

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ СМЕЩЕНИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕКЛОЛЕНТЕ

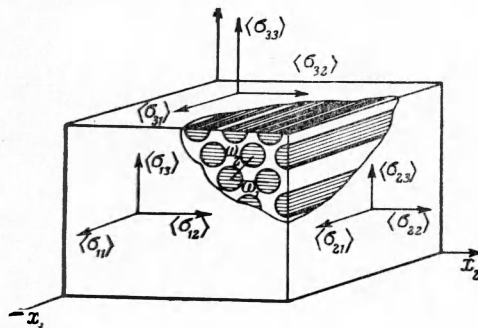
Г. А. Ван Фо Фы

(Киев)

Стеклолента — это прядь выпрямленных стекловолокон, уложенных в определенном порядке и пропитанных полимерным связующим. Физико-механические свойства стеклоленты определяют свойства ориентированных стеклопластиков в конструкции, поэтому представляет интерес исследование распределения напряжений в структуре и физико-механических характеристик стеклоленты на основе моделей структурно-неоднородного тела и отдельных свойств наполнителей и связующих.

В работе изучаются температурные перемещения и напряжения, возникающие между стекловолокнами в структуре стеклоленты.

1. Пусть элементарный объем стеклоленты находится при некоторой повышенной температуре $\theta = T - T_0$. Для исследования напряжений и перемещений между волокнами рассматривается простейшая модель стеклоленты (фиг. 1). Упругие стержни в модели расположены в узлах правильной треугольной сетки, направлены по оси x_1 и образуют двоякопериодическую структуру, симметричную относительно плоскостей $x_2 = \text{const}$ и $x_3 = \text{const}$. Пространство между волокнами заполнено вязко-упругим полимерным связующим.



Фиг. 1

Пусть $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \omega_1 e^{i\alpha}$ ($\alpha = 1/3\pi$) — основные периоды сетки, λ — безразмерный радиус волокон, α_a , E_a и ν_a — соответственно коэффициент линейного теплового расширения, модуль Юнга и коэффициент Пуассона для стекловолокон; α_s , E^* и ν^* — коэффициент линейного теплового расширения, операторный модуль и операторный коэффициент Пуассона, характеризующие вязко-упругие свойства полимерного связующего¹, u_i ($i = 1, 2, 3$) — компоненты вектора смещения; в дальнейшем величины, относящиеся к стеклонаполнителю, отмечаются значком a , а к связующему — s .

Решение задачи строится для объема, достаточно удаленного от внешнего края стеклоленты, поэтому при рассмотрении деформаций тела в постоянном температурном поле следует учесть тот факт, что вследствие перераспределения напряжений между наполнителем и связующим при удалении от торцов стеклоленты поперечные сечения $x_1 = \text{const}$ остаются плоскими в среднем

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{11} \rangle &= \alpha_s \theta + \langle \epsilon_{11} \rangle_s = \alpha_a \theta + \langle \epsilon_{11} \rangle_a \\ \langle \epsilon_{11} \rangle &= \frac{1}{F} \int_F dF \epsilon_{11}, \quad F = \omega_1^2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.1)$$

¹ Линейные формы связи между напряжениями и деформациями для полимерных связующих применимы при достаточно низких значениях σ_{in} . Так, например, для эпоксиодно-малеиновой композиции при $T = 285^\circ\text{K}$ напряжения растяжения не должны превышать $\sigma < 0.8\sigma_b$.

Здесь знак $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ обозначает усредненное значение ε_{11} на площади основного параллелограмма периодов F , а $\langle \varepsilon_{11} \rangle_s$ и $\langle \varepsilon_{11} \rangle_a$ — средние значения пока неизвестных деформаций связующего и наполнителя, возникающих вследствие перераспределения напряжений у торцов ленты. Соотношения (1.1) соблюдаются при разных напряжениях растяжения вдоль оси x_1 для наполнителя и связующего причем при отсутствии внешнего силового поля должно соблюдаться условие

$$\int_{F_a} dF \sigma_{11} + \int_{F_s} dF \sigma_{11} = 0 \quad (1.2)$$

Общее решение задачи о тепловом расширении стеклотенты составляется из решения задачи растяжения тела вдоль оси x_1 , построенного без учета взаимодействия между наполнителем и связующим, и решения, учитывающего это взаимодействие при плоском деформированном состоянии тела, когда $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0$.

