

УДК 519.632

## Краевая задача магнитопористости, возникающая при исследовании околоскважинного пространства

Ш.Х. Имомназаров, М.В. Урев

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: imom@omzg.sccc.ru (Имомназаров Ш.Х.), urev@nmsf.sccc.ru (Урев М.В.)

**Имомназаров Ш.Х., Урев М.В.** Краевая задача магнитопористости, возникающая при исследовании околоскважинного пространства // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 1. — С. 15–26.

Доказано существование и единственность обобщенного решения краевой задачи для системы уравнений магнитопористости в диссипативном приближении. Приведены результаты численного решения методом конечных элементов тестовой краевой задачи магнитопористости в частотной области.

**DOI:** 10.15372/SJNM20190102

**Ключевые слова:** пористая среда, магнитное поле, проводящая жидкость, обобщенное решение, метод конечных элементов.

**Imomnazarov Sh.Kh., Urev M.V.** The boundary value problem of magnetoporosity arising in the study of a near-wellbore space // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 1. — P. 15–26.

The existence and uniqueness of the generalized solution of the boundary value problem for the system of magnetoporosity equations in the dissipative approximation have been proved. The results of the numerical solution obtained by the finite element method of the test boundary value problem of magnetoporosity in the frequency domain are presented.

**Keywords:** porous medium, magnetic field, conductive fluid, generalized solution, finite element method.

### 1. Введение

Магнитозвуковые колебания в пористой насыщенной электролитом среде во внешнем постоянном магнитном поле  $\mathbf{b}_0$  с учетом электроакустического эффекта описываются системой уравнений [1, 2]:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}} - c_t^2 \Delta \mathbf{u} - a_1 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + a_2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\rho_l^2}{\rho_s} \bar{\chi} (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) + \frac{\alpha c_e \rho_l}{4\pi \sigma \rho_s} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{0}, \\ \ddot{\mathbf{v}} - a_4 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + a_3 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1}{4\pi \rho_l} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{b}_0 - \rho_l \bar{\chi} (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) - \frac{\alpha c_e}{4\pi \sigma} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{b}} = \operatorname{rot} \left[ -\frac{c_e^2}{4\pi \sigma} \operatorname{rot} \mathbf{b} + \frac{\alpha c_e \rho_l}{\sigma} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{b}_0 \right], \quad \operatorname{div} \mathbf{b} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\rho = \rho_l + \rho_s$ ;  $\rho_s$  — парциальная плотность вмещающей матрицы со скоростью  $\mathbf{u}$ ;  $\rho_l$  — парциальная плотность жидкости;  $\mathbf{v}$  — гидродинамическая скорость жидкости;  $\mathbf{b}$  — магнитная индукция (нет магнитной поляризации);  $\sigma$  — электропроводность среды;  $\bar{\chi} = \chi^\partial - \alpha^2/\sigma$ ;  $\chi^\partial$  — коэффициент трения;  $\alpha$  — электроакустический параметр;

$c_t$  — скорость звука поперечных волн;  $c_e$  — скорость света;  $a_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) — коэффициенты, определяемые из уравнения состояния и являющиеся функциями скоростей звука [1]:

$$a_1 = \alpha \rho_s + \frac{K}{\rho_s} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_s} - \frac{2K}{\rho}, \quad a_2 = \frac{\rho_l}{\rho} \left( \frac{K}{\rho_s} - \alpha \rho \right), \quad a_3 = \frac{K}{\rho} - \alpha \rho_s, \quad a_4 = \alpha \rho_l,$$

$$\alpha = \alpha_3 \rho + \frac{K}{\rho^2}, \quad \mu = \rho_s c_t^2,$$

$$K = \frac{\rho \rho_s}{2 \rho_l} \left( c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_l}{\rho} c_s^2 - \sqrt{\left( c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2 \right)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_l \rho_s}{\rho^2} c_t^4} \right),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2 \rho^2} \left( c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_s}{\rho} c_t^2 + \sqrt{\left( c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2 \right)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_l \rho_s}{\rho^2} c_t^4} \right),$$

$c_{l_1}$  и  $c_{l_2}$  — скорости быстрой и медленной продольной волны соответственно. Приведенная выше система уравнений является результатом линеаризации полной нелинейной системы уравнений, полученной в работах [1, 2].

Электродинамические индукционные приборы, измеряющие электропроводность формации в скважинных условиях, дают незначительную часть свойств насыщенной горной породы. Акустические методы, например в скважинных схемах с использованием волн Стоунли, позволяют измерять проницаемость формации. Поскольку измеренная проницаемость пористой формации в значительной степени зависит от способа ее измерения, возникает желание для однозначной интерпретации скважинных данных произвести упомянутые измерения в рамках единой технологической схемы. Такую возможность открывают электроакустические методы, позволяющие проводить, например, одновременное измерение проницаемости и электропроводности, а также электроакустической постоянной [2]. Принципиальная возможность таких измерений была показана в работе [2] при использовании электроакустического эффекта в магнитоакустике пористых насыщенных сред. В присутствии постоянного магнитного поля в пористой насыщенной электропроводящей среде электромагнитное индукционное зондирование квазистационарным электромагнитным полем порождает акустический отклик, позволяющий при измерении амплитуды этого отклика произвести одновременное измерение электропроводности и проницаемости исследуемой формации при известном значении электроакустического параметра. Эффект акустического отклика исследовался на примере плоской границы раздела сред. Реальные полевые условия подразумевают наличие цилиндрической геометрии скважины с конечным радиусом, что вносит поправки в характерные частоты и в технологическую измерительную конструкцию. В [3] показана возможность практической реализации идей работы [2] для применения к скважинным условиям. А именно, показано, что принципиальная схема измерения электропроводности и проницаемости из работы [2] сохраняется, но характерная частота акустического отклика сдвигается в низкочастотную область со всеми вытекающими для практических измерений последствиями.

