

**ТИПЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ  
ДЕТОНАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ  
АЭРОВЗВЕСИ АЛЮМИНИЯ В КИСЛОРОДЕ**

УДК 532.529+541.126

**А. В. Федоров, Т. А. Хмель**

**Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,  
630090 Новосибирск**

*В работе на основе математической модели детонации аэровзвеси частиц алюминия в кислороде в рамках односкоростного двухтемпературного континуума изучена задача о структуре детонационной волны. Дан анализ типов течения в виде режимов Чепмена — Жуге, пересжатого и недосжатого. По результатам численных экспериментов построена карта режимов движения смеси в плоскости: число Маха детонационной волны, отношение характерных времен тепловой релаксации и горения. Определены: область реализации только пересжатых режимов детонации, многообразие существования недосжатых и пересжатых режимов и область отсутствия стационарных решений. Описаны структурные свойства решений с внутренней особой точкой и недосжатых структурно неустойчивых режимов с седловой особенностью в конечном состоянии. Путем численного моделирования нестационарных детонационных течений показана устойчивость стационарных режимов всех типов относительно малых и конечных возмущений, сохраняющих скорость детонационной волны и конечное состояние.*

В [1, 2] предложена математическая модель детонации частиц алюминия, диспергированных в кислороде, разработанная в рамках односкоростного двухтемпературного приближения механики реагирующей гетерогенной среды. Считалось, что процесс горения описывается кинетическим уравнением аррениусовского типа, с линейной зависимостью источникового члена от относительной массовой концентрации твердых частиц, с учетом их неполного выгорания. Эта модель адаптирована к экспериментально наблюдаемому в [3] явлению распространения детонационно-подобного режима горения в газозвеси алюминия путем сравнения теории и эксперимента по зависимости скорости детонационной волны от начальной концентрации частиц. На основе данного подхода находилась область существования решения, определяющего скорость фронта в зависимости от начальных параметров смеси и обеспечивающего выход на режим нормальной детонации Чепмена — Жуге. Проанализирована конечная стационарная точка, в которой относительная скорость смеси равна равновесной скорости звука. Даны численные иллюстрации течений двух типов: Чепмена — Жуге и пересжатого; определено условие монотонности профиля температуры газа в смеси.

В [4] изучена задача о структуре волны сильной детонации в релаксирующем горючем газе с колебательной релаксацией и модельным уравнением горения. Были проанализированы типы конечных равновесных состояний, которые оказались узлами, седлами и седло-

узлами, а также внутренние особые точки. Эти точки в фазовой плоскости характеризуются тем, что числитель и знаменатель в уравнении для приращения скорости обращаются в нуль; число Маха, определяемое по замороженной скорости звука, равно единице. Оказалось, что при определенных условиях на скорость детонации и отношение времен релаксации внутренняя особая точка является седловой. Прямой перенос результатов работы [4] на математическую модель гетерогенной детонации пыли алюминия невозможен вследствие различия кинетических уравнений теплообмена и горения.

В [5] изучены вопросы ударно-волнового инициирования детонации смеси кислорода и частиц алюминия. Проблема рассматривалась как задача о распаде разрыва в реакционноспособной смеси. Прямым численным моделированием исследованы процессы выхода на режим Чепмена — Жуге и получена реальная структура течения в виде лидирующей ударной волны с примыкающей волной разрежения. При этом зона горения моделировалась несколькими ячейками конечно-разностной сетки, и тонкая структура течения в этой зоне при изменении релаксационных параметров анализу не подвергалась.

Ниже методами динамических систем на плоскости исследуется проблема стационарной гетерогенной детонации частиц Al в кислороде в полной постановке. Полученные стационарные решения проверены на устойчивость относительно малых и конечных возмущений в рамках одномерного нестационарного подхода.

**Стационарная задача о детонации газозвеси Al.** Рассмотрим пространство, заполненное смесью кислорода и мелких частиц алюминия. По смеси распространяется ДВ, за фронтом которой частицы воспламеняются при некоторой температуре (температуре срыва теплового равновесия) и начинают гореть. Уравнения, описывающие течение газозвеси в системе координат, сопутствующей ДВ, имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \rho u &= \rho_0 u_0 = c_1, & p + c_1 u &= p_0 + c_1 u_0 = c_2, \\ e + p/\rho + u^2/2 &= e_0 + p_0/\rho_0 + u_0^2/2 = c_3, & u \frac{dT_2}{dy} &= -\frac{T_2 - T}{\tau_T}, \\ u \frac{d\xi}{dy} &= -\frac{\xi - \xi_k}{\tau_\xi} \exp(-E_2/RT_2), & e &= (1 - \xi)c_{v1}T + \xi c_{v2}T_2 + Q\xi, \\ p &= (1 - \xi)RT/W, & W &= 1/\rho - \xi/\rho_{22}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho_{22}$  — истинная плотность частиц,  $\rho$  — средняя плотность,  $p$  — давление,  $u$  — скорость,  $e$  — внутренняя энергия смеси,  $\xi$  — относительная массовая концентрация частиц,  $\xi_k$  — доля несгоревших частиц,  $T$ ,  $T_2$  — температуры газа и частиц соответственно,  $\tau_T$ ,  $\tau_\xi$  — времена релаксации теплообмена и горения,  $c_{v1}$ ,  $c_{v2}$  — удельные теплоемкости газа и частиц,  $E_2$  — энергия активации,  $Q$  — интегральное тепловыделение реакции горения. Обозначим  $T_2 = dT_2/dx$ ,  $\dot{\xi} = d\xi/dx$ ,  $\beta = \tau_T/\tau_\xi$ ,  $dx = udy/\tau_T$ ,  $M = M_f$  ( $M_f$ ,  $M_e$  — числа Маха, определяемые соответственно по замороженной и равновесной скоростям звука). В дальнейшем индекс  $f$  будет всегда указывать на замороженную,  $e$  — на равновесную величины. Индексом  $k$  обозначается конечное состояние, а индексом  $0$  — состояние перед фронтом ДВ. Введем также показатели адиабат  $\gamma_1 = 1 + R/c_{v1}$ ,  $\gamma_0 = \gamma(\xi_0)$ ,  $\gamma_k = \gamma(\xi_k)$ , где  $\gamma(\xi) = 1 + (1 - \xi)R/[c_{v1}(1 - \xi) + c_{v2}\xi]$ .