Решение первой задачи элементарно

$$\langle \sigma_{11} \rangle_a = E_a \langle \varepsilon_{11} \rangle_a, \quad u_2 + iu_3 = -v_a z \langle \varepsilon_{11} \rangle + \alpha_a z \theta \quad (1.3)$$

Аналогичные соотношения имеются и для связующего

$$\langle \sigma_{11} \rangle_s = E^* \langle \varepsilon_{11} \rangle_s, \quad u_2 - iu_3 = -v^* z \langle \varepsilon_{11} \rangle_s + \alpha_s z \theta, \quad z = x_2 + ix_3 \quad (1.4)$$

Решение второй задачи ищется при помощи [1] комплексных потенциалов $\Phi_a(z, t)$, $\Psi_a(z, t)$ и $\Phi_s(z, t)$, $\Psi_s(z, t)$. Краевые условия на контуре каждого волокна L_{mn} (при $z = \tau \in L_{mn}$; $m, n = 0, \pm 1, \dots$) при равенстве напряжений и заданной разности смещений наполнителя и связующего имеют вид [1]

$$\Phi_s(\tau, t) + \overline{\Phi_s(\tau, t)} - e^{2i\theta} \{\tau \Phi_s'(\tau, t) + \Psi_s(\tau, t)\} = \Phi_a(\tau, t) + \overline{\Phi_a(\tau, t)} - e^{2i\theta} \{\tau \Phi_a'(\tau, t) + \Psi_a(\tau, t)\} \quad (1.5)$$

$$(1 - G^*/G_a) \Phi_a(\tau, t) + (1 + G^*/G_a) \overline{\Phi_a(\tau, t)} - (1 - G^*/G_a) e^{2i\theta} \times \\ \times \{\tau \Phi_a'(\tau, t) + \Psi_a(\tau, t)\} - (v^* + 1) \overline{\Phi_s(\tau, t)} = \\ = 2G^* \{(\alpha_s - \alpha_a)(1 + v_a)\theta + (v_a - v^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle_s\} \quad (1.6)$$

Для рассматриваемой структуры условия (1.5), (1.6) можно потребовать только на одном произвольно взятом контуре, если потенциалы $\Phi_s(z, t)$ и $\Psi_s(z, t)$ удовлетворяют соотношениям периодичности и симметрии

$$\Phi_s(z + \omega_j) = \Phi_s(z), \quad \Psi_s(z + \omega_j) = \Psi_s(z) - \overline{\omega_j} \Phi_s'(z) \quad (j = 1, 2) \quad (1.7)$$

$$\Phi_s(\bar{z}) = \overline{\Phi_s(z)}, \quad \Phi_s(-z) = \Phi_s(z), \quad \Psi_s(\bar{z}) = \overline{\Psi_s(z)}, \quad \Psi_s(-z) = \Psi_s(z) \quad (1.8)$$

Условия (1.7) и (1.8) удовлетворяются, когда искомые функции представлены рядами дwoякопериодических (эллиптических) функций \wp Вейерштрасса

$$\Phi_s(z, t) = 2G^* \{(\alpha_s - \alpha_a)(1 + v_a)\theta + (v_a - v^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle_s\} \times \\ \times \left[c_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+2}(t) \frac{\lambda^{2k+2} \wp^{(2k)}(z)}{(2k+1)} \right] \quad (1.9) \\ \Psi_s(z, t) = 2G^* \{(\alpha_s - \alpha_a)(1 + v_a)\theta + (v_a - v^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle_s\} \times \\ \times \left[d_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k+2}(t) \frac{\lambda^{2k+2} \wp^{(2k)}(z)}{(2k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+2}(t) \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!} \right]$$

Следуя методу разделения переменных, аналогично полагаем

$$\begin{aligned}\Phi_a(z, t) &= 2G^* \{(\alpha_s - \alpha_a)(1 + \nu_a)\theta + (\nu_a - \nu^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle_s\} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(t) z^{2n} \\ \Psi_a(z, t) &= 2G^* \{(\alpha_s - \alpha_a)(1 + \nu_a)\theta + (\nu_a - \nu^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle_s\} \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}(t) z^{2n}\end{aligned}\quad (1.10)$$

