

по значениям скорости поперечной волны и остаточных деформаций, не отличается от статической кривой. Здесь следует учесть, что фронт волны связан со сжимающими напряжениями, в крайнем случае (если исключена неустойчивость) приводящими к сжимающим деформациям. Остаточные растягивающие деформации обусловлены неволновым периодом динамического деформирования. Исследование [10] указывает на значительное отличие динамической кривой упрочнения от статической при скоростях деформации $\sim 5 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$.

Поступила 15 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.
2. Кристеску Н. Динамическая пластичность. Механика.— «Сб. переводов и обзор. иностр. пер. печати», 1969, т. 115, № 3.
3. Щеглов Б. А. Осесимметричное формообразование тонколистовых деталей при динамическом воздействии.— «Машиноведение», 1971, № 4.
4. Щеглов Б. А. Динамика осесимметричного формообразования тонкостенных оболочек.— В кн.: Расчеты процессов пластического течения металлов. М., «Наука», 1973.
5. Штамповка взрывом. Под ред. М. А. Анучина. М., «Машиностроение», 1972.
6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М., «Наука», 1968.
7. Фрейденваль А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
8. Перетятько В. Н., Базайкин В. И. Методика исследования динамики пластического деформирования.— «Завод. лабор.», 1973, № 12.
9. Власов Б. Ф. Исследование механических свойств тонколистовой меди и дюралюминия в процессах высокоскоростного деформирования.— В кн.: Расчеты процессов пластического течения металлов. М., «Наука», 1973.
10. Базайкин В. И., Перетятько В. Н. Экспериментальное исследование распространения пластических волн в медных пластинках.— ПМТФ, 1974, № 1.

УДК 539.3+534.231.1

К ОЦЕНКЕ СТЕПЕНИ АНИЗОТРОПИИ УПРУГИХ СРЕД

В. С. Будаев

(Москва)

Исследуются кривые рефракции, геометрия волновых фронтов и их изменение при варьировании упругих постоянных анизотропных сред в широких пределах. Получен количественный критерий, по величине которого можно судить о количестве и расположении лагун, свойствах корней характеристического уравнения и других важных характеристиках среды.

1. Рассматриваются среды, уравнения движения которых в условиях плоской деформации записываются в виде

$$(4.1) \quad \begin{aligned} c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\rho a_1 f; \\ c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_4 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\rho a_2 f, \end{aligned}$$

где u, w — компоненты вектора смещений вдоль осей x и z соответственно; c_1, c_2, c_3, c_4 — коэффициенты, выражающиеся через упругие постоянные среды; ρ — плотность; t — время; a_1, a_2 — постоянные; f — некоторая функция от x, z, t .

К системе (1.1) сводятся уравнения движения упругих анизотропных сред в четырех случаях.

1. Кубические кристаллы (три упругих постоянных). Величины c_1, c_2, c_3, c_4 выражаются через упругие постоянные среды следующим образом:

$$c_1 = c_4 = a_{11}, \quad c_2 = a_{12} + a_{44}, \quad c_3 = a_{44}.$$

2. Трансверсально-изотропные среды, гексагональные кристаллы и некоторые виды ромбоэдрических (пять упругих постоянных)

$$c_1 = a_{11}, \quad c_2 = a_{13} + a_{44}, \quad c_3 = a_{44}, \quad c_4 = a_{33}.$$

3. Некоторые виды тетрагональных кристаллов (шесть упругих постоянных)

$$c_1 = a_{11}, \quad c_2 = a_{13} + a_{44}, \quad c_3 = a_{44}, \quad c_4 = a_{33}.$$

4. Ромбоэдрические кристаллы и ортотропные материалы (девять упругих постоянных)

$$c_1 = a_{11}, \quad c_2 = a_{13} + a_{55}, \quad c_3 = a_{55}, \quad c_4 = a_{33}.$$

Данные результаты следуют из приведенных Лявом в [1]. Направления осей координат выбраны, как в [1].