Система уравнений (1) может быть сведена к двум обыкновенным дифференциальным

уравнениям

$$\frac{dM}{dx} = \frac{(\gamma_1 - 1)(1 + \gamma_1 M^2)^3}{2A_0^2 M(M^2 - 1)} [\dot{\xi}(c_{v2} T_2 + Q) + \xi c_{v2} \dot{\xi}_2], \quad (2)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = -\beta(\xi - \xi_k) \exp(-E_2/RT_2), \quad A_0 = c_0 \frac{1 + \gamma_1 M_0^2}{M_0}.$$

Для (2) поставим задачу: найти  $M$ ,  $\xi$  (разрывную и непрерывную функции своего аргумента) и константы  $c_1$ ,  $\beta$  такие, что существуют решение краевой задачи

$$M = M_0, \quad \xi = \xi_0 \text{ при } x = -0;$$

$$M, \dot{\xi} \rightarrow 0, \quad M \rightarrow M_{fk}, \quad \xi \rightarrow \xi_k < \xi_0 < 1 \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

в виде решения Чепмена — Жуге (CJ) ( $M_{fk} < 1$ ,  $M_{ek} = 1$ ) или решения типа пересжатой детонации ( $M_{ek} < 1$ ) или недосжатой детонации ( $M_{ek} > 1$ ).

**Исследование особых точек системы (2).** *Внутренняя особая точка.* Остановимся на исследовании режимов течений среды, которые описываются при наличии внутренних особых точек. Для этого приравняем нулю числитель и знаменатель первого из уравнений (2). В результате получим соотношение, которому должны удовлетворять величины  $\xi$ ,  $\beta$  в звуковой точке по замороженной скорости звука (в простейшем случае  $E_2 = 0$ )

$$\frac{c_4}{\xi} - \frac{c_5}{1 - \xi} - Q + \beta \frac{c_4(\xi - \xi_k)}{\xi^2} = 0, \quad (3)$$

где  $c_4 = c_3 - A_0^2/2(\gamma_1 - 1)$ ,  $c_5 = c_{v2} A_0^2/(R\gamma_1(1 + \gamma_1)^2)$ . Сумму первых трех слагаемых в (3) можно представить в виде

$$\frac{c_4}{\xi} - \frac{c_5}{1 - \xi} - Q = \frac{Q(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(1 - \xi)\xi},$$

где  $\xi_{1,2} = (Q + c_5 + c_4 \pm \sqrt{(Q + c_5 + c_4)^2 - 4c_4Q})/2Q$ , откуда

$$\beta = -\frac{Q(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi}{c_4(\xi - \xi_k)(1 - \xi)} - \frac{\beta_1(\xi)}{\beta_2(\xi)}.$$

Величины  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  действительны, поскольку подкоренное выражение представимо в виде  $(c_4 + c_5 - Q)^2 + 4c_5Q > 0$ , при этом  $\xi_2 < 1$ ,  $\xi_1 > 1$ . Последняя оценка справедлива в силу того, что  $\xi_2$  — точка пересечения кривой  $c_4/\xi$  и ее ветви  $g(\xi) = c_5/(1 - \xi) + Q$ , лежащей левее 1, а  $\xi_1$  — точка пересечения кривой  $c_4/\xi$  и ветви  $g(\xi)$ , лежащей правее 1.

Зависимость  $\beta(\xi)$  схематически показана на рис. 1 ( $\xi_k > \xi_2$ ), где  $\beta_{\max}$  — максимальное значение  $\beta(\xi)$  на интервале  $(0, \xi_2)$ ,  $\beta_{\min}$  — минимальное на  $(\xi_k, 1)$ . Физический смысл имеют значения  $\xi$ , определенные при  $\beta \geq \beta_{\min}$ , когда могут быть найдены два кратных и одно простое значения  $\xi$ . Аналогично для  $\xi_k < \xi_2$  решения могут существовать при  $\beta > 0$ ,  $\xi > \xi_2$ . Из проведенных рассуждений следует, что система уравнений (2) может иметь внутреннюю особую точку, в которой  $M = 1$ .