Если учесть (1.5), (1.6) и условия равенства нулю главного вектора усилий на контуре основного параллелограмма периодов, то неизвестные a_{2n} , b_{2n} , d_{2n} и c_{2n} определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}a_0(t) &= \frac{\eta + (\kappa^* + 1)S}{1 + \eta + \xi\kappa^* + \eta(\kappa_a - 1)G^*/G_a}, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+2}(t) \lambda^{2k+2} \alpha_{0, k} \\ a_{2k}(t) &= \frac{\kappa^* + 1}{1 + \kappa_a G^*/G_a} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+2}(t) \lambda^{2n+2} \alpha_{k, n} \\ \lambda^{2k} b_{2k}(t) &= -\frac{\kappa^* + 1}{1 - G^*/G_a} c_{2k+2}(t) - (2k + 1) \lambda^{2k+2} a_{2k+2}(t) \\ d_{2k+2}(t) &= (2k + 1) c_{2k}(t) - \frac{\kappa^* - \kappa_a G^*/G_a}{\kappa^* + 1} \lambda^{2k} a_{2k}(t) \\ c_0(t) &= 1/2 \xi d_2(t), \quad \xi c_2(t) = d_0(t) \\ c_0(t) &= -\xi \frac{1 + [\kappa^* - 1 - (\kappa_a - 1)G^*/G_a] S}{1 + \eta + \xi\kappa^* + \eta(\kappa_a - 1)G^*/G_a} \\ \frac{\kappa^* + G^*/G_a}{1 - G^*/G_a} c_{2k}(t) &= -\xi c_2(t) \delta_{k1} - \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+2}(t) \lambda^{2n+2k} \alpha_{k-1, n} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+2}(t) [(2n + 2) \lambda^{2n+2k} \beta_{k-1, n} - (2k - 1) \lambda^{2n+2+2k} \alpha_{k, n}] \quad (k = 1, 2, \dots)\end{aligned}\quad (1.11)$$

Здесь $\alpha_{i, k}$ и $\beta_{i, k}$ — коэффициенты разложения [2] эллиптических функций в ряд Лорана, $\xi = \pi \lambda^2 / (\omega_1^2 \sin \alpha)$ и $\eta = 1 - \xi$ — объемное отношение наполнителя и связующего в стеклопластике.

Из формул (1.1), (1.2), (1.9), (1.10) и (1.11) получаются соотношения для определения неизвестных деформаций

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{11} \rangle_s &= -(\alpha_s - \alpha_a) \xi \frac{E_a + 8(1 + \nu_a)(\nu_a - \nu^*) G^* a_0 \theta}{E^*} \\ \langle \varepsilon_{11} \rangle_a &= (\alpha_s - \alpha_a) \left\{ 1 - \xi \frac{E_a + 8(1 + \nu_a)(\nu_a - \nu^*) G^* d_0}{E_1^*} \right\} \theta \\ E_1^* &= \xi E_a + \eta E^* + 8\xi (\nu_a - \nu^*)^2 G^* a_0\end{aligned}\quad (1.12)$$

Смещения тела в плоскости $x_1 = \text{const}$ найдутся по известным формулам [1]

$$\begin{aligned}u_2 + iu_3 &= \alpha_s z \theta - \nu^* z \langle \varepsilon_{11} \rangle_s + (2G^*)^{-1} \{ \kappa^* \varphi_s(z, t) - z \overline{\Phi_s(z, t)} - \overline{\Psi_s(z, t)} \} \\ (\varphi_s(z, t) &= \int dz \Phi_s(z, t), \quad \Psi_s(z, t) = \int dz \Psi_s(z, t))\end{aligned}\quad (1.13)$$

2. Общая линейная форма связи между напряжениями и деформациями для тела, структура которого имеет три плоскости симметрии, запи-

сывается в виде [3,4] (2.1)

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11} \rangle &= \frac{1}{E_1^*} \langle \sigma_{11} \rangle - \frac{\nu_{12}^*}{E_2^*} \langle \sigma_{22} \rangle - \frac{\nu_{13}^*}{E_3^*} \langle \sigma_{33} \rangle + \beta_1^* \theta, & \langle \varepsilon_{12} \rangle &= \frac{1}{G_{12}^*} \langle \sigma_{12} \rangle \\ \langle \varepsilon_{22} \rangle &= -\frac{\nu_{21}^*}{E_1^*} \langle \sigma_{11} \rangle + \frac{1}{E_2^*} \langle \sigma_{22} \rangle - \frac{\nu_{23}^*}{E_3^*} \langle \sigma_{33} \rangle + \beta_2^* \theta, & \langle \varepsilon_{23} \rangle &= \frac{1}{G_{23}^*} \langle \sigma_{23} \rangle \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle &= -\frac{\nu_{31}^*}{E_1^*} \langle \sigma_{11} \rangle - \frac{\nu_{32}^*}{E_2^*} \langle \sigma_{22} \rangle + \frac{1}{E_3^*} \langle \sigma_{33} \rangle + \beta_3^* \theta, & \langle \varepsilon_{31} \rangle &= \frac{1}{G_{31}^*} \langle \sigma_{31} \rangle \end{aligned}$$

Здесь E_i^* , ν_{sn}^* , G_{ik}^* — линейные интегральные операторы, характеризующие вязко-упругие свойства неоднородного тела, β_i^* — операторные коэффициенты теплового расширения. Осреднение напряжений и деформаций производится на площадках, содержащих достаточно большое (свыше 1000) число волокон; для однородного напряженного состояния тела с правильной двоякопериодической структурой усреднение достаточно произвести в пределах основного параллелограмма.