## 2. Постановка задачи

В цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  для слоя  $(1, R)$  по  $r$  рассмотрим частный случай общей системы уравнений, приведенной выше и описывающей распространение магнитоупругих волн в пористой среде с учетом электроакустического коэффициента

$\alpha$ , а также коэффициентов Дарси  $\bar{\chi}$  и электропроводности  $\sigma$ . Считаем, что внешнее магнитное поле  $\mathbf{b}_0 = (b_0/r, 0, 0)$  параллельно оси распространения волны  $Oz$ . Граница  $r = 1$  является свободной от напряжений и на ней задано магнитное поле  $(0, 0, b_{z0}(t))$ . Скорости матрицы и жидкости, а также магнитное поле имеют компоненты  $\mathbf{u}(t, r) = (0, u_\varphi(t, r), u_z(t, r))$ ,  $\mathbf{v}(t, r) = (0, v_\varphi(t, r), v_z(t, r))$ ,  $\mathbf{b}(t, r) = (0, b_\varphi(t, r), b_z(t, r))$  соответственно. Преобразования Фурье по  $t$  компонент скоростей и магнитного поля удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений на конечном интервале  $\Omega = (1, R)$  [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t^2 \frac{d}{dr} L u_\varphi + \omega^2 u_\varphi + i\varepsilon\omega\bar{\omega}(u_\varphi - v_\varphi) - i\omega \frac{\alpha c_e}{4\pi\sigma} \frac{db_z}{dr} = 0, \\ \omega v_\varphi - i\bar{\omega}(u_\varphi - v_\varphi) - i \frac{b_0}{4\pi\rho_l r} L b_\varphi + i \frac{\alpha c_e}{4\pi\sigma} \frac{db_z}{dr} = 0, \\ \frac{c_e^2}{4\pi\sigma} \frac{d}{dr} L b_\varphi + i\omega b_\varphi - \frac{\alpha c_e \rho_l}{\sigma} \left( \frac{du_z}{dr} - \frac{dv_z}{dr} \right) + b_0 \frac{d(v_\varphi/r)}{dr} = 0, \\ c_t^2 L \frac{du_z}{dr} + \omega^2 u_z + i\varepsilon\omega\bar{\omega}(u_z - v_z) + i\omega \frac{\alpha c_e}{4\pi\sigma} L b_\varphi = 0, \\ \omega v_z - i\bar{\omega}(u_z - v_z) - i \frac{b_0}{4\pi\rho_l r} \frac{db_z}{dr} - i \frac{\alpha c_e}{4\pi\sigma} L b_\varphi = 0, \\ \frac{c_e^2}{4\pi\sigma} L \frac{db_z}{dr} + i\omega b_z + \frac{\alpha c_e \rho_l}{\sigma} L (u_\varphi - v_\varphi) + b_0 L (v_z/r) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

с условиями на границе  $r = 1$ :

$$\frac{du_\varphi}{dr} - \frac{u_\varphi}{r} = 0, \quad \frac{du_z}{dr} = 0, \quad b_\varphi = 0, \quad b_z = b_{z0}(\omega), \quad (2)$$

где первые два условия в (2) означают равенство нулю тензора напряжений. На правой границе при  $r = R \gg 1$  заданы нулевые условия Дирихле для всех компонент  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{b}$ .

В системе (1)  $Lu = \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr}$ ,  $c_e$  и  $c_t$  — скорости света и поперечной волны соответственно,  $\rho_s$  и  $\rho_l$  — парциальные плотности упругого пористого тела и проводящей жидкости соответственно,  $\varepsilon = \rho_l/\rho_s$ ,  $\bar{\omega} = \rho_l (\chi^\partial - \alpha^2/\sigma)$ ,  $i$  — мнимая единица.

Удобно исключить из системы (1) компоненты скорости движения жидкости. После несложных преобразований получим замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно компонент скорости матрицы  $\mathbf{u}$  и магнитного поля  $\mathbf{b}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dr} L u_\varphi + k_u^2 u_\varphi + \xi \left( \frac{1}{r} L b_\varphi - i \frac{\omega}{\omega_*} \frac{db_z}{dr} \right) = 0, \\ L \frac{du_z}{dr} + k_u^2 u_z + \xi \left( \frac{1}{r} \frac{db_z}{dr} + i \frac{\omega}{\omega_*} L b_\varphi \right) = 0, \\ \frac{d}{dr} L b_\varphi + k_b^2(r) b_\varphi - \frac{\nu(r)}{r^3} L b_\varphi + \eta(r) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} u_\varphi + i \frac{\omega}{\omega_*} u_z \right) = 0, \\ L \frac{db_z}{dr} + k_b^2(r) b_z - \frac{\nu(r)}{r^3} \frac{db_z}{dr} + \eta(r) L \left( \frac{1}{r} u_z - i \frac{\omega}{\omega_*} u_\varphi \right) = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

В системе (3) использованы следующие обозначения:

$$k_u^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2} \left( 1 + \frac{i\bar{\omega}}{\omega + i\bar{\omega}} \varepsilon \right), \quad k_b^2(r) = \frac{i\omega}{D(r)}, \quad \omega_* = \frac{b_0 \bar{\omega} \sigma}{\alpha c_e \rho_l},$$

$$\nu(r) = \frac{2i c_A^2}{D(r) (\omega + i\bar{\omega})}, \quad D(r) = \frac{c_e^2}{4\pi\sigma} + i \frac{c_A^2}{\omega + i\bar{\omega}} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \right),$$

$$\xi = \frac{\varepsilon \omega}{\sqrt{4\pi\rho_l} c_t} \frac{c_A}{(\omega/\bar{\omega} + i) c_t}, \quad \eta(r) = \frac{i\sqrt{4\pi\rho_l} c_A}{D(r) (\omega/\bar{\omega} + i)},$$

$c_A$  — скорость Альвеновской волны.