Для анализа решения в ее окрестности перейдем в плоскость  $(u, \xi)$ , где (2) преобразуется к виду

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{A(u, \xi)}{B(u, \xi)}, \quad (4)$$

где

$$A = \Delta\xi(c_{v2}T_2 + Q) + \exp(E_2/RT_2)\xi c_{v2} \frac{T_2 - T}{\beta}, \quad B = \frac{(\gamma_1 + 1)}{(\gamma_1 - 1)}(u - u_f)\Delta\xi, \quad \Delta\xi = \xi - \xi_k.$$

Уравнение для звуковой линии имеет решение

$$u = u_f = c_f = \frac{\gamma_1}{(1 + \gamma_1)}c_{21}, \quad c_{21} = c_2/c_1.$$

Определим тип этой точки, вычислив коэффициенты матрицы Якоби. Уравнение для определения собственных чисел имеет вид

$$\lambda^2 - \lambda A_u - B_u A_\xi = 0.$$

Знак  $B_u A_\xi$  определяется некоторой величиной  $C$ . С учетом  $A = 0$

$$C = Q - \frac{c_{v2}T}{\beta(1 - \xi)} + c_{v2}T_2 \frac{\xi_k}{\xi}.$$

Тогда, если

$$Q > \frac{c_{v2}T}{\beta(1 - \xi)} - c_{v2}T_2 \frac{\xi_k}{\xi},$$

то внутренняя особая точка является седлом, в противном случае может быть узлом или фокусом. Проведенные численные оценки показывают, что в рамках значений  $Q$ , принятых в [1, 2] и согласующихся с [3], эта точка всегда будет седловой.

*Конечная стационарная точка.* Рассмотрим стационарное состояние  $\xi = \xi_k$ ,  $T_2 = T = T_k$  в плоскости  $\xi, T_2$ . В [1, 2] изучен тип состояния равновесия при  $u_k = c_e$  (режим Чепмена — Жуге). Проведем подобные исследования в общем случае  $u_k \neq c_e$ . Уравнение, описывающее течение в плоскости  $\xi, T_2$ , имеет вид

$$\frac{d\xi}{dT_2} = -\frac{\beta(\xi - \xi_k) \exp(-E_2/RT_2)}{T - T_2}. \quad (5)$$

Аналогично, определив матрицу Якоби, получим

$$\lambda_1 = -\beta \exp(-E_2/RT_2) < 0, \\ \lambda_2 = -\frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_k + 1)(u_e - u)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_k - 1)(u_f - u)}, \quad u_e = \frac{\gamma_k}{(\gamma_k + 1)}c_{21}.$$

Если  $u_k = c_e$ , то имеем режим Чепмена — Жуге с  $\lambda_2 = 0$  и  $\lambda_1 < 0$ , определяемый сложным состоянием равновесия [1, 2]; при  $u_k > u_f$  или  $u_k < u_e$  устойчивые узлы, а в интервале  $u_k \in (u_e, u_f)$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  конечная особая точка — седло.

Представляет интерес рассмотреть сценарии реализации этого и остальных типов конечных состояний. Для анализа воспользуемся представлением процесса детонации на  $p, v$ -диаграмме (рис. 2). Согласно общепринятой теории, в которой ДВ представляет собой замороженную ударную волну с примыкающей к ней зоной химической реакции, множество состояний, реализуемых на фронте ДВ, находится на ударной адиабате  $f$ , проходящей через начальную точку  $(p_0, v_0)$ . Последующий процесс горения развивается вдоль луча Рэлея — Михельсона  $RM$  и заканчивается на детонационной адиабате  $e$  (множество конечных состояний). В случае касания луча  $RM$  адиабаты  $e$  имеется единственное конечное состояние  $N$ , соответствующее режиму нормальной детонации Чепмена — Жуге. Если луч пересекает кривую дважды, теоретически возможны два конечных состояния:  $S$  — сильная

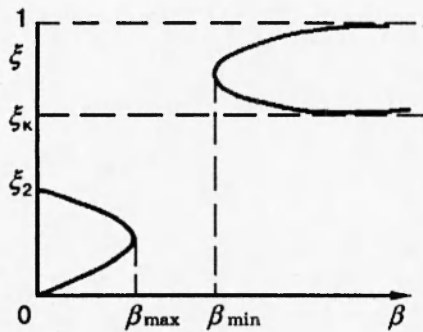


Рис. 1

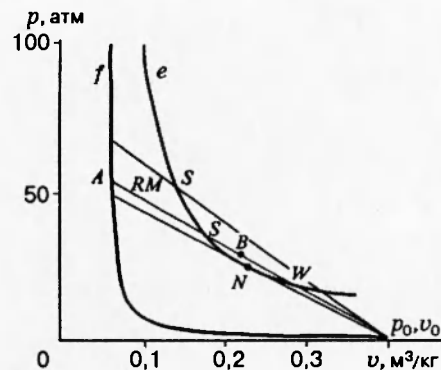


Рис. 2

детонация (верхняя ветвь) и  $W$  — слабая детонация (нижняя ветвь). Вследствие дисперсии скорости звука в конечном состоянии в точке Чепмена — Жуге  $M_e = 1$ ,  $M_f = M_N < 1$ , в состоянии сильной (пересжатой) детонации  $M_e < 1$ ,  $M_f < M_N < 1$ ; в слабой (недосжатой)  $M_e > 1$ ,  $M_f > M_N$ . Очевидно, существует интервал начальных значений скорости ДВ (или  $M_{e0}$ ), при которых  $M_e > 1$ ,  $M_N < M_f < 1$ , и конечная точка является седловой (см. также [6]).

