

лавы оценки плотности подвижных дислокаций $\rho_D = B/\eta b^2$, где B — коэффициент торможения, b — вектор Бюргерса. Среднее значение B для металлов с гранцентрированной кубической решеткой составляет $\sim 4 \cdot 10^{-5}$ Па·с [14], что для оценки ρ_D дает $\sim 10^9$ см $^{-2}$.

Поступила 10 IX 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Barbee T. W., Seaman L. et al. Dynamic fracture criteria for ductile and brittle metals. — J. of Materials, 1972, vol. 7, N 3.
2. McClintock F. A. Models of spall fracture by hole growth. — In: Metallurgical Effects at High Strain Rates. N. Y. — L.: Plenum Press, 1973.
3. Stevens A. L., Davison L., Warren W. E. Spall fracture in aluminum monocrystals: a dislocation-dynamics approach. — J. Appl. Phys., 1972, vol. 43, N 12.
4. Johnson J. N. Dynamic fracture and spallation in ductile solids. — J. Appl. Phys., 1981, vol. 52, N 4.
5. Голубев В. К., Новиков С. А. и др. Влияние температуры на критические условия откольного разрушения металлов. — ПМТФ, 1980, № 4.
6. Голубев В. К., Новиков С. А. и др. О механизмах откольного разрушения сталей Ст. 3 и 12Х18Н10Т в температурном диапазоне —196... 800°С. — Проблемы прочности, 1981, № 5.
7. Григорьев В. Г., Дунин С. З., Сурков В. В. Захлопывание сферической поры в вязкопластическом материале. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 1.
8. Seaman L., Curran D. S., Shockey D. A. Computational models for ductile and brittle fracture. — J. Appl. Phys., 1976, vol. 47, N 11.
9. Иванова В. С. Разрушение металлов. М.: Металлургия, 1979.
10. Murr L. E. Work hardening and the pressure dependence of dislocation density arrangements in shock loaded nickel and copper. — Scripta Metallurgica, 1978, vol. 12, N 2.
11. Davison L., Graham R. A. Shock compression of solids. — Physics Reports, 1979, vol. 55, N 4.
12. Butcher B. M., Carroll M. M., Holt A. C. Shock-wave compaction of porous aluminum. — J. Appl. Phys., 1974, vol. 45, N 9.
13. Chhabildas L. C., Asay J. R. Rise-time measurements of shock transitions in aluminum, copper, and steel. — J. Appl. Phys., 1979, vol. 50, N 4.
14. Альшиц В. И., Инденбом В. Л. Динамическое торможение дислокаций. — УФН, 1975, т. 115, вып. 1.

УДК 539.3

ИЗГИБ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМ АНИЗОТРОПНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

М. П. ЗАДВОРНЯК, Т. Л. МАРТЫНОВИЧ

(Львов)

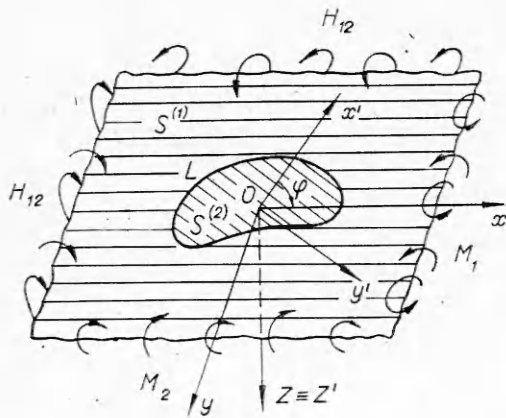
Рассмотрим изгиб тонкой пластины толщиной h с криволинейным отверстием, в которое впаяно упругое ядро из другого материала. Пластина и включение обладают прямолинейной анизотропией относительно упругих свойств материала и в каждой точке имеют плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости xOy . Главные направления упругости для пластины и включения составляют между собой угол φ (фиг. 1). Линия L разграничения областей $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$, соответствующих различным анизотропным материалам, описывается уравнением вида

$$(1) \quad t = x + iy = R \left(e^{i\theta} + \sum_{k=1}^N C_k e^{-ik\theta} \right), \quad \sum_{k=1}^N k |C_k|^2 < 1.$$

Вдоль линии L раздела областей $S^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) должны выполняться условия сопряжения

$$(2) \quad M_n^{(1)} = M_n^{(2)}, \quad N_n^{(1)} + \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial s} = N_n^{(2)} + \frac{\partial H_n^{(2)}}{\partial s},$$

$$W^{(1)} = W^{(2)}, \quad \frac{\partial W^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial W^{(2)}}{\partial n};$$



Ф и г. 1

а в удаленных от включения частях пластины изгибающие и скручивающие моменты ограничены: $M_x^\infty = M_1$, $M_y^\infty = M_2$, $H_{z_y}^\infty = H_{12}$. Внешние сосредоточенные силовые факторы и нормальная (к срединной плоскости) распределенная нагрузка в областях $S^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) отсутствуют. Здесь n и τ — нормаль и касательная к линии раздела сред L .