Явный вид оператора теплового расширения находится из формул (1.1), (1.2) и (2.1) при $\langle \sigma_{ik} \rangle = 0$

$$\beta_1^* = \alpha_s - (\alpha_s - \alpha_a) \xi \frac{E_a + 8(1 + \nu_a)(\nu_a - \nu^*) G^* a_0}{E_1^*} \quad (2.2)$$

Чтобы определить β_2^* , β_3^* , рассматриваются средние температурные смещения в плоскости $x_1 = \text{const}$

$$\langle u_2 - iu_3 \rangle = 1/2 z (\beta_2^* + \beta_3^*) \theta + 1/2 \bar{z} (\beta_2^* - \beta_3^*) \theta \quad (2.3)$$

Если сравнить приращение средних перемещений по (2.3) и (1.13) при смещении от точки z к $z + \omega_j$, то

$$\begin{aligned} 1/2 \omega_j (\beta_2^* + \beta_3^*) \theta + 1/2 \bar{\omega}_j (\beta_2^* - \beta_3^*) \theta &= \omega_j \alpha_s \theta - \omega_j \nu^* \langle \varepsilon_{11} \rangle_s + \\ &+ \{ (\alpha_s - \alpha_a) (1 + \nu_a) \theta + (\nu_a - \nu^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle_s \} [(\kappa^* \omega_j - \bar{\omega}_j + \\ &+ 2\bar{\rho}_j) c_0 - \xi (\kappa^* \rho_j + \bar{\omega}_j) c_2] \quad (2.4) \\ &(\rho_1 = 1, \rho_2 = e^{-i\alpha}) \end{aligned}$$

Полагая $j = 1, 2$, находим операторные коэффициенты теплового расширения неоднородного тела

$$\begin{aligned} \beta_2^* &= \alpha_s + (\alpha_s - \beta_1^*) \nu_{21}^* - (\alpha_s - \alpha_a) (1 + \nu_a) (\nu^* - \nu_{21}^*) / (\nu^* - \nu_a) \\ \beta_3^* &= \alpha_s + (\alpha_s - \beta_1^*) \nu_{31}^* - (\alpha_s - \alpha_a) (1 + \nu_a) (\nu^* - \nu_{31}^*) / (\nu^* - \nu_a) \quad (2.5) \end{aligned}$$

Операторные коэффициенты ν_{21}^* и ν_{31}^* находятся при исследовании перемещений стеклоленты при растяжении ее напряжениями $\langle \sigma_{11} \rangle = \text{const}$

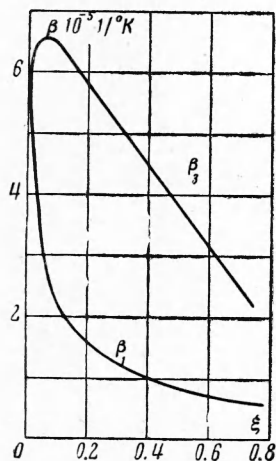
$$\begin{aligned} \nu_{21}^* &= \nu^* - (\nu_a - \nu^*) (\kappa^* + 1) (c_0 - \xi c_2) \\ \nu_{31}^* &= \nu^* - (\nu_a - \nu^*) (\kappa^* + 1) (c_0 + \xi c_2) \quad (\text{при } \alpha = 1/3 \pi, c_2 = 0) \quad (2.6) \end{aligned}$$

Приближенное значение ν_{21}^* (с точностью до 1%) будет

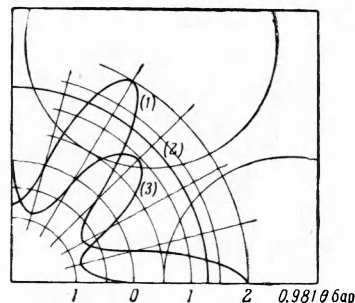
$$\nu_{21}^* = \nu_{31}^* \approx \nu^* - \frac{\xi (\nu^* - \nu_a) (\kappa^* + 1)}{1 + \eta + \xi \kappa^* + \eta (\kappa_a - 1) G^* / G_a}$$