Рассмотрим картину выхода на это конечное состояние. Из точки  $A$  состояние перемещается вдоль луча  $RM$  и приходит в точку  $S$ . В зависимости от соотношения характерных времен релаксации и горения  $\beta$ , может возникнуть точка поворота  $B$  (минимум давления и плотности). В указанном интервале значений  $M_{e0}$  с увеличением  $\beta$  точка  $B$  приближается к точке  $W$ , и при некотором критическом значении  $\tilde{\beta}$ , зависящем от  $M_{e0}$ , точки  $B$  и  $W$  сольются, реализуется недосжатая детонация с конечным состоянием  $W$ . При  $\beta > \tilde{\beta}(M_0)$  стационарных решений не существует. С увеличением угла наклона луча  $RM$  (значения  $M_{e0}$ ) при некотором  $M_{e0} = M_{e**}$  на бесконечности появляется особая точка  $M_f = 1$ . При  $M_{e0} > M_{e**}$  седловая особенность переходит внутрь области, и через нее по сепаратрисе можно пройти в сверхзвуковое конечное состояние  $W$ , которое уже является устойчивым узлом ( $M_e > 1$ ,  $M_f > 1$ ). Дальнейшее увеличение угла наклона  $RM$  приводит к тому, что внутренняя особая точка асимптотически уходит в бесконечность, и при превышении скорости ДВ некоторого порогового значения ( $M_{e0} \geq M_{e*}$ ) особых точек внутри области не возникает ни при каких  $\beta$ . Следовательно, реализуются только конечные состояния типа  $S$ .

**Обсуждение численных результатов.** Исходные данные для численных расчетов брались из [1]. Начальное состояние характеризуется значениями

$$p_0 = 10^5 \text{ кг/(м} \cdot \text{с}^2), \quad T_0 = 300 \text{ К}, \quad \xi_0 = 0,55, \quad \zeta_k = 0,1\xi_0,$$

величина  $Q$  в соответствии с [3] для частиц радиусом  $10^{-5}$  м определялась равной  $Q = 2,94 \cdot 10^6$  Дж/кг, теплоемкости газа и частиц  $c_{v1} = 914$  Дж/(кг · К),  $c_{v2} = 880$  Дж/(кг · К), плотность частиц  $\rho_{22} = 2700$  кг/м<sup>3</sup>. При проведении численных расчетов в задаче (1) исследовалось влияние параметров  $\tau_\xi$ ,  $\tau_T$  на картину течения. Оказалось, что при малых временах релаксации процессов теплообмена и горения ( $\tau_T = \tau_\xi = 10^{-5}$  с) и при скорости детонационной волны  $u_0 = 1548$  м/с, соответствующей режиму Чепмена — Жуге, реализуется режим нормальной детонации Чепмена — Жуге [1–3]. Конечное состояние характе-

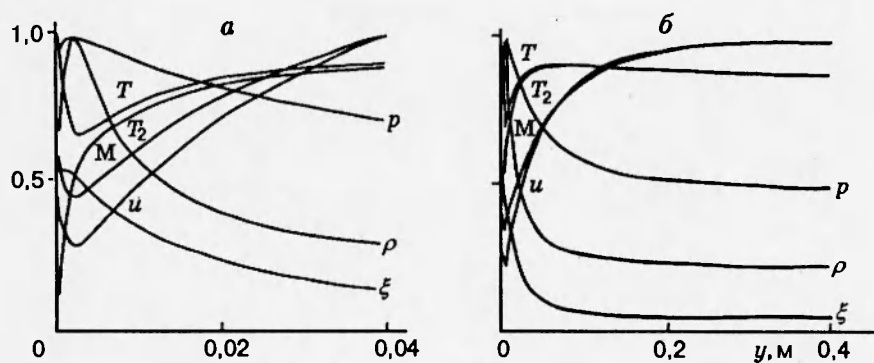


Рис. 3

ризуется числом Маха  $M_e = 1,000$ ,  $M_f = 0,993$ . Температуры фаз пришли в неустойчивое равновесие гораздо раньше:  $T = T_2 = 2223$  К при  $y = 0,07$  м (точка промежуточного равновесия), а затем начали медленно убывать до  $T_k = 2148$  К. Зона выгорания определяется при  $\xi \approx 0,06$  (сгорело 90 %) и составляет 0,13 м.

Локальное поведение параметров течения непосредственно за фронтом замороженной ДВ показано на рис. 3 для  $y \leq 0,04$  м (а) и для  $y \leq 0,4$  м (б). Параметры здесь отнесены к максимальным значениям в области. Качественные особенности поведения течения в режиме Чепмена — Жуге описаны в [1, 2]. Здесь отметим, что горение начинается за фронтом волны после того, как частицы нагреются до некоторой критической температуры  $T_*$ . В течение времени задержки воспламенения  $\xi = \xi_0$  (см. рис. 3, а). После «включения» горения температуры фаз и скорости растут. Фиксируем скорость  $u_0 = 1548$  м/с,  $\tau_T = 10^{-5}$  с, но  $\tau_\xi = 10^{-3}$  с, т. е. увеличиваем на два порядка время горения. В этом случае температуры фаз устанавливаются на равновесном уровне также при  $y \approx 0,07$  м и далее идет горение частиц в рамках равновесного по температурам течения в области, значительно большей по масштабам (на два порядка). Здесь также реализуется режим Чепмена — Жуге с тем же конечным состоянием:  $T_2 = T = T_k = 2148$  К,  $\xi = \xi_k = 0,055$ . Напротив, при быстром сгорании частиц ( $\tau_\xi = 10^{-5}$  с), но медленной тепловой релаксации ( $\tau_T = 10^{-4}$  с) и  $u_0 = 1548$  м/с непосредственно за фронтом ДВ имеется протяженная зона течения с  $\xi = \xi_0$ , так как здесь теплообмен между фазами затянут и реакция горения не начинается до достижения температурой частиц значения  $T_*$ . При  $y \approx 0,01$  м начинается горение и далее реализуется нормальный режим Чепмена — Жуге. При этом длина зоны выгорания  $y \approx 0,17$  м.