При аналитическом решении задачи область $S^{(1)}$ будем считать бесконечной (возмущение упругого состояния пластины, вызванное наличием включения, не достигает внешней границы пластины).

На основании формул теории изгиба анизотропных пластин [1, 2] условия сопряжения (2) представим в виде интегральных соотношений,

содержащих произвольную функцию $F(z)$, голоморфную в области $S^{(1)}$ (или $S^{(2)}$) [3]:

$$(3) \quad \int_L F(t) dV^{(1)} = \int_L F(t) dV^{(2)} + iC \int_L F(t) dt, \\ \int_L \bar{F}(\bar{t}) dV^{(1)} = \int_L \bar{F}(\bar{t}) dV^{(2)} + iC \int_L \bar{F}(\bar{t}) dt, \\ \int_L F(t) dU^{(1)} = \int_L F(t) dU^{(2)}, \quad \int_L \bar{F}(\bar{t}) dU^{(1)} = \int_L \bar{F}(\bar{t}) dU^{(2)},$$

причем

$$(4) \quad dV^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^2 \left[\left(q_j^{(\alpha)} + i \frac{p_j^{(\alpha)}}{\mu_j^{(\alpha)}} \right) \Phi_j^{(\alpha)}(z_j^{(\alpha)}) dz_j^{(\alpha)} + \left(\bar{q}_j^{(\alpha)} + i \frac{\bar{p}_j^{(\alpha)}}{\bar{\mu}_j^{(\alpha)}} \right) \overline{\Phi_j^{(\alpha)}(z_j^{(\alpha)})} d\bar{z}_j^{(\alpha)} \right], \\ dU^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^2 \left[(1 + i\mu_j^{(\alpha)}) \Phi_j^{(\alpha)}(z_j^{(\alpha)}) dz_j^{(\alpha)} + (1 + i\bar{\mu}_j^{(\alpha)}) \overline{\Phi_j^{(\alpha)}(z_j^{(\alpha)})} d\bar{z}_j^{(\alpha)} \right].$$

Здесь t — аффикс точки контура L ; $z_j^{(\alpha)} = x + \mu_j^{(\alpha)}y$ ($j, \alpha = 1, 2$) — обобщенные комплексные переменные, изменяющиеся в областях $S_j^{(\alpha)}$, получаемых из областей $S^{(\alpha)}$ соответствующими аффинными преобразованиями: $\mu_j^{(\alpha)} = \alpha_j^{(\alpha)} + i\beta_j^{(\alpha)}$ — корни соответствующих характеристических уравнений; $p_j^{(\alpha)}, q_j^{(\alpha)}$ — известные постоянные величины [1, 2]; $\Phi_j^{(\alpha)}(z_j^{(\alpha)}) = \varphi_j^{(\alpha)'}(z_j^{(\alpha)})$ — аналитические функции, описывающие напряженное состояние в пластине; C — вещественная постоянная.

Контур области $S_j^{(\alpha)}$ переменных $z_j^{(\alpha)}$ обозначим через $L_j^{(\alpha)}$, а аффиксы их точек — через $t_j^{(\alpha)}$. Между аффиксами точек контуров $L_j^{(\alpha)}$ и L существует аффинное соответствие

$$(5) \quad t_j^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (1 - i\mu_j^{(\alpha)}) t + \frac{1}{2} (1 + i\mu_j^{(\alpha)}) t \quad (j, \alpha = 1, 2).$$

Вещественная постоянная C , входящая в условия сопряжения (3), определяется из условия однозначности прогиба пластины

$$2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^2 \int_{L_j^{(\alpha)}} \varphi_j^{(\alpha)}(t_j^{(\alpha)}) dt_j^{(\alpha)} \right] = 0.$$

Аналитические функции $\Phi_j^{(\alpha)}(z_j^{(\alpha)}) = \varphi_j^{(\alpha)'}(z_j^{(\alpha)})$ ($j, \alpha = 1, 2$) должны удовлетворять условиям однозначности перемещений

$$(6) \quad \int_{L_j^{(\alpha)}} \Phi_j^{(\alpha)}(t_j^{(\alpha)}) dt_j^{(\alpha)} = D_1^{(\alpha j)} (M_x^{(\alpha)} - yP_z^{(\alpha)}) + D_2^{(\alpha j)} (M_y^{(\alpha)} + xP_z^{(\alpha)}) \quad (j = 1, 2),$$

где $M_x^{(\alpha)}, M_y^{(\alpha)}$ — компоненты главного момента; $P_z^{(\alpha)}$ — главный вектор усилий,