Предполагается, что коэффициенты уравнений удовлетворяют условиям гиперболичности, которые в обозначениях α, β, γ имеют вид [2]:

$$(1.2) \quad -2\sqrt{\alpha\beta} < \gamma < 1 + \alpha\beta,$$

$$\alpha = c_3/c_1, \quad \beta = c_3/c_4, \quad \gamma = 1 + \alpha\beta - \frac{c_2^2}{c_1c_4}.$$

Условия положительной определенности упругой энергии при плоской деформации записываются в виде

$$(1.3) \quad c_1c_4 > (c_2 - c_3)^2$$

и совпадают с условиями вещественности корней уравнения Рэлея.

При трехосной деформации условия положительной определенности содержат полный набор упругих постоянных и для каждого из приведенных выше классов упругой симметрии имеют свой специфический вид.

Переход от изотропных сред, являющихся сугубо частным случаем упругих сред, к средам более общего вида ставит на первое место вопрос об особенностях нестационарных волновых полей в анизотропной среде и о возможности замены анизотропной среды на некоторую изотропную, поскольку решения задач для последних во всех случаях имеют более простой вид. С этой целью желательно иметь простые количественные критерии, по величине которых можно получить полное представление о волновой картине, не прибегая к решению данной конкретной задачи. С этой точки зрения большое значение приобретают задачи для сосредоточенных импульсных воздействий, поскольку получающиеся для них замкнутые решения позволяют провести широкие исследования упомянутых выше вопросов [3, 4, 5].

Из всех сред, удовлетворяющих условиям (1.2), (1.3), выделим те, для которых выполняются неравенства [3, 4]:

$$(1.4) \quad \gamma^2 \geq 4\alpha\beta, \quad \gamma > \alpha(\beta+1), \\ [2\beta(1+\alpha) - \gamma(1+\beta)] \geq -|\beta - 1| \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta};$$

$$(1.5) \quad \gamma^2 \geq 4\alpha\beta, \quad \gamma > \beta(\alpha+1), \\ [2\alpha(1+\beta) - \gamma(1+\alpha)] \geq -|\alpha - 1| \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta};$$

$$(1.6) \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1.$$

Данные среды отнесем к первой группе. При условиях (1.4) — (1.6) корни характеристического уравнения $\mu_n(\theta)$ и $\theta_n(\mu)$ при вещественных значениях аргумента принимают только вещественные или чисто мнимые значения [3, 4].

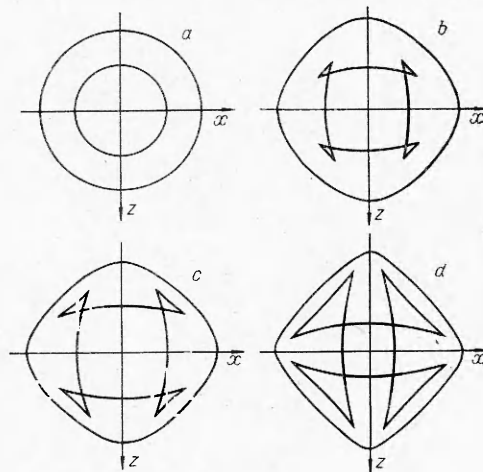
Исследования показывают, что даже при плоской деформации допустимый диапазон значений c_1, c_2, c_3, c_4 определяется не только условиями (1.2), (1.3), но и условиями положительной определенности упругой энергии при трехосной деформации. Поэтому каждый из типов упругой симметрии следует рассматривать отдельно, несмотря на то, что в условиях плоской деформации все они описываются одной и той же системой уравнений движения (1.1).

