торможения может быть заменена малой застойной зоной перед пластинкой.

При $\alpha > \pi/2$ эти формулы определяют удар газовой струи в конический сосуд, поставленный отверстием навстречу потоку.

§ 3. Давление газового потока на клин, прикрывающий вход в канал с параллельными стенками. Пусть равнобокий клин с углом раствора 2α и со стороной b расположен симметрично относительно канала $D\varepsilon$ и $D'\varepsilon'$, вход в который он прикрывает.

Пусть также стенки GF и $G'F'$, расстояние между которыми равно $2h$, параллельны стенкам канала. Расстояние между стенками канала $D\varepsilon$ и $D'\varepsilon'$ равно $2a$.

На свободных струйных линиях CD и $C'D'$ скорость газа постоянна и равна $v_3 > v_2$, где v_2 — скорость газа на выходе из канала $F\varepsilon$ и $F'\varepsilon'$, при этом $v_2 > v_1$, где v_1 — скорость газа на входе в канал GG'. Расстояние носика клина от входа в канал, который он прикрывает, равно l.

Определим давление на клин, расстояние l и скорость v_2 при таком движении газа.

Очевидно, при $\alpha = \pi / 2$ будем иметь задачу об обтекании пластинки, прикрывающей вход в канал, которая решена В. И. Трошиным [7] в переменных Чаплыгина.

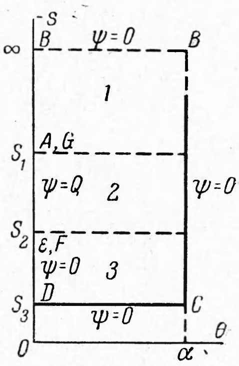
При $\alpha > \pi / 2$ будем иметь удар газового потока, ограниченного стенками, в конический сосуд, прикрывающий вход в канал.

В силу симметрии задачи рассмотрим лишь верхнюю половину потока.

Примем, что на оси симметрии AB функция тока $\psi = 0$, тогда $\psi = Q$ на линии GF, где Q — расход газа в потоке.

Имеем следующие граничные условия:

$$\begin{array}{lll} \psi = 0 & \text{при } \theta = 0 & -\infty < s < s_1 \\ \psi = 0 & \text{при } \theta = \alpha, & -\infty < s < s_3 \\ \psi = 0 & \text{при } 0 < \theta < \alpha, & s = s_3 \\ \psi = 0 & \text{при } \theta = 0, & s_2 < s < s_3 \\ \psi = Q & \text{при } \theta = 0, & s_1 < s < s_2 \end{array}$$



Фиг. 4

Следуя идеи С. В. Фальковича [8] и учитывая формулы (2.2), (2.3), ищем решение для Φ_0 в виде

$$\Phi_{10} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\omega s} \sin \omega\theta, \qquad \Phi_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\omega s} + B_n e^{-\omega s}) \sin \omega\theta$$

$$\Phi_{30} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\omega s} + D_n e^{-\omega s}) \sin \omega\theta$$

где $\Phi_{i0}\,(i = 1, 2, 3)$ — функции тока для несжимаемой жидкости, определенные в соответствующих областях, указанных на фиг. 4.

Тогда, учитывая (1.8) и то, что $\psi = Q\,(\alpha - \theta) / \alpha$ является также решением уравнения (1.1), составим

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_a \alpha_n(s) \sin \omega\theta, \quad \psi_2 = \frac{Q}{\alpha}(\alpha - \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \alpha_n(s) + B_n \beta_n(s)] \sin \omega\theta \quad (3.1)$$

$$\psi_3 = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \alpha_n(s) + D_n \beta_n(s)] \sin \omega\theta$$

где

$$\alpha_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(s)\, e^{\omega s}}{\omega^k}, \qquad \beta_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\omega^k} f_k e^{-\omega s} \qquad (3.2)$$

В областях *2* и *3* всюду $s \neq -\infty$ и $e^{-\omega s}$ ограничено при всех значениях s.