приложенных к контуру L областей $S^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$). Величины $D_k^{(\alpha j)}$ ($k, \alpha, j = 1, 2$) вычисляются по формулам

$$D_1^{(\alpha 1)} = D_1^{(\alpha 1)}(\mu_1^{(\alpha)}, \bar{\mu}_1^{(\alpha)}, \mu_2^{(\alpha)}, \bar{\mu}_2^{(\alpha)}) = \frac{\mu_1^{(\alpha)}(\mu_2^{(\alpha)} - \bar{\mu}_2^{(\alpha)})}{4D_{22}^{(\alpha)}\beta_1^{(\alpha)}\beta_2^{(\alpha)}(\mu_2^{(\alpha)} - \mu_1^{(\alpha)})(\bar{\mu}_2^{(\alpha)} - \mu_1^{(\alpha)})},$$

$$D_2^{(\alpha 1)} = D_2^{(\alpha 1)}(\mu_1^{(\alpha)}, \bar{\mu}_1^{(\alpha)}, \mu_2^{(\alpha)}, \bar{\mu}_2^{(\alpha)}) = -\frac{|\mu_1^{(\alpha)}|^2|\mu_2^{(\alpha)}|^2(\mu_2^{(\alpha)} - \bar{\mu}_2^{(\alpha)})}{4D_{11}^{(\alpha)}\beta_1^{(\alpha)}\beta_2^{(\alpha)}(\mu_2^{(\alpha)} - \mu_1^{(\alpha)})(\bar{\mu}_2^{(\alpha)} - \mu_1^{(\alpha)})},$$

$$D_1^{(\alpha 2)} = D_1^{(\alpha 1)}(\mu_2^{(\alpha)}, \bar{\mu}_2^{(\alpha)}, \mu_1^{(\alpha)}, \bar{\mu}_1^{(\alpha)}), \quad D_2^{(\alpha 2)} = D_2^{(\alpha 1)}(\mu_2^{(\alpha)}, \bar{\mu}_2^{(\alpha)}, \mu_1^{(\alpha)}, \bar{\mu}_1^{(\alpha)}).$$

При больших $|z_j^{(1)}|$ функции $\Phi_j^{(1)}(z_j^{(1)})$ имеют вид (главный вектор $\bar{P}_j^{(1)} = 0$)

$$\Phi_j^{(1)}(z_j^{(1)}) = A_j^{(1)} + D^{(1j)}z_j^{(1)-1} + o(z_j^{(1)-2}) \quad (z_j^{(1)} \in S_j^{(1)}, \quad j = 1, 2).$$

Постоянные $D^{(1j)}$ находятся из условий однозначности перемещений (6), а коэффициенты $A_j^{(1)}$ связаны с изгибающими и скручивающими моментами в бесконечно удаленных частях пластины соотношениями [2]

$$M_x^\infty = -2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 p_j^{(1)} A_j^{(1)}, \quad M_y^\infty = -2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 q_j^{(1)} A_j^{(1)},$$

$$H_{xy}^\infty = -2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 r_j^{(1)} A_j^{(1)}.$$

При малых $|z_j^{(2)}|$ функции $\Phi_j^{(2)}(z_j^{(2)})$ представляются в виде ($P_j^{(2)} = 0$)

$$\Phi_j^{(2)}(z_j^{(2)}) = A_j^{(2)} + B_j^{(2)}z_j^{(2)} + o(z_j^{(2)2}) \quad (z_j^{(2)} \in S_j^{(2)}, \quad j = 1, 2).$$

При выполнении условия $\sum_{k=1}^N k|C_k|^2 < 1$ [4] функция

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=1}^N C_k \zeta^{-k} \right)$$

конформно отображает внешность единичной окружности $\gamma(|\zeta| \geq 1)$ на внешность линии разреза L , описываемой уравнением (1).

Уравнения контуров $L_j^{(\alpha)}$ областей $S_j^{(\alpha)}$, согласно выражениям (1), (5), принимают вид

$$(7) \quad t_j^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^N (\lambda_k^{(\alpha j)} \sigma^k + \mu_k^{(\alpha j)} \sigma^{-k}) \quad (\sigma \in \gamma, \quad j, \alpha = 1, 2),$$

где $\lambda_1^{(\alpha j)} = \frac{1}{2} [R(1 - i\mu_j^{(\alpha)}) + (1 + i\mu_j^{(\alpha)}) \bar{R}C_1]$; $\lambda_k^{(\alpha j)} = \frac{1}{2} \bar{R}C_k (1 + i\mu_j^{(\alpha)})$;

$$\mu_1^{(\alpha j)} = \frac{1}{2} [\bar{R}(1 + i\mu_j^{(\alpha)}) + (1 - i\mu_j^{(\alpha)}) RC_1]; \quad \mu_k^{(\alpha j)} = \frac{1}{2} RC_k (1 - i\mu_j^{(\alpha)})$$

$$(k = 2, \dots, N).$$

Из соотношений (7) находим

$$(8) \quad dt_j^{(\alpha)} = \left[\sum_{k=1}^N k\lambda_k^{(\alpha j)} \sigma^{k-1} - \sum_{k=1}^N k\mu_k^{(\alpha j)} \sigma^{-k-1} \right] d\sigma \quad (j = 1, 2).$$