Компоненты скорости насыщающей проводящей жидкости определяются по формулам

$$v_\varphi = \frac{i\bar{\omega}}{\omega + i\bar{\omega}} u_\varphi + i \frac{\sqrt{4\pi\rho_l} c_A}{\omega + i\bar{\omega}} \left( \frac{\bar{\omega}}{\omega_*} \frac{db_z}{dr} - \frac{1}{r} Lb_\varphi \right),$$

$$v_z = \frac{i\bar{\omega}}{\omega + i\bar{\omega}} u_z + i \frac{\sqrt{4\pi\rho_l} c_A}{\omega + i\bar{\omega}} \left( \frac{\bar{\omega}}{\omega_*} Lb_\varphi + \frac{1}{r} \frac{db_z}{dr} \right).$$

### 3. Обобщенная постановка задачи магнитопороупругости

Приведем обобщенную постановку задачи магнитопороупругости (3), (2). Для этого введем необходимые гильбертовы функциональные пространства. Через  $L^2(\Omega)$  и  $H^1(\Omega)$  будем обозначать комплексные гильбертовы пространства Соболева:

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \|u\|_{0,\Omega}^2 := \int_\Omega |u|^2 dr < \infty \right\},$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ u : u \in L^2(\Omega) \text{ и } \frac{du}{dr} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Нормы в  $L^2(\Omega)$  и  $H^1(\Omega)$  будем обозначать  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$  и  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  соответственно, а полунорму в  $H^1(\Omega)$  как  $|\cdot|_{1,\Omega}$  ( $\Omega$  в очевидных случаях будем опускать), так что

$$\|f\|_{0,\Omega}^2 = \int_\Omega |f|^2 dr, \quad |f|_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega \left| \frac{df}{dr} \right|^2 dr, \quad \|f\|_{1,\Omega}^2 = |f|_{1,\Omega}^2 + \|f\|_{0,\Omega}^2.$$

Через  $H_0^1(\Omega)$  и  $H_R^1(\Omega)$  обозначим два замкнутых подпространства в  $H^1(\Omega)$ :

$$H_0^1(\Omega) = \{ f \in H^1(\Omega) : f(1) = f(R) = 0 \},$$

$$H_R^1(\Omega) = \{ f \in H^1(\Omega) : f(R) = 0 \}.$$

Так как  $\Omega = (1, R)$ , то по теореме вложения Соболева  $H^1(\Omega)$  непрерывно вкладывается в  $C(\bar{\Omega})$ , поэтому значения  $f(1)$  и  $f(R)$  определены корректно. Решение  $(\mathbf{u}, \mathbf{b})$  будем искать в пространстве  $\mathcal{V} = V_1 \times V_2$ , где  $V_1 = (H_R^1(\Omega))^2$ ,  $V_2 = (H_0^1(\Omega))^2$ . За основное пространство, т. е. пространство, отождествляемое со своим антидвойственным пространством, примем пространство  $\mathcal{H} = (L^2(\Omega))^4$ . В данном случае пространство  $\mathcal{V}$  плотно и непрерывно вложено в основное пространство  $\mathcal{H}$ . Кроме того, вложение  $\mathcal{V}$  в  $\mathcal{H}$  компактно [4, с. 153].

Для  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3, g_4) \in \mathcal{H}$  норма определяется равенством

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i=1}^4 \|g_i\|_{0,\Omega}^2.$$

Для  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{V}$  полунорма  $|\mathbf{f}|_{\mathcal{V}}$  и норма  $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{V}}$  определяются как

$$|\mathbf{f}|_{\mathcal{V}}^2 = \sum_{i=1}^4 |f_i|_{1,\Omega}^2, \quad \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{V}}^2 = |\mathbf{f}|_{\mathcal{V}}^2 + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

В системе (3) заменим искомую функцию  $b_z$  на новую  $\tilde{b}_z$ , удовлетворяющую однородным условиям при  $r = 1$  и  $r = R$ :

$$b_z(r, \omega) = \tilde{b}_z(r, \omega) + b_{z0}(\omega) \frac{R-r}{r^2(R-1)}, \quad \tilde{b}_z(1, \omega) = \tilde{b}_z(R, \omega) = 0.$$