Постоянные a_n, A_n, B_n, C_n, D_n находятся из условий аналитического продолжения

$$\begin{array}{ll} \psi_1, (s_1, \theta) = \psi_2(s_1, \theta), & \dfrac{\partial \psi_1(s_1, \theta)}{\partial s} = \dfrac{\partial \psi_2(s_1, \theta)}{\partial s} \\ \psi_2(s_2, \theta) = \psi_3(s_2, \theta), & \dfrac{\partial \psi_2(s_2, \theta)}{\partial s} = \dfrac{\partial \psi_3}{\partial s}(s_2, \theta) \end{array} \qquad (3.3)$$

и дополнительного граничного условия

$$\psi_3(s_3, \theta) = 0$$

Из (3.1) и (3.3) получим

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n - A_n)\,\alpha_1 - B_n\beta_1\right]\sin\omega\theta = \frac{\theta}{\alpha}(\alpha-\theta)\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_1'(a_n - A_n) - \beta_1' B_n\right]\sin\omega\theta = 0\\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[(C_n - A_n)\,\alpha_2 + (D_n - B_n)\,\beta_2\right]\sin\omega\theta = \frac{\theta}{\alpha}(\alpha-\theta)\\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_2'(C_n - A_n) + \beta_2'(D_n - B_n)\right]\sin\omega\theta = 0\\ \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_3 C_n + \beta_3 D_n)\sin\omega\theta = 0\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь

$$\alpha_n(s_i) = \alpha_i, \quad \beta_n(s_i) = \beta_i, \quad \left.\frac{d\alpha_n(s)}{ds}\right|_{s=s_i} = \alpha_i', \quad \left.\frac{d\beta_n(s)}{ds}\right|_{s=s_i} = \beta_i' \qquad (i = 1,\, 2,\, 3)$$

Разлагая функцию $j = (\alpha - \theta)\,\theta/2$ в ряд Фурье в интервале $0 < \theta < \alpha$, определяя коэффициенты Фурье, а затем решая систему (3.4), найдем

$$a_n = \frac{2Q}{n\pi\alpha_3}\left[\Delta_2(\alpha_3'\beta_1' + \beta_3\alpha_1') - \Delta_1(\beta_3\alpha_2' + \alpha_3\beta_2')\right]\frac{1}{\Delta_1\Delta_2}$$

$$A_n = \frac{2Q}{n\pi}\left[\beta_3(\alpha_2'\Delta_1 - \alpha_1'\Delta_2) - \beta_2'\alpha_3\Delta_1\right]\frac{1}{\alpha_3\Delta_1\Delta_2}$$

$$B_n = \frac{2Q}{n\pi}\,\frac{\alpha_1'}{\Delta_1}, \qquad C_n = \frac{2Q\beta_3}{n\pi\alpha_3}\,\frac{\alpha_2'\Delta_1 - \alpha_1'\Delta_2}{\Delta_1\Delta_2}, \qquad D_n = \frac{2Q}{n\pi}\,\frac{\alpha_1'\Delta_2 - \alpha_2'\Delta_1}{\Delta_1\Delta_2}$$

где

$$\Delta_i = \alpha_i\beta_i' - \beta_i\alpha_i' \qquad (i = 1,\, 2,\, 3)$$

Переходим к установлению зависимостей между характерными величинами в физической плоскости.

На участке линии тока CD имеем $s = s_3$, $0 < \theta < \alpha$, $\psi = \psi_3$; учитывая (1.5), получим

$$\begin{gathered}l - b\cos\alpha = \frac{QK_3^{1/2}}{\pi v_3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n\Delta_3(\alpha_1'\Delta_2 - \alpha_2'\Delta_1)}{n(\omega^2-1)\,\alpha_3\Delta_1\Delta_2}\\ a - b\sin\alpha = \frac{QK_3^{1/2}}{\pi v_3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n\Delta_3(\alpha_1'\Delta_2 - \alpha_2'\Delta_1)}{n(\omega^2-1)\,\alpha_3\Delta_1\Delta_2}\end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь

$$\begin{gathered}r_n = (\omega-1)\cos(\omega-1)\,\alpha + (\omega+1)\cos(\omega+1)\,\alpha - 2\omega\\ t_n = (\omega+1)\sin(\omega-1)\,\alpha - (\omega-1)\sin(\omega+1)\,\alpha\end{gathered}$$

Если принять во внимание уравнение неразрывности

$$Q = (h-a)\,v_2\rho_2 = h_1 v_1\rho_1 \tag{3.6}$$

то соотношения (3.5) и (3.6) определят размер клина b, расстояние l и скорость v_2 как функции от a, h, α, v_1, v_3.