В преобразованных областях вне и внутри единичной окружности γ функции $\Phi_j^{(\alpha)}(z_j^{(\alpha)})$ и произвольную голоморфную функцию $F(z)$ представим в виде степенных рядов по переменным $\zeta_j^{(\alpha)}$ ($j, \alpha = 1, 2$) и ζ

$$(9) \quad \Phi_j^{(1)}(z_j^{(1)}) = A_j^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1j)} \zeta_j^{(1)-k}, \quad \lim_{|z_j^{(1)}| \rightarrow \infty} \Phi_j^{(1)}(z_j^{(1)}) = A_j^{(1)},$$

$$\Phi_j^{(2)}(z_j^{(2)}) = A_j^{(2)} + B_j^{(2)}z_j^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(2j)} \zeta_j^{(2)k};$$

$$(10) \quad F(z) = F[\omega(\zeta)] = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}$$

$$(z_j^{(\alpha)} \in S_j^{(\alpha)}, z \in S^{(\alpha)}; |\zeta_j^{(1)}| \geq 1, |\zeta_j^{(2)}| \leq 1, j, \alpha = 1, 2),$$

причем на единичной окружности γ переменные $\zeta, \zeta_j^{(\alpha)}$ принимают одно и то же значение $\sigma = e^{i\theta}$.

На основании формул (8), (9) получаем на границах $L_j^{(\alpha)}$ областей $S_j^{(\alpha)}$ ($z_j^{(\alpha)} \rightarrow t_j^{(\alpha)}, \zeta_j^{(\alpha)} \rightarrow \sigma$) следующие представления:

$$(14) \quad \Phi_j^{(1)}(t_j^{(1)}) dt_j^{(1)} = A_j^{(1)} dt_j^{(1)} + \left[\sum_{k=0}^{N-2} a_k^{(1j)} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1j)} \sigma^{-k} \right] d\sigma,$$

$$\Phi_j^{(2)}(t_j^{(2)}) dt_j^{(2)} = A_j^{(2)} dt_j^{(2)} + B_j^{(2)} t_j^{(2)} dt_j^{(2)} + \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2j)} \sigma^k + \sum_{k=1}^N b_k^{(2j)} \sigma^{-k} \right] d\sigma,$$

где

$$(12) \quad a_n^{(1j)} = \sum_{k=1}^{N-n-1} (k+n+1) \lambda_{k+n+1}^{(1j)} A_k^{(1j)},$$

$$b_n^{(1j)} = \sum_{k=1}^{N+n-1} (k-n+1) \lambda_{k-n+1}^{(1j)} A_k^{(1j)} - \sum_{k=1}^{n-2} (n-k-1) \mu_{n-k-1}^{(1j)} A_k^{(1j)},$$

$$a_n^{(2j)} = \sum_{k=1}^n (n-k+1) \lambda_{n-k+1}^{(2j)} A_k^{(2j)} - \sum_{k=1}^{N+n+1} (k-n-1) \mu_{k-n-1}^{(2j)} A_k^{(2j)},$$

$$b_n^{(2j)} = - \sum_{k=1}^{N-n+1} (k+n-1) \lambda_{k+n-1}^{(2j)} A_k^{(2j)},$$

$\lambda_n^{(\alpha j)} = 0, \mu_n^{(\alpha j)} = 0$ при $n > N$ ($j, \alpha = 1, 2$). Из формул (8), (11) получаем граничные значения функций

$$\Phi_j^{(\alpha)}(z_j^{(\alpha)}) \quad (j, \alpha = 1, 2) \text{ на } L_j^{(\alpha)} \text{ при } z_j^{(\alpha)} \rightarrow t_j^{(\alpha)}, \zeta_j^{(\alpha)} \rightarrow \sigma \quad (\sigma \in \gamma)$$

$$(13) \quad \Phi_j^{(1)}(t_j^{(1)}) = A_j^{(1)} + \frac{\sum_{k=0}^{N-2} a_k^{(1j)} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1j)} \sigma^{-k}}{\sum_{k=1}^N k \lambda_k^{(1j)} \sigma^{k-1} - \sum_{k=1}^N k \mu_k^{(1j)} \sigma^{-k-1}} \quad (j = 1, 2),$$

$$\Phi_j^{(2)}(t_j^{(2)}) = A_j^{(2)} + B_j^{(2)} t_j^{(2)} + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2j)} \sigma^k + \sum_{k=1}^N b_k^{(2j)} \sigma^{-k}}{\sum_{k=1}^N k \lambda_k^{(2j)} \sigma^{k-1} - \sum_{k=1}^N k \mu_k^{(2j)} \sigma^{-k-1}} \quad (j = 1, 2).$$