Итак, в перечисленных выше случаях в области изменения параметра  $\beta = \tau_T / \tau_\xi \leq 10,5$  решение выходит на одно конечное состояние, соответствующее режиму Чепмена — Жуге.

Увеличение параметра  $\beta$  при  $u_0 = 1548$  м/с, начиная с  $\beta_0 = 10,5$ , приводит к появлению «линии запирания потока» [6] ( $M_f = 1$ ,  $\xi(c_{v2}T_2 + Q) + \xi c_{v2}T_2 \neq 0$  в (2)). Это свидетельствует о том, что при  $\beta > \beta_0$  и  $M_{0e} = M_{CJ}$  стационарных решений нет. Однако, при  $M_{0e} = M_{CJ}$  и тех же  $\beta$  реализуются пересжатые режимы. Представляет интерес рассмотреть поведение решений в окрестности границы, отделяющей область стационарных режимов. Как было определено выше, в интервале  $M_{CJ} < M_{0e} < M_{e**}$  конечное состояние недосжатой детонации (точка W) является структурно неустойчивой седловой особенностью. Для параметров, соответствующих процессу горения частиц алюминия в кислороде, ввиду малой дисперсии скорости звука конечного состояния численный анализ решения в

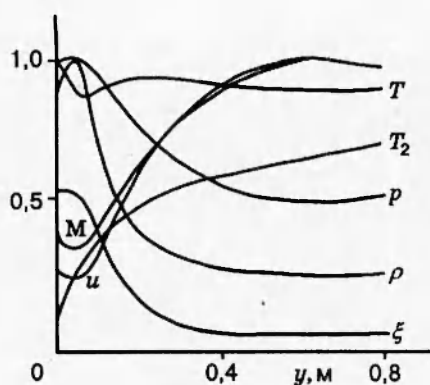


Рис. 4

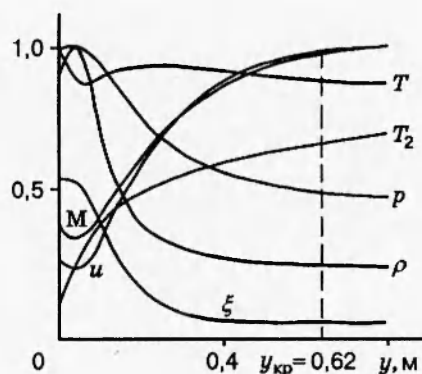


Рис. 5

указанном интервале  $M_{0e}$  затруднителен, поэтому расчет проведен для вещества с  $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_0 = 1,076$ ,  $\gamma_k = 1,336$ . Расчет с  $M_0 = 7,68$  и соответствующими конечными значениями  $M_{fk} = 0,742$ ,  $M_{ek} = 0,909$  в состоянии  $S$  и  $M_{fk} = 0,901$ ,  $M_{ek} = 1,103$  в состоянии  $W$  показал, что при  $\beta < \tilde{\beta} = 10,712$  интегрирование уравнений (1) приводит в точку  $S$  (пересжатая детонация). По мере приближения  $\beta$  к  $\tilde{\beta}$  в решении появляется и приобретает все большую протяженность участок со значениями параметров, соответствующими состоянию  $W$ , с которого затем решение переходит в точку  $S$ . На рис. 2 это отражается в том, что точка  $B$ , приближаясь к  $W$ , удерживается «в области ее притяжения» все более длительное время. При  $\beta > 10,712$  стационарных решений нет («запирание потока»). В силу седлового характера особенности в точке  $W$  достичь точку  $W$  можно при единственном значении  $\beta = \tilde{\beta}(M_{0e})$ , которое лежит на границе области стационарности. Получить численное решение при  $\beta = 10,712 \approx \tilde{\beta}(M_{0e})$  удастся путем склеивания части интегральной кривой, примыкающей к точке  $B$  при  $0 < y \leq 0,5$  (при этом участок постоянных значений  $M_f = 0,90$ ,  $M_e = 1,10$  составляет  $0,26 < y \leq 0,5$ ), и ее асимптотического продолжения при  $y > 0,5$ .

Дальнейшее увеличение  $M_{0e}$  приводит к тому, что конечное состояние  $W$  (недожатая детонация) становится сверхзвуковым как по равновесной, так и по замороженной скорости звука (устойчивый узел) и может быть достижимо только путем перехода по сепаратрисе через внутреннюю особую точку  $M_f = 1$ ,  $\xi(c_{v2}T_2 + Q) + \xi c_{v2}T_2 = 0$ . Например, для смеси частиц алюминия и кислорода при  $u_0 = 1558,95$  м/с и  $\beta = 15$  реализуется пересжатый режим со значением  $M_f$  в точке максимума, близким к единице (рис. 4). Здесь можно отметить, что если режим нормальной детонации Чепмена — Жуге характеризуется прилегающей к ДВ зоной течения, где давление растёт до локального максимума, то для продуктов детонации давление за фронтом в этой зоне меняется слабо. Дальнейшее увеличение  $\beta$  при фиксированной скорости потока приводит к возможности выхода в сверхзвуковое стационарное состояние низкоскоростной детонации. Этот режим течения изображен на рис. 5, в точке  $y = 0,62$  м осуществляется переход через замороженную скорость звука, в конечном состоянии  $M_{fk} = 1,102$ . В отличие от предыдущего типа течения здесь скорость течения смеси не имеет локальных максимумов и изменяется монотонно. Приближенное численное решение получено путем склеивания ветвей, расположенных ниже и выше особой точки вблизи искомой сепаратрисы.