При такой замене функции  $b_z$  в правых частях первого, второго и четвертого уравнений системы (3) появятся ненулевые члены, тогда как вид левых частей уравнений в (3) останется без изменений. В дальнейшем у  $\tilde{b}_z$  знак “ $\sim$ ” опустим и будем считать, что новая  $b_z$  удовлетворяет однородным условиям при  $r = 1$  и  $r = R$ . Затем умножим каждое уравнение системы (3) на подходящую пробную функцию и проинтегрируем по  $r$  от 1 до  $R$ . После интегрирования по частям членов, содержащих вторую производную, с учетом граничных условий (2) получим следующую систему интегральных тождеств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_1^R \left[ \frac{du_\varphi}{dr} \frac{dv_\varphi^*}{dr} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{dv_\varphi^*}{dr} - k_u^2 u_\varphi v_\varphi^* - \frac{\xi}{r} \left( \frac{1}{r} b_\varphi + \frac{db_\varphi}{dr} \right) v_\varphi^* + i\xi \frac{\omega}{\omega_*} \frac{db_z}{dr} v_\varphi^* \right] dr + \\ \quad 2u_\varphi(1)v_\varphi^*(1) = \frac{i\omega\xi b_{z0}(\omega)}{\omega_*(R-1)} \int_1^R \frac{1}{r^2} \left( \frac{2R}{r} - 1 \right) v_\varphi^* dr, \\ \int_1^R \left[ \frac{du_z}{dr} \frac{dv_z^*}{dr} - \frac{1}{r} \frac{du_z}{dr} v_z^* - k_u^2 u_z v_z^* - \frac{\xi}{r} \frac{db_z}{dr} v_z^* - i\xi \frac{\omega}{\omega_*} \left( \frac{1}{r} b_\varphi + \frac{db_\varphi}{dr} \right) v_z^* \right] dr \\ \quad = -\xi \frac{b_{z0}(\omega)}{(R-1)} \int_1^R \frac{1}{r^3} \left( \frac{2R}{r} - 1 \right) v_z^* dr, \\ \int_1^R \left[ \frac{db_\varphi}{dr} \frac{dp_\varphi^*}{dr} + \frac{1}{r} b_\varphi \frac{dp_\varphi^*}{dr} - k_b^2(r) b_\varphi p_\varphi^* + \frac{\nu(r)}{r^3} \left( \frac{1}{r} b_\varphi + \frac{db_\varphi}{dr} \right) p_\varphi^* - \right. \\ \quad \left. \eta(r) \left( \frac{1}{r^2} u_\varphi - \frac{1}{r} \frac{du_\varphi}{dr} - i \frac{\omega}{\omega_*} \frac{du_z}{dr} \right) p_\varphi^* \right] dr = 0, \\ \int_1^R \left[ \frac{db_z}{dr} \frac{dp_z^*}{dr} - \frac{1}{r} \frac{db_z}{dr} p_z^* - k_b^2(r) b_z p_z^* + \frac{\nu(r)}{r^3} \frac{db_z}{dr} p_z^* - \right. \\ \quad \left. \eta(r) \left( \frac{1}{r} \frac{du_z}{dr} - i \frac{\omega}{\omega_*} \left( \frac{1}{r} u_\varphi + \frac{du_\varphi}{dr} \right) \right) p_z^* \right] dr \\ \quad = \frac{b_{z0}(\omega)}{R-1} \int_1^R \frac{1}{r^2} \left( \frac{2R}{r} - 1 \right) \left[ \frac{dp_z^*}{dr} + \left( \frac{1}{r} + \frac{\nu(r)}{r^3} + k_b^2(r)(R-r) \right) p_z^* \right] dr, \end{array} \right. \quad (4)$$

где  $f^*$  означает комплексно-сопряженную величину для  $f$ .

Пусть  $\mathbf{U} = (u_\varphi, u_z, b_\varphi, b_z) \in \mathcal{V}$ ,  $\mathbf{V} = (v_\varphi, v_z, p_\varphi, p_z) \in \mathcal{V}$ . На  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  определим полуторалинейную форму

$$\begin{aligned} b(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_1^R \left\{ \left( \frac{du_\varphi}{dr} \frac{dv_\varphi^*}{dr} + \frac{du_z}{dr} \frac{dv_z^*}{dr} + \frac{db_\varphi}{dr} \frac{dp_\varphi^*}{dr} + \frac{db_z}{dr} \frac{dp_z^*}{dr} \right) - k_u^2 (u_\varphi v_\varphi^* + u_z v_z^*) - \right. \\ \quad k_b^2(r) (b_\varphi p_\varphi^* + b_z p_z^*) + \frac{1}{r} \left( u_\varphi \frac{dv_\varphi^*}{dr} + b_\varphi \frac{dp_\varphi^*}{dr} - v_z^* \frac{du_z}{dr} - p_z^* \frac{db_z}{dr} \right) - \\ \quad \frac{\xi}{r} \left( \frac{1}{r} b_\varphi + \frac{db_\varphi}{dr} \right) v_\varphi^* + i\xi \frac{\omega}{\omega_*} \frac{db_z}{dr} v_\varphi^* - \frac{\xi}{r} \frac{db_z}{dr} v_z^* - i\xi \frac{\omega}{\omega_*} \left( \frac{1}{r} b_\varphi + \frac{db_\varphi}{dr} \right) v_z^* + \\ \quad \frac{\nu(r)}{r^3} \left( \frac{1}{r} b_\varphi + \frac{db_\varphi}{dr} \right) p_\varphi^* - \eta(r) \left( \frac{1}{r^2} u_\varphi - \frac{1}{r} \frac{du_\varphi}{dr} - i \frac{\omega}{\omega_*} \frac{du_z}{dr} \right) p_\varphi^* + \\ \quad \left. \frac{\nu(r)}{r^3} \frac{db_z}{dr} p_z^* - \eta(r) \left( \frac{1}{r} \frac{du_z}{dr} - i \frac{\omega}{\omega_*} \left( \frac{1}{r} u_\varphi + \frac{du_\varphi}{dr} \right) \right) p_z^* \right\} dr + 2u_\varphi(1)v_\varphi^*(1). \end{aligned} \quad (5)$$

Введем антилинейный функционал на  $\mathcal{V}$

$$F(\mathbf{V}) = \frac{b_{z0}(\omega)}{R-1} \int_1^R \left\{ \frac{1}{r^2} \left( \frac{2R}{r} - 1 \right) \left[ \frac{dp_z^*}{dr} + \left( \frac{1}{r} + \frac{\nu(r)}{r^3} + k_b^2(r)(R-r) \right) p_z^* \right] + \frac{\xi}{r^2} \left( \frac{2R}{r} - 1 \right) \left( i \frac{\omega}{\omega_*} v_\varphi^* - \frac{1}{r} v_z^* \right) \right\} dr. \quad (6)$$

Обобщенная формулировка для задачи (3), (2) будет выглядеть следующим образом: требуется найти такую вектор-функцию  $\mathbf{U} \in \mathcal{V}$ , для которой выполняется равенство

$$b(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = F(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{V}. \quad (7)$$

Для доказательства существования решения задачи (7) применим теорию Рисса–Фредгольма [5, с. 74].