Рассмотрим среды с $c_1 = c_4$ или $\alpha = \beta$, частным случаем которых являются кристаллы кубической системы. Если среда изотропная, то $\gamma = 2\alpha$. Из пяти типов геометрии волновых фронтов при плоской деформации в случае сред, удовлетворяющих условиям (1.4), (1.5), реализуются два, приведенные на фиг. 1. Первый тип характеризуется гладкими фронтами (фиг. 1, а, каменная соль). Волновые фронты (фиг. 1, в, с, d, лед, берилл, песчаник), характеризующиеся четырьмя лагунами, не лежащими на осях координат, отнесем ко второму типу. В данном случае речь идет о волновых фронтах, возникающих в неограниченной среде от сосредоточенного импульсного источника [3].

При $0 < \alpha < 0,75$ анизотропной среде рассматриваемого вида ($c_1 = c_4$) соответствует единственная изотропная среда, имеющая одинаковые с ней скорости распространения волн вдоль осей x и z , т. е. те же самые значения коэффициентов c_1, c_3, ρ . Для данной изотропной среды $c_2 = c_1 - c_3 = c_{2из}$.

Напротив, всякой изотропной среде соответствует бесконечное число (ряд) анизотропных сред, имеющих одинаковые с ней коэффициенты c_1, c_3, ρ и отличающихся только значениями коэффициента c_2 . Естественно поэтому рассматривать значение коэффициента

$$\Delta_A = c_{2из}/c_2 = (c_1 - c_3)/c_2$$



Фиг. 1

как некоторый критерий для сравнения свойств анизотропных сред из данного ряда между собой и с образующей этот ряд изотропной средой. С учетом условия $\gamma^2 \geq 4\alpha\beta$, которое в случае $\alpha = \beta$ имеет вид $\gamma \geq 2\alpha$, получаем, что для сред первой группы $\Delta_A \geq 1$.

Из сравнения конфигураций волновых фронтов на фиг. 1 видно, что при $\Delta_A = 1,107$; $\Delta_{A*} = 1,325$ (каменная соль) волновые фронты гладкие, а при $\Delta_A = 1,442$; $\Delta_{A*} = 1,187$ (лед) уже имеются лакуны, которые увеличиваются по размеру с ростом Δ_A : $\Delta_A = 2,84$; $\Delta_{A*} = 1,1$ (берилл); $\Delta_A = 3,85$; $\Delta_{A*} = 1,05$ (песчаник). Естественно предположить, что с уменьшением Δ_A от значения $\Delta_A = 1,442$ величина лагун будет уменьшаться и при переходе через некоторое значение $\Delta_A = \Delta_{A*}$ они исчезнут, и фронты будут гладкими, как в случае каменной соли. Примером среды, у которой $\Delta_A \approx \Delta_{A*}$, является сальвин.

Геометрия волновых фронтов для сосредоточенного импульсного источника представляет собой огибающую семейства плоских волн, определяемых уравнением

$$t - \theta x - \mu_n(\theta)z = 0,$$

где $\mu_n(\theta)$ — корни характеристического уравнения системы.

Функция $\mu_1(\theta)$ на интервале $|\theta| \leq a$ и функция $\mu_2(\theta)$ на интервале $|\theta| \leq b$, ($a = \sqrt{\rho/c_1}$, $b = \sqrt{\rho/c_3}$) определяют обе соответствующие ветви кривой рефракции на плоскости μ , θ , с видом которых тесно связана геометрия волновых фронтов. Если кривые рефракции выпуклые, то волновые фронты гладкие. Геометрия волновых фронтов с лакунами соответствует случаю, когда ветвь кривой рефракции, отвечающая $\mu_2(\theta)$, имеет точки перегиба. Поскольку кривые рефракции имеют четвертый порядок, то максимальное число точек перегиба может равняться восьми, т. е. по две в каждом из квадрантов на плоскости μ , θ . Каждая пара точек перегиба отвечает одной лакуне, и, следовательно, в этом случае имеются четыре лакуны. Если при этом выполняются условия (1.4), (1.5), то фронты волн имеют вид, как на фиг. 1, *e*, *c*, *d*. (Ситуация, когда кривая рефракции, отвечающая $\mu_2(\theta)$, имеет четыре точки перегиба, возможна только для сред, у которых $c_1 \neq c_4$.) Других возможностей, кроме случая, когда точки перегиба отсутствуют, для сред с $c_1 = c_4$ нет. Момент перехода от гладких волновых фронтов и выпуклых кривых рефракции к волновым фронтам с четырьмя лакунами, расположенными, как на фиг. 1, *e*, *c*, *d*, соответствует моменту появления точек перегиба на кривой рефракции, отвечающей $\mu_2(\theta)$ (внешняя кривая). При заданной величине это соответствует некоторой критической величине $\gamma = \gamma_*$. Условие возникновения точек перегиба на кривой $\mu_2(\theta)$ дает для γ_* выражение