По результатам численных расчетов в плоскости  $M_{e0}, \beta$  построена карта детонацион-

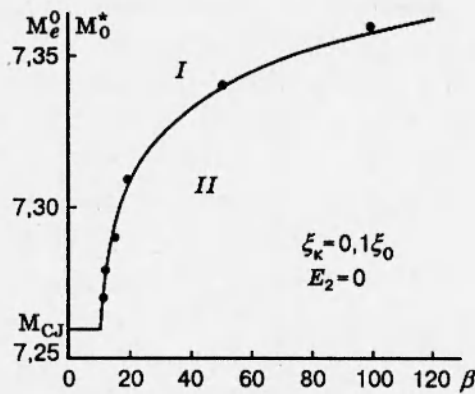


Рис. 6

ных режимов течения аэровзвеси алюминия в кислороде (рис. 6) (см. также [7]). Область I ограничена снизу при  $\beta \in (0, \beta_0)$  прямой  $M_{e0} = M_{CJ}$  и кривой  $\beta = \bar{\beta}(M_{e0})$ , которая при  $\bar{\beta} \rightarrow +\infty$  имеет асимптоту  $M_{e0} = M_{e*}$ . Внутри области I определены только пересжатые режимы; на ее границе при  $M_{e0} = M_{CJ}$  и  $\beta < \beta_0$  — нормальные режимы Чепмена — Жуге, при  $M_{CJ} < M_{e0} < M_{e**}$  — недосжатые, при  $M_{e0} > M_{e**}$  — недосжатые и пересжатые с внутренней особой точкой. В области II стационарных течений нет, что соответствует представлению о том, что скорость Чепмена — Жуге — минимально возможная скорость распространения детонации в аэровзвеси. Приведенный на рис. 6 график получен при  $\xi_k = 0,1\xi_0$ ,  $E_2 = 0$ ,  $\beta_0 \approx 10,5$ . При  $E_2 \neq 0$  картина аналогичная, отличаются лишь критические значения ( $\beta_0 \approx 13$  при  $E_2 = 10^6$ ).

Определим величину  $M_{e*}$ , фигурирующую в определении области I, из следующих соображений. При  $\beta = \tau_T/\tau_\xi \rightarrow \infty$  положение особой точки  $\xi$  приближается к  $\xi_k$  (см. рис. 1). Тогда асимптота на рис. 6  $M_{e0} = M_{e*}$  определяется числом Маха, обеспечивающим в особой точке  $u = c_f = \gamma_1 c_{21}/(\gamma_1 - 1)$  при  $\xi = \xi_k$ , но  $T_2 = T_0$ . (В [8] условие  $M_{e0} > M_{e*}$  трактуется как достаточное условие отсутствия особых точек в области.) Указанное число Маха определяется из уравнения

$$D = \gamma_1^2 c_{21}^2 - 2(\gamma_1^2 - 1)(c_3 - Q\xi_k - c_{v2}T_0\xi_k) = 0. \quad (6)$$

Условие (6) эквивалентно

$$\frac{(\gamma_0 M_{e*}^2 - \gamma_1)^2}{\gamma_0^2 M_{e*}^2} = 2(\gamma_1^2 - 1) \left( \frac{Q(\xi_0 - \xi_k)}{c_{0e}^2} + \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_0(\gamma_0 - 1)(\gamma_1 - 1)} \left( 1 - \frac{\xi_k}{\xi_0} \right) \right), \quad (7)$$

тогда как число Маха, определяемое условием Чепмена — Жуге  $u_k = c_{ek} = \gamma_k c_{21}/(\gamma_k + 1)$ , удовлетворяет соотношению

$$\frac{(\gamma_0 M^2 - \gamma_k)^2}{\gamma_0^2 M_{CJ}^2} = 2(\gamma_k^2 - 1) \left( \frac{Q(\xi_0 - \xi_k)}{c_{je}^2} + \frac{\gamma_k - \gamma_0}{\gamma_0(\gamma_0 - 1)(\gamma_k - 1)} \right). \quad (8)$$

Видно, что при полном выгорании  $\xi_k = 0$  эти два числа совпадают, так как  $\gamma_k = \gamma_1$ . Следовательно, в этом случае во всей области существования стационарных решений реализуется либо режим Чепмена — Жуге, либо пересжатые режимы. При неполном сгорании частиц ( $\xi_k = 0,1\xi_0$ ) и принятой в [1] (в соответствии с экспериментальными данными [3]) зависимости  $Q(\xi_0)$  во всем интервале значений  $\xi_0 \in (0,5; 0,6)$  полученное из (6) значение  $M_{e*} > M_{CJ}$ . Следовательно, недосжатые режимы возможны.



**Исследование устойчивости стационарных режимов детонации частиц Al в кислороде.** Вопросам устойчивости детонационных течений посвящена обширная литература, в которой рассматриваются различные подходы — от линейной теории развития бесконечно малых возмущений [9] до анализа физических механизмов взаимодействия энтропийных и звуковых волн [10]. Понятие устойчивости плоских ДВ носит в некоторой степени условный характер. Согласно экспериментальным данным, фронт плоской ДВ представляет собой сложные трехмерные ячеистые структуры, что указывает на неустойчивость плоского фронта относительно пространственных возмущений. Можно, тем не менее, рассматривать плоскую ДВ как некоторое осредненное состояние, тогда понятие устойчивости может иметь смысл и в одномерной постановке как устойчивость определенного стационарного режима [11]. С развитием вычислительных средств получило распространение исследование устойчивости на основе прямого численного моделирования нестационарных детонационных течений [11, 12]. Такой подход не дает критериев, связанных с частотными характеристиками вносимых возмущений, однако позволяет проследить процесс развития малых возмущений и возмущений конечной амплитуды и определить сценарий перехода к неустойчивости [12].