Внесем выражения (4), (10) и (11) в условия сопряжения (3) и выполним интегрирование, учитывая при этом произвольность функции (10), получим конечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_n^{(\alpha j)}, b_n^{(\alpha j)}, A_j^{(2)}, B_j^{(2)}$ вида

$$(14) \quad \sum_{j=1}^2 \sum_{\alpha=1}^2 (-1)^{\alpha+1} \left[\left(q_j^{(\alpha)} + i \frac{p_j^{(\alpha)}}{\mu_j^{(\alpha)}} \right) (a_{n-1}^{(\alpha j)} + n \lambda_n^{(\alpha j)} A_j^{(\alpha)} + \varepsilon_{n-1}^{(\alpha j)} B_j^{(\alpha)} \delta_{2\alpha}) - \right. \\ \left. - \left(\bar{q}_j^{(\alpha)} + i \frac{\bar{p}_j^{(\alpha)}}{\bar{\mu}_j^{(\alpha)}} \right) (\bar{b}_{n+1}^{(\alpha j)} - n \bar{\mu}_n^{(\alpha j)} \bar{A}_j^{(\alpha)} + \bar{\eta}_{n+1}^{(2j)} \bar{B}_j^{(2)} \delta_{2\alpha}) \right] = RC \delta_{n1} i,$$

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{\alpha=1}^2 (-1)^{\alpha+1} \left[\left(\bar{q}_j^{(\alpha)} + i \frac{\bar{p}_j^{(\alpha)}}{\bar{\mu}_j^{(\alpha)}} \right) (\bar{a}_{n-1}^{(\alpha j)} + n \bar{\lambda}_n^{(\alpha j)} \bar{A}_j^{(\alpha)} + \bar{\varepsilon}_{n-1}^{(2j)} \bar{B}_j^{(2)} \delta_{2\alpha}) - \right. \\ \left. - \left(q_j^{(\alpha)} + i \frac{p_j^{(\alpha)}}{\mu_j^{(\alpha)}} \right) (b_{n+1}^{(\alpha j)} - n \mu_n^{(\alpha j)} A_j^{(\alpha)} + \eta_{n+1}^{(2j)} B_j^{(2)} \delta_{2\alpha}) \right] = RnCCn i,$$

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{\alpha=1}^2 (-1)^{\alpha+1} [(1 + i \mu_j^{(\alpha)}) (a_{n-1}^{(\alpha j)} + n \lambda_n^{(\alpha j)} A_j^{(\alpha)} + \varepsilon_{n-1}^{(\alpha j)} B_j^{(\alpha)} \delta_{2\alpha}) - \\ - (1 + i \bar{\mu}_j^{(\alpha)}) (\bar{b}_{n+1}^{(\alpha j)} - n \bar{\mu}_n^{(\alpha j)} \bar{A}_j^{(\alpha)} + \bar{\eta}_{n+1}^{(2j)} \bar{B}_j^{(2)} \delta_{2\alpha})] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{\alpha=1}^2 (-1)^{\alpha+1} [(1 + i\bar{\mu}_j^{(\alpha)}) (\bar{a}_{n-1}^{(\alpha j)} + n\bar{\lambda}_n^{(\alpha j)} \bar{A}_j^{(\alpha)} + \bar{\varepsilon}_{n-1}^{(2j)} \bar{B}_j^{(2)} \delta_{2\alpha}) - (1 + i\mu_j^{(\alpha)}) (b_{n+1}^{(\alpha j)} - n\mu_n^{(\alpha j)} A_j^{(\alpha)} + \eta_{n+1}^{(2j)} B_j^{(2)} \delta_{2\alpha})] = 0 \quad (n = 1, \dots, 2N),$$

где
$$\varepsilon_n^{(\alpha j)} = \sum_{k=1}^n k\lambda_k^{(\alpha j)} \lambda_{n-k+1}^{(\alpha j)} + \sum_{k=1}^N k\lambda_k^{(\alpha j)} \mu_{k-n-1}^{(\alpha j)} - \sum_{k=1}^{N-n-1} k\lambda_{k+n+1}^{(\alpha j)} \mu_k^{(\alpha j)};$$

$$\eta_n^{(\alpha j)} = \sum_{k=1}^{N-n+1} k\lambda_k^{(\alpha j)} \mu_{k+n-1}^{(\alpha j)} - \sum_{k=1}^{n-2} k\mu_k^{(\alpha j)} \mu_{n-k-1}^{(\alpha j)} - \sum_{k=1}^N k\lambda_{k-n+1}^{(\alpha j)} \mu_k^{(\alpha j)};$$

$\varepsilon_n^{(\alpha j)} = 0$ при $n > 2N-1$; $\eta_n^{(\alpha j)} = 0$ при $n > 2N+1$; δ_{nk} — символ Кронекера. Величины $a_n^{(\alpha j)}$ и $b_n^{(\alpha j)}$ выражаются через коэффициенты $A_k^{(\alpha j)}$ ($j, \alpha = 1, 2$) по формулам (12).