$$(1.7) \quad 2\gamma_* = -3(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)\sqrt{9\alpha^2 - 14\alpha + 9}.$$

Выражая Δ_A через α и γ , получаем

$$(1.8) \quad \Delta_A = (1 - \alpha)/\sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma}, \quad \gamma < 1 + \alpha^2.$$

Подставив выражение для γ_* в (1.8), получим формулу для критического значения $\Delta_{A*}(\alpha)$, соответствующего переходу от волновых фронтов первого типа ($\Delta_A < \Delta_{A*}$, область II на фиг. 2) к волновым фронтам второго типа ($\Delta_A > \Delta_{A*}$, область I на фиг. 2). Зависимость $\Delta_A = \Delta_{A*}(\alpha)$ определяет на фиг. 2 кривую I. Чем дальше в области I находится значение Δ_A от соответствующего данному α значения Δ_{A*} , тем больше область, занимаемая лакунами (песчаник).

Если мы обратимся к кривым смещений в задаче о сосредоточенном источнике в неограниченной среде [3] или в задаче Лэмба [4], то увидим, что наблюдается та же тенденция. В случае каменной соли кривые смещений мало отличаются от соответствующих кривых для модельной изотропной среды, выбранной, как указано выше. Для песчаника расхождения очень велики [3, 4]. Если значения Δ_A лежат в интервале $1 < \Delta_A \ll \Delta_{A*}$, то анизотропную среду можно заменить упомянутой выше изотропной средой. Полное совпадение будет при $\Delta_A=1$ (кривая 2). Таким образом, в случае сред первой группы Δ_A может служить критерием для оценки величины области, занимаемой лакунами, отличия в ходе кривых смещений, которое можно ожидать в случае замены анизотропной среды на изотропную при рассмотрении плоских и, в случае трансверсально-изотропных сред, осесимметричных задач. Приведенные результаты распространяются и на среды, не относящиеся к кубическим кристаллам, но у которых c_1 и c_4 , если и не равны, то близки по значению ($\alpha \approx \beta$).

Полученные результаты относятся к случаю $\Delta_A \geq 1$.

2. Рассмотрим среды, для которых $\Delta_A < 1$ и сохраняется условие $\alpha = \beta$. При условии $\alpha < 1$ весь допустимый диапазон значений γ состоит из трех интервалов:

$$(2.1) \quad -2\alpha < \gamma < \alpha(\alpha+1), \quad \alpha(\alpha+1) < \gamma < 2\alpha; \quad 2\alpha \leq \gamma < 1+\alpha^2.$$

Граничные значения -2α , $1+\alpha^2$ обусловлены условиями гиперболичности. Интервал $2\alpha \leq \gamma < 1+\alpha^2$ относится к рассмотренным выше средам первой группы. Остается рассмотреть два первых интервала (2.1). При переходе от значений $\gamma \geq 2\alpha$ к значениям $\gamma < 2\alpha$ из (1.4), (1.5) остается в силе одно неравенство $\gamma > \alpha(\alpha+1)$.