Перейдем к случаю беспредельного потока ($h = \infty$). Из (3.6) имеем

$$Q = a\left(1 - \frac{v_1\rho_1}{v_2\rho_2}\right)^{-1}$$

Совершая предельный переход, находим

$$\lim_{s_1\to s_2}\frac{\alpha_1'\Delta_2 - \alpha_2'\Delta_1}{1 - v_1\rho_1/v_2\rho_2} = v_1\rho_1(\alpha_1'\Delta_1' - \alpha_1''\Delta_1)$$

и формулы (3.5) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
l - b\cos\alpha &= \frac{a\rho_1 v_1 K_3^{1/2}}{\pi v_3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n\Delta_3(\alpha_1'\Delta_1' - \alpha_1''\Delta_1)}{n(\omega^2-1)\alpha_3\Delta_1\Delta_2} \\
a - b\sin\alpha &= \frac{a\rho_1 v_1 K_3^{1/2}}{\pi v_3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n\Delta_3(\alpha_1'\Delta_1' - \alpha_1''\Delta_1)}{n(\omega^2-1)\alpha_3\Delta_1\Delta_2}
\end{aligned}
\qquad (3.7)
$$

где

$$
\Delta_1' = \frac{d\Delta_1}{ds}\bigg|_{s=s_1}, \qquad \alpha_1'' = \frac{d^2\alpha}{ds^2}\bigg|_{s=s_1}
$$

Если мы рассмотрим теперь несжимаемую жидкость, то $K = 1$, $\rho = 1$, $f_0 = 1$, $f_i = 0$, $\alpha_n = e^{\omega s}$, $\beta_n = e^{-\omega s}$, $\Delta_i = -2\omega$ $(i = 1, 2, 3)$

Учитывая также, что для несжимаемой жидкости $e^{\omega(s_1-s_3)} = (v_1 / v_3)^{\omega}$, формулам (3.7) придадим вид

$$
\begin{aligned}
\frac{l - b\cos\alpha}{a} &= -\frac{v_1}{\pi v_3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n\omega^2}{n(\omega^2-1)}\left(\frac{v_1}{v_3}\right)^{\omega} \\
\frac{a - b\sin\alpha}{a} &= \frac{v_1}{\pi v_3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n\omega^2}{n(\omega^2-1)}\left(\frac{v_1}{v_3}\right)^{\omega}
\end{aligned}
\qquad (3.8)
$$

Для пластинки

$$
\alpha = \pi / 2, \qquad \omega = 2n, \qquad r_n = -4n, \qquad t_n = 4(-1)^{n-1} n
$$

Тогда имеем

$$
\frac{\pi l}{2a} = \frac{v_1}{v_3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n^2}{4n^2-1}\left(\frac{v_1}{v_3}\right)^{2n}, \qquad \frac{\pi(a-b)}{2a} = \frac{v_1}{v_3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}8n^2}{4n^2-1}\left(\frac{v_1}{v_3}\right)^{2n} \qquad (3.9)
$$

Если эти ряды просуммировать (см. [7]) и затем положить $v_1 / v_3 = \operatorname{tg}\nu / 2$, то формулы (3.9) приводятся к виду, указанному Жуковским [9]:

$$
\frac{l}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\nu - \cos\nu\ln\operatorname{tg}(\pi/4 - \nu/2)}{\nu - \sin\nu\cos\nu}, \qquad \frac{a}{a-b} = \frac{\pi(1+\cos\nu)}{2(\nu - \sin\nu\cos\nu)}
$$

Давление на клин определяется аналогично тому, как это было в предыдущей задаче, но только в качестве ψ следует брать последовательно ψ_i $(i = 1, 2, 3)$ по формулам (2.1) в зависимости от того, в каком интервале изменений находится s.

Поступила 24 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, ГИТТЛ, М.—Л., 1950, стр. 368—386.
2. Мизес Р., Шиффер М. О методе Бергмана интегрирования уравнений плоского движения сжимаемой жидкости. Сб. статей «Проблемы механики», ИИЛ, М., 1955, стр. 489—518.
3. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости, ИИЛ, М., 1961, стр. 402—409.
4. Христианович С. А. Приближенное интегрирование сверхзвукового течения газа, ПММ, 1947, XI, вып. 2, стр. 215—222.
5. Домбровский Г. А. К исследованию движения газа с дозвуковыми скоростями, Сб. статей «Теоретическая гидромеханика», Оборонгиз, 1952, № 9, стр. 5—41.
6. Сретенский Л. Н. К теории газовых струй. ПММ, 1959, XXIII, вып. 2, стр. 305—332.
7. Трошин В. П. Удар дозвукового газового потока о пластинку, прикрывающую вход в канал с параллельными стенками. Изв. АН СССР, ОТН, 1960, № 4, стр. 167—170.
8. Фалькович С. В. К теории газовых струй, ПММ, 1957, XXI, вып. 4, стр 459—464.
9. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа, Избр. соч., т. 1, ГИТТЛ, М.—Л., 1948, стр. 256.