При свободном от внешней нагрузки включении из условий однозначности перемещений (6) с учетом выражений (11) находим

$$b_1^{(\alpha j)} = 0 \quad (j, \alpha = 1, 2).$$

Кроме того, вне ($\alpha = 1$) и внутри ($\alpha = 2$) единичной окружности γ комплексные потенциалы $\Phi_j^{(\alpha)}(z_j^{(\alpha)})$ ($j, \alpha = 1, 2$) должны быть ограничены. Для этого необходимо потребовать, чтобы в дробно-рациональной части представления функций (13) нули числителя совпадали с нулями знаменателя, число которых вне γ равно $N-1$, а внутри $\gamma - N+1$ [4].

Таким образом, коэффициенты $a_n^{(\alpha j)}$, $b_n^{(\alpha j)}$ должны удовлетворять условиям

$$(15) \quad \sum_{k=0}^{N-2} a_k^{(1j)} \zeta_{jn}^{(1)k} + \sum_{k=1}^{2N+1} b_k^{(1j)} \zeta_{jn}^{(1)-k} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{2N-1} a_k^{(2j)} \zeta_{jl}^{(2)k} + \sum_{k=1}^N b_k^{(2j)} \zeta_{jl}^{(2)-k} = 0 \quad (n = \overline{1, N-1}, \quad l = \overline{1, N+1}, \quad j = 1, 2),$$

где $\zeta_{jn}^{(1)}$ и $\zeta_{jl}^{(2)}$ — корни уравнений

$$(16) \quad \sum_{k=1}^N k\lambda_k^{(\alpha j)} \zeta_j^{(\alpha)k-1} - \sum_{k=1}^N k\mu_k^{(\alpha j)} \zeta_j^{(\alpha)-k-1} = 0$$

соответственно по модулю больше и меньше единицы

$$|\zeta_{jn}^{(1)}| > 1, \quad |\zeta_{jl}^{(2)}| < 1 \quad (n = \overline{1, N-1}, \quad l = \overline{1, N+1}, \quad j = 1, 2).$$

Присоединив к системе уравнений (14) условия (15), получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений порядка $12N$ для определения коэффициентов $a_{k-1}^{(1j)}$, $b_{k+1}^{(2j)}$, $a_{n-1}^{(2j)}$, $b_{n+1}^{(1j)}$, $A_j^{(2)}$, $B_j^{(2)}$ ($k = \overline{1, N-1}$, $n = \overline{1, 2N}$, $j = 1, 2$).

При $N = 1$ получаем решение для пластины с эллиптическим включением. В этом случае, как следует из уравнений (14)–(16), $a_k^{(\alpha j)} = 0$, $b_k^{(2j)} = 0$, $B_j^{(2)} = 0$, $b_2^{(1j)} \neq 0$, $b_m^{(1j)} = 0$ ($m > 2$) и функции (13) принимают вид]

$$\Phi_j^{(1)}(z_j^{(1)}) = A_j^{(1)} + \frac{b_2^{(1j)}}{\lambda_1^{(1j)} \zeta_j^{(1)2} - \mu_1^{(1j)}} (z_j^{(1)} \rightarrow t_j^{(1)}, \zeta_j^{(1)} \rightarrow \sigma), \quad \Phi_j^{(2)}(z_j^{(2)}) = A_j^{(2)},$$

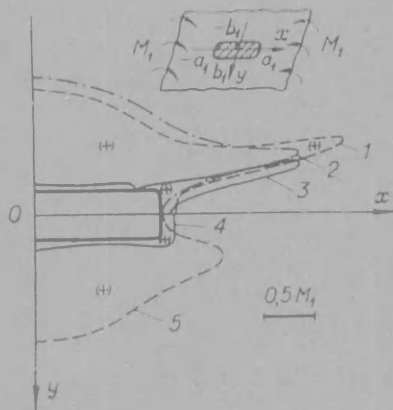
где
$$\zeta_j^{(1)} = \frac{z_j^{(1)} + \sqrt{z_j^{(1)2} - 4\mu_1^{(1j)}\lambda_1^{(1j)}}}{2\lambda_1^{(1j)}}; \quad \lambda_i^{(1j)} = \frac{a - i\mu_j^{(1)}b}{2};$$

$$\mu_1^{(1j)} = \frac{a + i\mu_j^{(1)}b}{2}; \quad C_1 = \frac{(a-b)}{(a+b)}; \quad a, b - \text{полуоси эллипса.}$$