Коэффициент Δ_A становится меньше единицы, т. е. осуществляется переход из области II в область III (через прямую $\Delta_A=1$) на плоскости Δ_A, α (см. фиг. 2).

Для значений Δ_A в области III фронты волн гладкие, а кривые рефракции — выпуклые. Однако корни характеристического уравнения $\mu_n(\theta)$ на вещественной оси θ имеют другой вид и относятся ко второму типу по классификации [5]. Нижней границей области III служит кривая 3

$$\Delta_{A*}^0 = \sqrt{1-\alpha}.$$

Данной кривой отвечают значения Δ_A , при которых на кривой рефракции возникают точки перегиба ($\gamma = \alpha(\alpha+1)$) так, что в области IV на плоскости Δ_A, α кривые рефракции имеют участки вогнутости, как и в области I, но в отличие от области I расположены на осях координат, а следовательно, фронты волн характеризуются наличием лакун, пересекаемых осями x и z . Корни характеристического уравнения относятся к третьему типу, согласно [3].

Нижней границей области IV на фиг. 2 (кривая 4) служат значения Δ_A , относящиеся к $\gamma = -2\alpha$, которые являются и минимальными, так как при меньших значениях Δ_A не выполняются условия гиперболичности. Представителями сред, значения Δ_A которых лежат в области IV, являются медь ($\Delta_A=0,478$) и большинство чистых металлов с кубической решеткой, так что данные среды распространены наряду со средами, значения Δ_A которых лежат в областях I, II.

Для большинства металлов с кубической и гексагональной плотной упаковкой структурами, а также минералов значения α лежат в интервале $0 < \alpha < 0,5$, как и в случаях, рассмотренных выше. Следует отметить, что с точки зрения термодинамики, для изотропных сред допу-

стимы значения α в диапазоне $0 < \alpha < 0,75$. Фактически всегда $0 < \alpha < 0,5$, так как интервал $0,5 < \alpha < 0,75$ в случае изотропных тел соответствует отрицательным значениям коэффициента Пуассона. Данные тела должны испытывать увеличение поперечных размеров при растяжении. Среди известных материалов таких тел нет [6]. У некоторых металлов с кубической решеткой (железо, германий, калий, натрий, литий), а также у бериллия (гексагональная плотноупакованная структура) величина α находится в пределах $0,5 < \alpha < 0,75$.

Кривые смещений в случае источника в неограниченной среде и задачи Лэмба для сред, значения Δ_A которых лежат в области III и IV, характеризуются рядом особенностей, не свойственных средам первой группы и, в частности, изотропным средам [5].

Таким образом, два параметра Δ_A и α , определяя однозначно точку на плоскости Δ_A, α на фиг. 2, дают полное представление о рассматриваемой анизотропной среде. В зависимости от того, в какую из областей I — IV попадает точка, определяется наличие и расположение лакун и вид корней характеристического уравнения. Близость границ раздела областей определяет величину лакун и в значительной степени вид кривых смещений для упомянутых выше задач. Например, в случае меди ($\Delta_A = 0,478, \alpha = 0,442$) точка на плоскости Δ_A, α попадает в область IV и близко расположена к нижней границе области. Это свидетельствует о том, что корни характеристического уравнения относятся к четвертому типу, оси координат x и z пересекают лакуны и лакуны занимают сравнительно большую область за фронтом волны, что подтверждается конкретными расчетами.