Непрерывность полуторалинейной формы  $b(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  на  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  и непрерывность антилинейного функционала  $F(\mathbf{V})$  на  $\mathcal{V}$  устанавливаются с помощью неравенства Коши–Буняковского и неравенств

$$|u_\varphi(1)| \leq \sqrt{R-1} \|\mathbf{U}\|_{1,\Omega}, \quad |v_\varphi^*(1)| \leq \sqrt{R-1} \|\mathbf{V}\|_{1,\Omega},$$

где  $R$  — правый конец интервала  $\Omega = [1, R]$ .

Непрерывной на  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  полуторалинейной форме  $b(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  отвечает ограниченный линейный оператор  $B \in L(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ , определяемый как

$$\langle B\mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = b(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{V},$$

где  $\mathcal{V}'$  — это пространство, антидвойственное к  $\mathcal{V}$ , а  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$  обозначает отношение антидвойственности на  $\mathcal{V}' \times \mathcal{V}$ , являющееся обобщением скалярного произведения в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . Покажем, что полуторалинейная форма  $b(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  является  $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ -коэрцитивной, т. е. существуют постоянная  $C > 0$  и действительная постоянная  $\lambda$ :

$$\operatorname{Re} b(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \lambda \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \geq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{V}. \quad (8)$$

Из (5) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} b(\mathbf{U}, \mathbf{U}) &= \int_1^R \left( \left| \frac{du_\varphi}{dr} \right|^2 + \left| \frac{du_z}{dr} \right|^2 + \left| \frac{db_\varphi}{dr} \right|^2 + \left| \frac{db_z}{dr} \right|^2 \right) dr - \\ &\int_1^R \left[ \operatorname{Re}(k_u^2) (|u_\varphi|^2 + |u_z|^2) + \operatorname{Re}(k_b^2(r)) (|b_\varphi|^2 + |b_z|^2) \right] dr + \\ &\int_1^R \frac{1}{r} \left[ \operatorname{Re} \left( u_\varphi \frac{du_\varphi^*}{dr} \right) + \operatorname{Re} \left( b_\varphi \frac{db_\varphi^*}{dr} \right) - \operatorname{Re} \left( u_z^* \frac{du_z}{dr} \right) - \operatorname{Re} \left( b_z^* \frac{db_z}{dr} \right) \right] dr - \\ &\int_1^R \left[ \frac{1}{r} \operatorname{Re}(\xi b_\varphi u_\varphi^*) + \frac{1}{r} \operatorname{Re} \left( \xi \frac{db_\varphi}{dr} u_\varphi^* \right) - \frac{\omega}{\omega_*} \operatorname{Re} \left( i \xi \frac{db_z}{dr} u_\varphi^* \right) + \right. \\ &\left. \frac{1}{r} \operatorname{Re} \left( \xi \frac{db_z}{dr} u_z^* \right) + \frac{1}{r} \frac{\omega}{\omega_*} \operatorname{Re} (i \xi b_\varphi u_z^*) + \frac{\omega}{\omega_*} \operatorname{Re} \left( i \xi \frac{db_\varphi}{dr} u_z^* \right) \right] dr + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_1^R \left[ \frac{1}{r^4} \operatorname{Re}(\nu(r) b_\varphi b_\varphi^*) + \frac{1}{r^3} \operatorname{Re} \left( \nu(r) \frac{db_\varphi}{dr} b_\varphi^* \right) - \frac{1}{r^2} \operatorname{Re}(\eta(r) u_\varphi b_\varphi^*) + \right. \\
 & \quad \frac{1}{r} \operatorname{Re} \left( \eta(r) \frac{du_\varphi}{dr} b_\varphi^* \right) + \frac{\omega}{\omega_*} \operatorname{Re} \left( i\eta(r) \frac{du_z}{dr} b_\varphi^* \right) + \frac{1}{r^3} \operatorname{Re} \left( \nu(r) \frac{db_z}{dr} b_z^* \right) - \\
 & \quad \frac{1}{r} \operatorname{Re} \left( \eta(r) \frac{du_z}{dr} b_z^* \right) + \frac{\omega}{r\omega_*} \operatorname{Re}(i\eta(r) u_\varphi b_z^*) + \\
 & \quad \left. \frac{\omega}{\omega_*} \operatorname{Re} \left( i\eta(r) \frac{du_\varphi}{dr} b_z^* \right) \right] dr + 2|u_\varphi(1)|^2. \tag{9}
 \end{aligned}$$

При доказательстве неравенства (8) будем использовать для комплексных  $z_1$  и  $z_2$  неравенство  $|\operatorname{Re}(z_1 z_2)| \leq |z_1| |z_2|$  и  $\delta$ -неравенство

$$|z_1 z_2| \leq \frac{\delta}{2} |z_1|^2 + \frac{1}{2\delta} |z_2|^2, \quad \delta > 0. \tag{10}$$

Из определения величин  $k_u$ ,  $k_b(r)$ ,  $\nu(r)$  и  $\eta(r)$  следует, что  $\operatorname{Re}(k_u^2) > 0$  и  $\operatorname{Re}(k_b^2(r)) > 0$ , и функции  $|k_b(r)|$ ,  $|\nu(r)|$  и  $|\eta(r)|$  ограничены на интервале  $\Omega = [1, R]$ .