Уравнения механики реагирующей гетерогенной среды, записанные в консервативной форме для средних величин и дополненные уравнениями кинетики, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u^2 + p/\rho)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u(E + p/\rho)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{dT_2}{dt} &= \frac{\partial T_2}{\partial t} + u \frac{\partial T_2}{\partial x} = -\frac{1}{\tau_T}(T_2 - T), \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\tau_\xi}(\xi - \xi_\kappa) \exp(-E_2/RT_2), & p &= (1 - \xi)RT/W, \end{aligned} \quad (9)$$

$$W = 1/\rho - \xi/\rho_{22}, \quad e = (1 - \xi)c_{v1}T + \xi c_{v2}T_2 + Q\xi, \quad E = e + u^2/2.$$

Для решения уравнений (9)  $\varphi = (\rho, u, T, T_2, \xi)$  ставилась задача Коши:

$$t = 0, \quad \varphi = \begin{cases} \varphi_0, & 0 < x < l, \\ \varphi_{ini}(x), & -L < x \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Исследуемая область течения включала в себя участок  $0 < x < l$  невозмущенного фона перед фронтом с параметрами  $\rho = \rho_0, u = 0, T = T_0, T_2 = T_0, \xi = \xi_0$ , затем — ударный скачок в точке  $x = 0$  с примыкающей к нему зоной горения  $-L < x < 0$ . Значения на границе области  $x = -L$ , соответствующей конечной стационарной точке, поддерживались в соответствии с каждым из типов детонационного течения. При такой постановке для самоподдерживающихся режимов (недожатого и Чепмена — Жуге) возмущения внутрь области не переносятся. При пересжатом режиме на этой границе предполагается воздействие некоторого поршня, так как в свободной детонации фронт ДВ ослабляется догоняющей ее волной разрежения. В качестве  $\varphi_{ini}(x)$  использовались условия трех типов.

I. Стационарное решение, полученное путем численного интегрирования уравнений (1). Здесь, очевидно, присутствуют малые возмущения всех длин волн, обусловленные дискретизацией и ошибками аппроксимации.

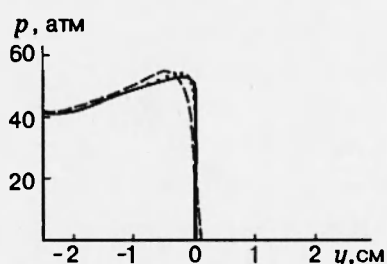


Рис. 7

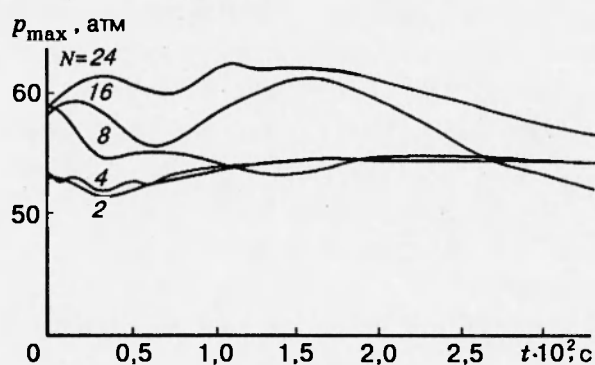


Рис. 8

II. Стационарное решение с наложенным возмущением конечной амплитуды вида

$$\rho_{ini}(x) = \rho_{st}(x)(1 + A \sin \omega(x - x_k)), \quad \xi(x) = \xi_{st}(x), \quad (11)$$

остальные параметры начального состояния определялись из законов сохранения (1), при этом предполагалось, что скорость ДВ не возмущалась. Такое состояние имеет физический смысл при значениях амплитуды  $A \leq 0,18$ . При увеличении  $A$  температура  $T_2$ , определяемая из уравнения энергии, в некоторых точках принимает отрицательные значения, не имеющие физического смысла.

III. Стационарное решение с наложенным возмущением вида (11), дополненное условием  $T_2 = T_{2st}(x)$ , но уравнение энергии не принималось во внимание (что эквивалентно некоторому мгновенному дополнительному тепловыделению  $Q(x)$ ). Здесь оказалось, что возмущенное решение имеет физический смысл вплоть до значений амплитуд 0,4–0,5 (в зависимости от  $\omega$ ).

Численное интегрирование уравнений (9) проводилось с использованием конечно-разностной схемы класса TVD [13] с учетом поправок, обобщающих применение схемы для исследования реальных газов [14], и пакета программ GEAR [15] для интегрирования уравнений кинетики на каждом временном шаге. Применяемый метод позволяет получить высокое разрешение на фронте ДВ: лидирующий скачок занимает 2–3 ячейки конечно-разностной сетки, скорость ДВ передается с точностью 0,1 %. (Решение получено на сетке в 320 ячеек на всю расчетную область.)

Чтобы исключить сомнения в применимости монотонизирующей схемы для исследования устойчивости, проводился контрольный расчет на этой же сетке по схеме Мак-Кормака, дающей более грубое разрешение на фронте и с большей ошибкой, чем в TVD-схеме, представляющей величину максимального давления за фронтом ДВ. На рис. 7 сплошной линией показано распределение давления в стационарном режиме Чепмена — Жуге, штриховой — решение, полученное по схеме Мак-Кормака с начальными данными типа I и удерживаемое на протяжении 6–10 калибров, а точками — аналогичное установившееся решение, полученное по схеме TVD. Численные расчеты, выполненные по схемам Мак-Кормака и TVD, привели к идентичным результатам.