3. Согласно [8], величина, обратная модулю Юнга, в случае кубических кристаллов равна

$$(3.1) \quad \frac{1}{E} = \frac{c_1 + c_2 - c_3}{(c_1 - c_2 + c_3)(c_1 + 2c_2 - 2c_3)} - \left(\frac{2}{c_1 - c_2 + c_3} - \frac{1}{c_3} \right) L,$$

$$L = \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2.$$

Здесь α_i — направляющие косинусы оси образца. В обозначениях Δ_A, α (3.1) принимает вид

$$(3.2) \quad \frac{1}{E} = \Phi [G + (\Delta_A - 1)L]; \quad \Phi = \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha(c_1 - c_3)[\Delta_A(1 + \alpha) - (1 - \alpha)]};$$

$$G = \frac{\alpha(\Delta_A + 1)\Delta_A}{\Delta_A(1 - 2\alpha) + 2(1 - \alpha)}.$$

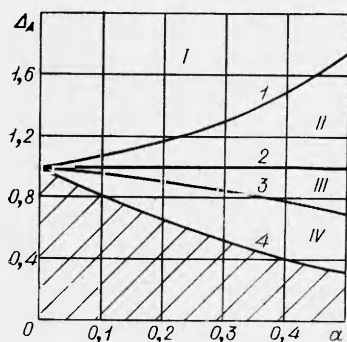
Предполагая, что $0 < \alpha < 1$, рассмотрим плоскость Δ_A, α .

Величина $\Delta_{A\gamma=0} = (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$, при переходе через которую Φ меняет знак, совпадает с нижней границей допустимых значений Δ_A (определяемой условиями гиперболичности), и, следовательно, $\Phi > 0$ для всего допустимого диапазона Δ_A при $0 < \alpha < 1$.

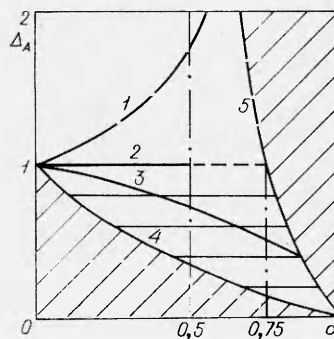
Величина $\Delta_A^+ = -2(1 - \alpha)/(1 - 2\alpha)$, при переходе через которую меняет знак G , делит область допустимых значений Δ_A на две части. Справа от кривой $\Delta_A^+(\alpha)$ величина G отрицательная, слева — положительная. Величина $(\Delta_A - 1)$ положительная при $\Delta_A > 1$ и отрицательная при $\Delta_A < 1$.

Значениям Δ_A , лежащим справа от кривой $\Delta_A^+(\alpha)$, соответствуют отрицательные значения модуля Юнга, и эту область следует считать

запрещенной. Отсюда видно, что в случае изотропных сред (точки на прямой $\Delta_A=1$) допустимыми являются $0 < \alpha < 0,75$. При $\Delta_A < 1$ модуль Юнга принимает максимальные значения вместе с величиной L , т. е. в направлениях $\langle 111 \rangle$, а наименьшие — в направлении осей куба $\langle 100 \rangle$. При $\Delta_A > 1$ (первая группа сред) максимальные значения модуля Юнга соответствуют направлению $\langle 100 \rangle$ и минимальные — $\langle 111 \rangle$.



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 3 области справа от $\Delta_A = \Delta_A^\pm(\alpha)$ и ниже кривой $\Delta_{A\gamma=0} = (1-\alpha)/(1+\alpha)$, соответствующие запрещенным значениям Δ_A , заштрихованы наклонными прямыми, а область $\Delta_A < 1$ — горизонтальными линиями. Кривые 1—4 те же, что и на фиг. 2, а 5 соответствует линии $\Delta_A = \Delta_A^\pm(\alpha)$. Величины α, β, γ , тип решеток (К — кубическая, ГП — гексагональная плотноупакованная) и номер области (согласно фиг. 2) для ряда элементов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Элемент	α	β	Тип решетки	Δ_A	№ области
Ag	0,37	0,37	К	0,558	IV
Al	0,264	0,264	К	0,884	III
Au	0,216	0,216	К	0,724	IV
Nb	0,117	0,117	К	1,33	II
Ir	0,45	0,45	К	0,623	IV
Mo	0,276	0,276	К	1,08	II
Ni	0,492	0,492	К	0,465	IV
Pb	0,301	0,301	К	0,604	IV
V	0,187	0,187	К	1,147	II
Mg	0,275	0,266	ГП	1,136	II
Y	0,312	0,316	ГП	1,183	II