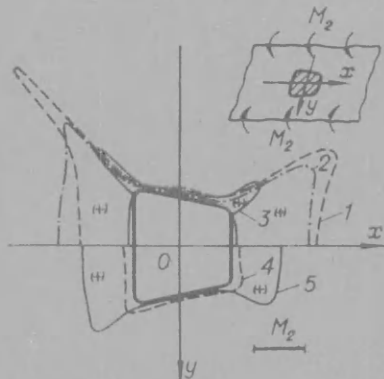
В качестве примера рассмотрим изгиб ортотропной пластины с упругим ортотропным включением, линия спая которого описывается уравнением

$$z = \omega(\sigma) = R(\sigma + C_1\sigma^{-1} + C_2\sigma^{-2} + C_3\sigma^{-3}).$$

Изменяя коэффициенты C_k , можно получить уравнение линии спая, например, в виде треугольника ($C_1 = 0$, $C_2 = 0,25$, $C_3 = 0$), трапеции ($C_1 = -0,021$, $C_2 = 0,102$, $C_3 = -0,150$), прямоугольника ($C_1 = 0,632$, $C_2 = 0$, $C_3 = -0,099$ для отношения сторон прямоугольника $\lambda = a_1/b_1 = 5$ [5]) с закругленными углами и др. [6].



Ф и г. 2



Ф и г. 3

(все коэффициенты — величины комплексные).

Численный расчет проведен для ортотропной фанерной пластины и включения со следующими характеристиками [1]:

$$(A) E_x = E_{\max}, E_1 = 0,165 \cdot 10^5 \text{ МПа}, E_2 = 0,137 \cdot 10^4 \text{ МПа},$$

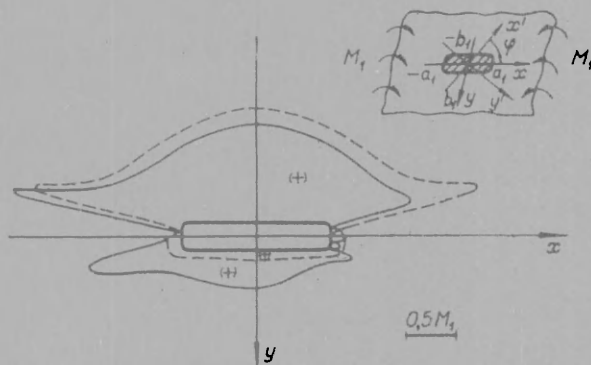
$$G = 0,686 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \nu_1 = 0,31, \nu_2 = 0,026, \mu_1 = \alpha + i\beta,$$

$$\mu_2 = -\bar{\mu}_1, \alpha = 1,04, \beta = 1,55;$$

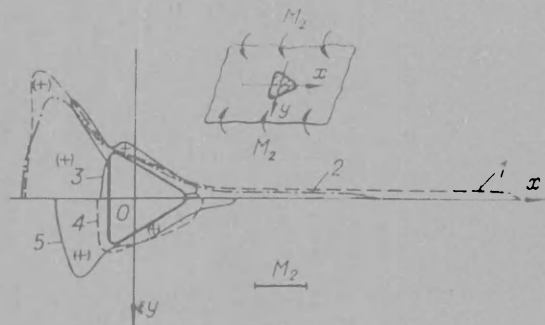
$$(B) E_x = E_{\min}, E_1 = 0,137 \cdot 10^4 \text{ МПа}, E_2 = 0,165 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$G = 0,686 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \nu_1 = 0,026, \nu_2 = 0,31, \mu_1 = \alpha + i\beta,$$

$$\mu_2 = -\bar{\mu}_1, \alpha = 0,299, \beta = 0,444.$$



Ф и г. 4



Ф и г. 5

На бесконечности пластина изгибается моментами $M_x^\infty = M_1, M_y^\infty = M_2, H_{xy} = 0$. Включение свободно от внешней нагрузки. Главные направления упругости пластины и включения параллельны координатным осям x и y ($\varphi = 0$). В данном случае

$$M_x^{(\alpha)} = 0, M_y^{(\alpha)} = 0, p_2^{(\alpha)} = 0, \mu_2^{(\alpha)} = -\bar{\mu}_1^{(\alpha)}, p_2^{(\alpha)} = \bar{p}_1^{(\alpha)}, q_2^{(\alpha)} = \bar{q}_1^{(\alpha)}, r_2^{(\alpha)} = -\bar{r}_1^{(\alpha)}, \varepsilon_n^{(\alpha 2)} = \bar{\varepsilon}_n^{(\alpha 1)}, h_n^{(\alpha 2)} = \bar{h}_n^{(\alpha 1)},$$

$$A_2^{(2)} = \bar{A}_1^{(2)}, B_2^{(2)} = \bar{B}_1^{(2)}, R = \bar{R}, C_k = \bar{C}_k, \varepsilon_k^{(\alpha 2)} = \bar{\varepsilon}_k^{(\alpha 1)}, i_k^{(\alpha 2)} = \bar{i}_k^{(\alpha 1)}, \varepsilon_n^{(\alpha 2)} = -\bar{\varepsilon}_n^{(\alpha 1)},$$