3. Для чисто упругого связующего и наполнителя все операторные величины в вышеприведенных формулах заменяются на упругие константы. Отметим, что физико-механические характеристики стекол в интервале температур до 500° К, а для некоторых спецстекол и выше, изменяются незначительно, в то же время свойства полимерных связующих существенно изменяются при этих же температурах, поэтому данный

случай интересен для оценки влияния вязко-упругих свойств полимера на коэффициенты теплового расширения композиционного материала. На фиг. 2 представлены кривые, характеризующие изменение коэффициентов теплового расширения от объемного содержания стеклонаполнителя. Для рассматриваемого вида структуры значения β_2 и β_3 не отличаются друг от друга.



Фиг. 2



Фиг. 3

Как видно, значение β_1 в среднем в четыре раза меньше β_2 вследствие связей, накладываемых стекловолокнами на смещения вдоль армирования. Все вычисления проведены для стеклоленты, изготовленной из алюмоборосиликатных волокон ($\nu_a = 0.2$, $E_a = 0.981 \cdot 7 \cdot 10^5$ [бар], $\alpha_a = 0.49 \cdot 10^{-5}$ [1/°K] и полимерного связующего на эпоксиодно-малеиновой основе ($\nu_0 = 0.382$, $E_0 = 0.981 \cdot 0.315 \cdot 10^5$ [бар], $\alpha_s = 6 \cdot 10^{-5}$ [1/°K]).

Распределение структурных температурных напряжений в стеклоленте на границе смола — стекло представлено на фиг. 3. Кривые 1, 2 и 3 показывают зависимость нормальных σ_n (при $\xi = 0.736$ и $\xi = 0.227$) и касательных $\sigma_{n\phi}$ (при $\xi = 0.736$) напряжений от угла ориентации площадки ϕ . Средние напряжения на площадках, перпендикулярных армированию, будут

$$\langle \sigma_{11} \rangle_a = E_a \langle \epsilon_{11} \rangle + 8\nu_a G_0 \{ (\alpha_s - \alpha_a) (1 + \nu_a) \theta + (\nu_a - \nu_0) \langle \epsilon_{11} \rangle_s \} a_0$$

$$\langle \sigma_{11} \rangle_s = E_0 \langle \epsilon_{11} \rangle_s - 8\nu_0 G_0 \{ (\alpha_s - \alpha_a) (1 + \nu_a) \theta + (\nu_a - \nu_0) \langle \epsilon_{11} \rangle_s \} a_0 \xi / \eta$$

Ниже приводятся числовые значения напряжений при $\xi = 0.736$ $\langle \sigma_{11} \rangle_a = 0.981 \cdot 0.59 \theta$ бар, $\langle \sigma_{11} \rangle_s = -0.981 \cdot 2.63 \theta$ бар, при $\xi = 0.227$ $\langle \sigma_{11} \rangle_a = 0.981 \cdot 6.1 \theta$ бар, $\langle \sigma_{11} \rangle_s = -0.981 \cdot 1.76 \theta$ бар.

4. На основе экспериментальных исследований простой ползучести образцов из эпоксиодно-малеиновой композиции при $T = 285^\circ$ К найдено, что для достаточно низких напряжений вязко-упругие свойства связующего можно описать на основе теории упругой наследственности. Наиболее простые соотношения получаются при использовании в качестве ядер дробноэкспоненциальных функций. Для этого случая, как известно [5], следует принять

$$E^* = E_0 \{ 1 - \omega_0 \mathcal{E}_{1-\lambda}^* (-\omega) \}, \quad \nu^* = \nu_0 \left\{ 1 + \frac{1-2\nu_0}{2\nu_0} \mathcal{E}_{1-\lambda} (-\omega) \right\} \quad (4.1)$$

где

$$\mathcal{E}_{1-\lambda}^* (-\omega) f(t) = \int_0^t dt' f(t') (t-t')^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^k (t-t')^{k\lambda}}{\Gamma[(k+1)\lambda]} \quad (4.2)$$

В данном случае было найдено

$$\omega = \omega_0 + \omega_\infty, \quad \lambda = 0.5, \quad \omega_0 / \omega = 0.302, \quad \omega = 0.172 \text{ час}^{-\lambda}$$

При более высоких температурах существенно изменяются параметры, характеризующие вязко-упругие свойства смол, и необходимо учитывать изменение α_s .

Исследование системы (1.14) показывает, что для стеклопластиков, когда $G_s / G_a \ll 1$, неизвестные $c_{2k}(t)$ незначительно меняются во времени (за исключе-