Таблица 2

Элемент	α	β	γ	Δ_A	№ области
Fe	0,505	0,505	0,075	0,455	IV
K	0,508	0,508	-0,582	0,362	IV
Ge	0,519	0,519	0,468	0,52	IV
C	0,535	0,535	0,862	0,713	III
Na	0,575	0,575	-0,736	0,34	IV
Th	0,635	0,635	-0,247	0,284	IV
Li	0,652	0,652	-1,525	0,212	IV

В табл. 2 приведены данные для металлов, величина α которых лежит в интервале $0,5 < \alpha < 0,75$.

Рассмотрим значения $\alpha > 1$, которым соответствуют $\Delta_A < 0$. При $\alpha \rightarrow \infty$ имеем

$$\Delta_{A\gamma=0} = (1 - \alpha)/(1 + \alpha) \rightarrow -1,$$

т. е. при $\alpha > 1$ условия гиперболичности допускают значения Δ_A в интервале $-1 < \Delta_A < 0$. Значения $\alpha > 1$ лежат справа от кривой $\Delta_A^\pm(\alpha)$ так,

что данным α соответствуют отрицательные модули Юнга. Это следует также из формул (3.2). Таким образом, значения $\alpha > 1$ являются запрещенными, как и все значения Δ_A , α , лежащие справа от кривой $\Delta_A = \Delta_A^{\pm}(\alpha)$.

Отрицательные модули Юнга для кубических кристаллов являются запрещенными из-за того, что для них не выполняются условия положительной определенности упругой энергии при трехосной деформации

$$a_{11} > 0, \quad a_{11} > |a_{12}|, \quad a_{11} + 2a_{12} > 0,$$

которые в наших обозначениях записываются в виде

$$(3.3) \quad c_1 > 0, \quad c_1 > |c_2 - c_3|, \quad (c_1 + 2c_2 - 2c_3) > 0.$$

Действительно, согласно (3.3), величина $\Phi G = (c_1 + c_2 - c_3) / [(c_1 - c_2 + c_3)(c_1 + 2c_2 - 2c_3)]$ всегда положительна, следовательно, всегда положителен и модуль Юнга.

Для сред, не относящихся к кубическим кристаллам, условия положительности модуля Юнга не совпадают с условиями положительной определенности упругой энергии при трехосной деформации. Поэтому для таких сред отрицательные модули Юнга нельзя считать запрещенными, если это не связано с нарушением условий положительной определенности упругой энергии.

4. В заключение укажем наиболее простой способ нахождения величины γ_* , определяющей границу раздела между областями I, II на фиг. 2, 3.

Наряду с интересующей нас средой из области I, имеющей конфигурацию волновых фронтов, как на фиг. 1, b, d, рассмотрим модельную среду, отличающуюся от исходной только тем, что волновая картина в ней повернута на 45° относительно осей координат. При этом оси координат будут пересекать лагуны и по приведенной выше классификации модельная среда будет относиться к области IV. Переход из области I в область II для исходной среды эквивалентен переходу из области IV в область III для модельной. При этом критическое значение γ_* определяется выражением $\gamma_* = \alpha'(\alpha' + 1)$, где α' , γ' — параметры модельной среды.

Компоненты деформации в системе координат, повернутой на угол λ , и в исходной системе связаны соотношениями

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon'_{xx} &= \varepsilon_{xx} \cos^2 \lambda + \varepsilon_{zz} \sin^2 \lambda + \varepsilon_{xz} \sin \lambda \cos \lambda; \\ \varepsilon'_{zz} &= \varepsilon_{xx} \sin^2 \lambda + \varepsilon_{zz} \cos^2 \lambda - \varepsilon_{xz} \sin \lambda \cos \lambda; \\ \varepsilon'_{xz} &= -2\varepsilon_{xx} \sin \lambda \cos \lambda + 2\varepsilon_{zz} \sin \lambda \cos \lambda + \varepsilon_{xz} (\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda). \end{aligned}$$

Для угла $\lambda = 45^\circ$ $\cos^2 \lambda = \sin^2 \lambda = 1/2$.