Выражение в первых двух строках (9) можно, очевидно, оценить снизу величиной

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{V}}^2 - C_1 \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \text{где } C_1 = \max_{r \in \Omega} \left\{ |\operatorname{Re}(k_u^2)|, |\operatorname{Re}(k_b^2(r))| \right\} + 1.$$

Получим оценки снизу для остальных слагаемых в (9). Оценку снизу для каждого слагаемого в (9), не содержащего производную, приведем на примере одного слагаемого. Например,

$$\int_1^R \left[ \frac{1}{r} \operatorname{Re}(\xi b_\varphi u_\varphi^*) \right] dr \leq |\xi| \int_1^R |b_\varphi| |u_\varphi^*| dr \leq |\xi| \|b_\varphi\|_0 \|u_\varphi\|_0 \leq C_2 \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2,$$

откуда

$$- \int_1^R \left[ \frac{1}{r} \operatorname{Re}(\xi b_\varphi u_\varphi^*) \right] dr \geq -C_2 \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Оценку снизу для каждого слагаемого в (9), содержащего производную, также приведем на примере одного слагаемого. Например,

$$\begin{aligned}
 -\frac{\omega}{\omega_*} \int_1^R \left[ \operatorname{Re} \left( i\eta(r) \frac{du_\varphi}{dr} b_z^* \right) \right] dr & \leq \frac{\omega}{\omega_*} |\eta(r)| \int_1^R \left| \frac{du_\varphi}{dr} \right| |b_z| dr \\
 & \leq \frac{C_3 \delta}{2} \int_1^R \left| \frac{du_\varphi}{dr} \right|^2 dr + \frac{C_3}{2\delta} \int_1^R |b_z|^2 dr, \quad C_3 = \frac{\omega}{\omega_*} \max_{r \in \Omega} |\eta(r)|,
 \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\omega}{\omega_*} \int_1^R \left[ \operatorname{Re} \left( i\eta(r) \frac{du_\varphi}{dr} b_z^* \right) \right] dr \geq -\frac{C_3 \delta}{2} \int_1^R \left| \frac{du_\varphi}{dr} \right|^2 dr - \frac{C_3}{2\delta} \int_1^R |b_z|^2 dr.$$

Суммируя все неравенства, полученные таким образом, мы находим, что

$$\operatorname{Re} b(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \geq (1 - C_4 \delta) \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{V}}^2 - \frac{C_5}{\delta} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Выбирая  $\delta$  достаточно малым так, чтобы было  $1 - C_4 \delta > 0$ , мы получим неравенство (8) с  $C = 1 - C_4 \delta$  и  $\lambda = C_5 / \delta$ .

Система (3) в качестве главной части содержит операторы Гельмгольца

$$\frac{d}{dr}L + k^2 \quad \text{и} \quad L \frac{d}{dr} + k^2.$$

Для приведенных операторов Гельмгольца однородные краевые задачи имеют только нулевые решения. Следовательно, на основе метода последовательных приближений однородная задача ( $b_{z0}(\omega) = 0$ ) для системы (3), (2) также будет иметь только нулевое решение, т. е. для однородной системы (3), (2) ноль не является собственным значением. Таким образом, относительно существования решения задачи (7) можно утверждать, что оператор  $B : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  есть оператор Фредгольма с нулевым индексом [6, теорема 2.34]. Отсюда на основе первой теоремы Фредгольма заключаем, что краевая задача (3), (2) имеет единственное обобщенное решение для любого краевого значения  $b_{z0}(\omega)$ .

#### 4. Конечно-элементная дискретизация

На интервале  $[1, R]$  введем сетку  $\omega_h$ :

$$\begin{aligned} \omega_h &= \{r_0 = 1 < r_1 < \dots < r_{N-1} < r_N = R\}, \\ h_i &= r_i - r_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad h = \max_i h_i. \end{aligned}$$

С каждым сеточным узлом  $r_i$  свяжем функцию  $\varphi_i(r)$ , линейную на каждом промежутке  $[r_{j-1}, r_j]$ ,  $j = 1, \dots, N$ , и удовлетворяющую условиям

$$\varphi_i(r_j) = \delta_i^j, \quad i, j = 0, \dots, N,$$

где  $\delta_i^j$  — символ Кронекера.

Для решения задачи (7) применим метод Бубнова–Галеркина [7, с. 42], используя семейства пространств кусочно-линейных функций  $V_h^0$  и  $V_h^1$  с узловым базисом. Здесь

$$V_h^0 = \text{span}\{\varphi_i(r)\}_{i=0}^{N-1}, \quad V_h^1 = \text{span}\{\varphi_i(r)\}_{i=1}^{N-1}.$$

Оценки аппроксимации кусочно-линейными функциями регулярных функций одной переменной изложены, например, в [7, с. 102].

Пусть  $\mathcal{V}_h^0 = V_h^0 \times V_h^0$ ,  $\mathcal{V}_h^1 = V_h^1 \times V_h^1$ . Приближенное решение задачи (7) определим как четверку функций  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4$ , таких что  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in \mathcal{V}_h^0$ ,  $(\tilde{u}_3, \tilde{u}_4) \in \mathcal{V}_h^1$  и удовлетворяющих интегральному тождеству

$$b(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4; \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3, \tilde{\psi}_4) = F(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3, \tilde{\psi}_4)$$

при произвольных  $(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) \in \mathcal{V}_h^0$  и  $(\tilde{\psi}_3, \tilde{\psi}_4) \in \mathcal{V}_h^1$ . Функции  $\tilde{u}_i$  ищем в виде

$$\tilde{u}_i(r) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{ki} \varphi_k(r), \quad i = 1, 2, \quad \tilde{u}_j(r) = \sum_{k=1}^{N-1} a_{kj} \varphi_k(r), \quad j = 3, 4.$$

Система сеточных уравнений для нахождения коэффициентов  $a_{ki}$ , определяющих функции  $\tilde{u}_i$ , запишется так:



$$\begin{cases} b(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4; \varphi_k, 0, 0, 0) = F(\varphi_k, 0, 0, 0), \\ b(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4; 0, \varphi_k, 0, 0) = F(0, \varphi_k, 0, 0), \\ b(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4; 0, 0, \varphi_m, 0) = F(0, 0, \varphi_m, 0), \\ b(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4; 0, 0, 0, \varphi_m) = F(0, 0, 0, \varphi_m), \end{cases} \quad (11)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1, \quad m = 1, \dots, N-1.$$