$$r_n^{(\alpha 2)} = \bar{r}_n^{(\alpha 1)}, A_1^{(1)} = \frac{\bar{q}_1^{(1)} M_x^\infty - \bar{p}_1^{(1)} M_y^\infty}{2(\bar{p}_1^{(1)} q_1^{(1)} - p_1^{(1)} \bar{q}_1^{(1)})}, A_2^{(1)} = \bar{A}_1^{(1)},$$

$$h_1^{(\alpha j)} = 0 \quad (j, \alpha = 1, 2)$$

На фиг. 2 изображено распределение моментов $M_\theta^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) в пластине (А) с прямоугольным ($a_1/b_1 = 5$) включением (В) вдоль их линии сая. Линия, обозначенная индексом 1, характеризует изгибающие моменты $M_\theta^{(1)}$ в пластине с отверстием, 2 — в пластине с упругим ядром, 3 — в пластине с жестким ядром, 4 — изгибающие моменты $M_\theta^{(2)}$ в ядре, 5 — изгибающие моменты, когда пластина и ядро из одного материала. Такие же графики приведены на фиг. 3, 4 для пластины (В) соответствен-

Окончание статьи см. на 2-й странице обложки.

но с вышеуказанными треугольным и трапецидальным включениями (А).

В том случае, когда главные направления упругости пластины и включения составляют между собой произвольный угол φ , надо повернуть систему координат $x'y'z'$ вокруг оси $z \equiv z'$ на угол φ (см. фиг. 1, оси x' и y' совмещены с главными направлениями упругости включения) и сделать пересчет жесткостей $D_{ij}^{(2)}$ включения при переходе к новым осям по формулам, которые для ортотропного материала принимают вид [1]

$$D_{11}^{(2)} = \bar{D}_1^{(2)} \cos^4 \varphi + 2D_3^{(2)} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + D_2^{(2)} \sin^4 \varphi,$$

$$D_{22}^{(2)} = D_1^{(2)} \sin^4 \varphi + 2D_3^{(2)} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + D_2^{(2)} \cos^4 \varphi,$$

$$D_{33}^{(2)} = D_h^{(2)} + (D_1^{(2)} + D_2^{(2)} - 2D_3^{(2)}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi,$$

$$D_{12}^{(2)} = D_2^{(2)} \nu_1^{(2)} + (D_1^{(2)} + D_2^{(2)} - 2D_3^{(2)}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi,$$

$$D_{16}^{(2)} = \frac{1}{2} (D_2^{(2)} \sin^2 \varphi - D_1^{(2)} \cos^2 \varphi + D_3^{(2)} \cos 2\varphi) \sin 2\varphi,$$

$$D_{26}^{(2)} = \frac{1}{2} (D_2^{(2)} \cos^2 \varphi - \bar{D}_1^{(2)} \sin^2 \varphi - D_3^{(2)} \cos 2\varphi) \sin 2\varphi.$$

Пересчет комплексных параметров изгиба $\mu_1^{(2)}$ и $\mu_2^{(2)}$ включения при переходе к новым осям производится по формулам [1]

$$\mu_1^{(2)} = \frac{\mu_1^{(2)'} \cos \varphi - \sin \varphi}{\cos \varphi + \mu_1^{(2)'} \sin \varphi}, \quad \mu_2^{(2)} = \frac{\mu_2^{(2)'} \cos \varphi - \sin \varphi}{\cos \varphi + \mu_2^{(2)'} \sin \varphi}.$$

Здесь $D_1^{(2)}$, $D_2^{(2)}$, $D_h^{(2)}$, $D_3^{(2)} = D_1^{(2)} \nu_2^{(2)} + 2D_h^{(2)}$; $\mu_1^{(2)'}$, $\mu_2^{(2)'}$ — главные жесткости и комплексные параметры изгиба ортотропного включения в системе координат $x'y'z'$ (см. фиг. 1).

На фиг. 5 показаны графики распределения моментов $M_0^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) на линии спая пластины (А) и прямоугольного ($a_1/b_1 = 5$) включения (В), когда главные направления упругости пластины и включения составляют между собой угол $\varphi = \pi/3$ (сплошная линия). Графики, помещенные в верхней части фиг. 5, изображают изгибающие моменты в пластине, а в нижней части — изгибающие моменты в ядре. Штриховая линия характеризует случай $\varphi = 0$.

Поступила 23 VIII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: ГИТТЛ, 1957.
2. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л.: ГИТТЛ, 1951.
3. Мартынович Т. Л. Точное решение задачи об изгибе анизотропной пластинки с отверстием. — ПМТФ, 1977, № 5.
4. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Гостехиздат, 1954.
5. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами, выступами. Киев: Вища школа, 1975.
6. Савин Г. И. Механика деформируемых тел. Избранные труды. Киев: Наукова думка, 1979.