При всех рассмотренных типах начальных данных и значениях амплитуды возмущений, не превышающих критического уровня, при котором начальные данные имеют физический смысл, в широком диапазоне частот (длина волны возмущения варьировалась от

четырёх ячеек конечно-разностной сетки до размера всей области) численное интегрирование нестационарных уравнений приводит к выходу на стационарное решение. Динамика развития возмущений для режима Чепмена — Жуге показана на рис. 8 в виде зависимости максимального давления за фронтом ДВ от времени (начальные данные типа III, схема Мак-Кормака,  $A = 0,44 \div 0,47$ ,  $N$  — число точек на полупериод возмущения). Видно, что коротковолновые возмущения затухают быстрее, но и при длинноволновых тенденция к сходимости заметна (дальнейшее интегрирование при  $N = 16$  и  $24$  также приводит к затуханию возмущений и выходу на стационарное решение при  $t \sim 0,1$  мс). Аналогичные результаты получены для пересжатых режимов, для режимов с внутренней особой точкой (пересжатых и недосжатых), а также для недосжатого режима с конечной седловой особой точкой (для вещества с параметрами, указанными выше).

Из приведенных результатов следует, что плоские детонационные волны рассмотренных типов, когда они существуют как стационарные решения, устойчивы относительно одномерных возмущений малых и конечных амплитуд, если при этом не возмущается скорость фронта ДВ, т. е. не меняется конечное состояние. В работе не удалось выявить автоколебательные детонационные режимы, полученные, например, в [11, 12]. Причиной этого, кроме существенных различий в кинетике процесса за фронтом ДВ, может также являться тот факт, что, в отличие от [12], взятые в соответствии с экспериментальными данными [3] величины, характеризующие тепловыделение, не варьировались.

Таким образом, в работе на основе математической модели гетерогенной детонации газовзвеси частиц алюминия в кислороде дан анализ типов течения в виде режимов Чепмена — Жуге, пересжатого и недосжатого; по результатам численных экспериментов построена карта режимов движения смеси в плоскости  $M_{e0}, \beta$ , где определены область реализации только пересжатых режимов детонации, многообразие существования недосжатых и пересжатых режимов и область отсутствия стационарных решений; описаны структурные свойства решений с внутренней особой точкой и недосжатых структурно неустойчивых режимов с седловой особенностью в конечном состоянии; показана устойчивость стационарных режимов всех типов относительно малых и конечных возмущений, сохраняющих скорость ДВ и конечное состояние.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-16405).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Еремеева Т. А., Медведев А. Е., Федоров А. В., Фомин В. М. К теории идеальной и неидеальной детонации аэровзвесей. Новосибирск, 1986. (Препр. / СО АН СССР, ИТПМ, № 37-86).
2. Федоров А. В. Структура гетерогенной детонации частиц алюминия, диспергированных в кислороде // Физика горения и взрыва. 1992. Т. 28, № 3. С. 72-83.
3. Strauss W. A. Investigation of detonation of aluminium powder-oxygen mixture // AIAA J. 1968. V. 6, N 9. P. 1753-1756.
4. Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М. Режимы нормальной детонации в релаксирующих средах // Физика горения и взрыва. 1989. Т. 25, № 1. С. 119-127.
5. Федоров А. В., Тетенев Е. В. Иницирование гетерогенной детонации частиц алюминия, диспергированных в кислороде // Физика горения и взрыва. 1992. Т. 28, № 3. С. 83-89.

6. Кузнецов Н. М., Копотев В. А. Детонация в релаксирующем газе и релаксационная неустойчивость // Физика горения и взрыва. 1986. Т. 22, № 5. С. 75–86.
7. Медведев А. Е. Детонация в релаксирующем газе с двумя реакциями тепловыделения // Физика горения и взрыва. 1992. Т. 28, № 3. С. 89–93.
8. Федоров А. В., Фомин В. М., Хмель Т. А. Типы детонационных течений взорванной взвеси алюминия в кислороде // Докл. РАН. 1995. Т. 342, № 2. С. 185–188.
9. Пухначев В. В. Об устойчивости детонации Чепмена — Жуге // Докл. АН СССР. 1963. Т. 19, № 4. С. 798–801.
10. Кузнецов Н. М. Устойчивость структуры ударных и детонационных волн // Хим. физика. 1993. Т. 12, № 3. С. 293–298.
11. Короткова Г. И., Ни А. Л., Фортон В. Е. Об устойчивости детонационных волн в релаксирующих средах // Хим. физика. 1988. Т. 7, № 10. С. 1408–1410.
12. Левин В. А., Марков В. В. Возникновение детонации при концентрированном подводе энергии // Физика горения и взрыва. 1975. Т. 11, № 4. С. 623–633.
13. Wang J. C. T., Widhopf G. F. A high-resolution TVD finite volume scheme for the Euler equation in conservation form // AIAA Paper, 87-0538. 1987.
14. Montagne J. L., Vinokur M. Comparative study of high resolution shock-capturing schemes for a real gas // AIAA J. 1989. V. 27, N 10. P. 1332–1347.
15. Gear C. W. The automatic integration of ordinary differential equations // Computer and Structures. 1985. V. 20, N 6. P. 915–920.

*Поступила в редакцию 22/V 1995 г.*

---