Приведем матрично-векторную запись для системы сеточных уравнений (11). Каждой функции  $\tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4) \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{V}_h^1$  поставим в соответствие вектор  $\mathbf{z}$  из  $(4N-2)$ -мерного комплексного евклидова пространства  $E^{4N-2}$  следующим образом: первые  $N$  координат вектора  $\mathbf{z}$  суть  $N$  значений функции  $\tilde{z}_1$  в узлах сетки  $\omega_h$ , занумерованных в том же порядке, что и узлы; вторая группа  $N$  координат вектора  $\mathbf{z}$  суть значения  $\tilde{z}_2$  в узлах сетки; третья группа  $N-1$  координат вектора  $\mathbf{z}$  суть значения  $\tilde{z}_3$  в  $N-1$  узлах сетки  $r_2, \dots, r_N$  и четвертая группа  $N-1$  координат вектора  $\mathbf{z}$  суть значения  $\tilde{z}_4$  в  $N-1$  узлах сетки  $r_2, \dots, r_N$ . Поскольку компоненты  $\tilde{z}_i$  функции  $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{V}_h^1$  однозначно определяются своими значениями в узлах сетки  $\omega_h$ , то между множеством вектор-функций  $\tilde{\mathbf{z}}$  из  $\mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{V}_h^1$  и  $E^{4N-2}$  по описанному выше правилу устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Таким образом, полуторалинейную форму  $b(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}})$  на  $\mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{V}_h^1$  можно рассматривать как полуторалинейный функционал в  $E^{4N-2}$ , которому отвечает матрица  $A$  такая, что

$$b(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}) = (A\mathbf{z}, \boldsymbol{\psi}), \quad \mathbf{z}, \boldsymbol{\psi} \in E^{4N-2}.$$

Аналогичным образом формируется вектор  $\mathbf{y} \in E^{4N-2}$  правой части, и дискретная задача (11) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$A\mathbf{z} = \mathbf{y}.$$

Обоснование сходимости метода Бубнова–Галеркина применительно к нашей системе обыкновенных дифференциальных уравнений см. в [8, с. 433].

Ниже представлены численные результаты моделирования компоненты акустических полей для тестовой модели среды. В качестве модели выбрана однородная среда со следующими параметрами в системе СГС:  $\sigma = 10^9 \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha = 10^7 (\text{см}^3/\text{г}\cdot\text{с}^2)^{1/2}$ ,  $\bar{\omega} = 10^9 \text{ с}^{-1}$ ,  $b_0 = 10^3 \text{ Гс}$ ,  $\rho_l = 0.1 \text{ г/см}^3$ ,  $c_e = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$ ,  $c_t = 10^5 \text{ см/с}$ ,  $R = 10^5 \text{ см}$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . Данная среда близка по своим физическим свойствам песчанику Береа (Berea) [2, 3]. В качестве зондирующего сигнала был выбран импульс с колокольной огибающей, имеющий в частотной области следующий вид:

$$b_{z0}(\omega) = 10^3 \left[ \exp\left(-\left(\frac{\omega - 2\pi f}{\pi f}\right)^2\right) + \exp\left(-\left(\frac{\omega + 2\pi f}{\pi f}\right)^2\right) \right] \exp\left(-i 1.75 \frac{\omega}{f}\right),$$

где  $f$  — доминирующая частота, принятая равной 1 Гц.

На рисунках 1 и 2 изображены соответствующие амплитудные спектры  $|u_\varphi(\omega)|$  и  $|u_z(\omega)|$  на границе скважины.

Из представленного на рис. 3 графика непосредственно следует, что отношение амплитуд компонент скорости матрицы является монотонной функцией частоты. При этом существует такая частота, при которой данное отношение принимает единичное значение. Это значение частоты измерения акустических амплитуд поперечной магнитоакустической волны в акустическом отклике резко сдвигается в низкочастотную область по сравнению с плоским случаем [2].