Для упругого потенциала имеем два эквивалентных выражения:

$$(4.2) \quad F = c'_1 (\varepsilon'^2_{xx} + \varepsilon'^2_{zz}) + 2(c'_2 - c'_3) \varepsilon'_{xx} \varepsilon'_{zz} + c'_3 \varepsilon'^2_{xz};$$

$$(4.3) \quad F = c_1 (\varepsilon^2_{xx} + \varepsilon^2_{zz}) + 2(c_2 - c_3) \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + c_3 \varepsilon_{xz}^2.$$

Подставляя (4.1) в (4.2), получаем:

$$(4.4) \quad F = A (\varepsilon^2_{xx} + \varepsilon^2_{zz}) + 2B \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + C \varepsilon_{xz}^2;$$

$$(4.5) \quad 2A = c'_1 + c'_2 + c'_3, \quad 2B = c'_1 + c'_2 - 3c'_3, \quad 2C = c'_1 - c'_2 + c'_3.$$

Из сравнения (4.3) и (4.4) находим

$$(4.6) \quad A=c_1, \quad B=c_2 - c_3, \quad C=c_3.$$

Совокупность равенств (4.5), (4.6) представляет собой систему уравнений для определения коэффициентов c'_1 , c'_2 , c'_3 модельной среды, разрешая которую имеем:

$$\begin{aligned} c'_1/c_1 &= [(1 + \alpha) + \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma}]/2; \\ c'_3/c_1 &= [(1 + \alpha) - \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma}]/2; \quad c'_2/c_1 = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Для параметров α' , γ' получаем следующие выражения:

$$(4.7) \quad \alpha' = [(1 + \alpha) - \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma}] / [(1 + \alpha) + \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma}];$$

$$(4.8) \quad \gamma' = 1 + \alpha'^2 - 4(1 - \alpha)^2 / [(1 + \alpha) + \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma}]^2.$$

Штрих обозначает параметры для модельной среды.

Подставляя (4.7), (4.8) в соотношение $\gamma' = \alpha'(\alpha' + 1)$, находим квадратное уравнение для γ :

$$\gamma^2 + 3(1 - \alpha)^2 - \alpha(10\alpha^2 - 16\alpha + 10) = 0,$$

разрешая которое получаем значение $\gamma = \gamma_*$, определяемое формулой (1.7). Кривые $\Delta_{A*}(\alpha)$ и $\Delta_A^+(\alpha)$ пересекаются в некоторой точке, в которой $\Delta_A \approx 2,6$. Таким образом, во всех случаях при $\Delta_A > 2,6$ геометрия волновых фронтов имеет вид, как на фиг. 1, *e*, *c*, *d*, т. е. характеризуется наличием четырех лакун, не лежащих на осях координат.

Автор благодарит С. А. Христиановича за внимание к работе.

Поступила 20 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляв А. Е. Математическая теория упругости. М., Гостехиздат, 1935.
2. Rayton R. G. Two dimensional wave front shape induced in a homogeneously strained elastic body by a point perturbing body force.— ARTA, 1969, vol. 32, № 4.
3. Будаев В. С. Распространение колебаний от источника типа сосредоточенного импульса в анизотропной среде.— ПМ, 1973, т. 9, вып. 2.
4. Будаев В. С. Об одной краевой задаче динамики упругих анизотропных сред.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1973, вып. 14.
5. Будаев В. С. Об одной краевой задаче динамической теории упругих анизотропных сред.— ПМТФ, 1974, № 3.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
7. Шульце Г. Металлофизика. М., «Мир», 1971.