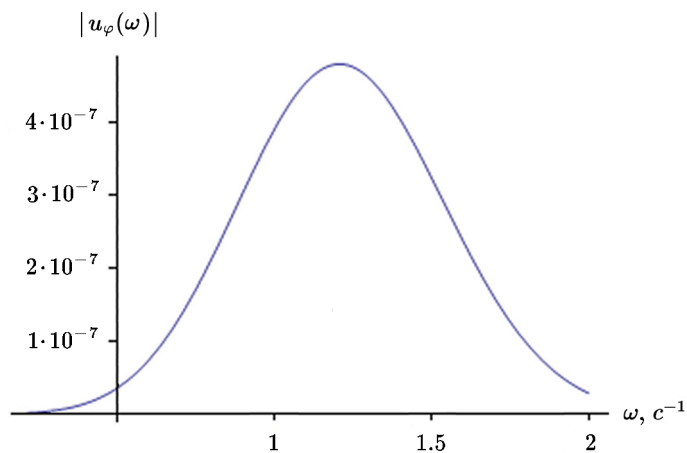


Рис. 1. График функции  $|u_\varphi(\omega)|$  на границе скважины

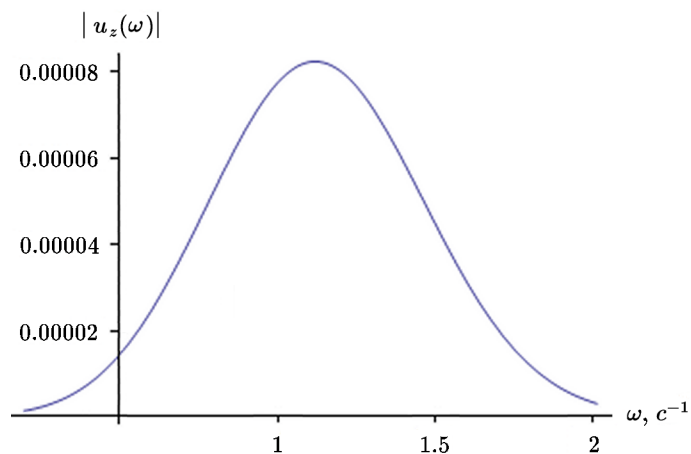


Рис. 2. График функции  $|u_z(\omega)|$  на границе скважины

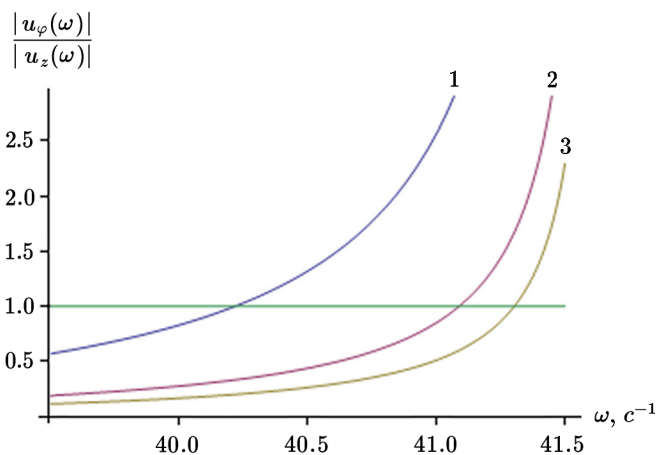


Рис. 3. График функции  $\frac{|u_\varphi(\omega)|}{|u_z(\omega)|}$  на границе скважины для разных значений проводимости  $\sigma$  ( $10^9$  – кривая 1;  $3 \cdot 10^9$  – кривая 2;  $5 \cdot 10^9$  – кривая 3) при фиксированных физических параметрах:  $\alpha = 10^7 (\text{см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2)^{1/2}$ ,  $\bar{\omega} = 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $b_0 = 10^3 \text{ Гс}$ ,  $\rho_l = 0.1 \text{ г}/\text{см}^3$ ,  $c_e = 3 \cdot 10^{10} \text{ см}/\text{с}$ ,  $c_t = 10^5 \text{ см}/\text{с}$ ,  $\varepsilon = 0.1$

## 5. Заключение

В работе исследована краевая задача для системы уравнений поперечных волн магнитопористости в диссипативном приближении, обусловленной коэффициентами межфазного трения, проводимости и электроакустическим коэффициентом.

Доказано существование и единственность обобщенного решения краевой задачи.

Проведена конечномерная аппроксимация рассмотренной краевой задачи на основе метода конечных элементов.

Приведены результаты численного решения тестовой краевой задачи магнитопористости в частотной области.

Численно показано существование характерной частоты, при которой измеренные амплитуды на устье скважины совпадают и принимают меньшее значение по сравнению с плоским случаем [2].

## Литература

1. **Dorovsky V.N., Imomnazarov Kh.Kh.** A mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium // *Mathematical and Computer Modelling*. — 1994. — Vol. 20. — P. 91–97.
2. **Доровский В.Н., Доровский С.В.** Электромагнитоакустический метод измерения электропроводности и дзета-потенциала // *Геология и геофизика*. — 2009. — Т. 50, № 6. — С. 735–744.
3. **Имомназаров Ш.Х., Доровский В.Н.** Магнитозвуковые колебания в скважинных условиях, определяющие электрокинетические параметры пористой насыщенной среды // *Материалы XIII Междунар. науч. конгр. “Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2017”, 19–21 апреля 2017 г., сб. материалов Междунар. науч. конф. “Дистанционные методы зондирования Земли и фотogramметрия, мониторинг окружающей среды, геоэкология”*. Т. 1. — Новосибирск: СГУГиТ, 2017. — С. 186–190.
4. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983.
5. **Обэн Ж.-П.** Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
6. **McLean W.** *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. — Cambridge University Press, 2000.
7. **Марчук Г.И., Агошков В.И.** Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981.
8. **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.

*Поступила в редакцию 19 декабря 2017 г.*

*После доработки 13 февраля 2018 г.*

*Принята к публикации 5 октября 2018 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Dorovsky V.N., Imomnazarov Kh.Kh.** A mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium // *Mathematical and Computer Modelling*. — 1994. — Vol. 20. — P. 91–97.
2. **Dorovsky V.N., Dorovsky S.V.** Elektromagnitoakusticheskiy metod izmereniya elektroprovodnosti i dzeta-potenciala // *Geologiya i geofizika*. — 2009. — Т. 50, № 6. — С. 735–744.
3. **Imomnazarov Sh.Kh., Dorovsky V.N.** Magnitozvukovyye kolebaniya v skvazhinnykh usloviyakh, opredelyayushchie elektrokineticheskiye parametry poristoy nasyshchennoy sredy // *Materialy XIII Mezhdunar. nauch. kongr. “Interekspo GEO-Sibir’-2017”, 19–21 aprelya 2017*

g., sb. materialov Mezhdunar. nauch. konf. "Distancionnye metody zondirovaniya Zemli i fotogrammetriya, monitoring okruzhayushchey sredy, geokologiya". Т. 1.—Novosibirsk: SGUGiТ, 2017.—S. 186–190.

4. **Mikhailov V.P.** Differencial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh. — М.: Nauka, 1983.
5. **Oben Zh.-P.** Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach. — М.: Mir, 1977.
6. **McLean W.** Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. — Cambridge University Press, 2000.
7. **Marchuk G.I., Agoshkov V.I.** Vvedenie v proekcionno-setochnye metody. — М.: Nauka, 1981.
8. **Mikhlin S.G.** Variacionnye metody v matematicheskoy fizike. — М.: Nauka, 1970.