

Фиг. 6

ности уравнения состояния жидкости, могут отличаться друг от друга. Так, на фиг. 6 приведена зависимость амплитуды солитона от квадрата его скорости ($c_*^2 < c^2 \leq c_e^2$). Кривая 1 соответствует линейному уравнению состояния жидкости, кривая 2 — нелинейному. Равновесное состояние среды при $\eta_e = \pm\infty$ имеет вид $p_e = 2p_0$, $V_e^{-\gamma} = p_e/p_0 = 2$, $k_e = 10^{-4}$, $V_e = 0$, $\gamma = 1, 4$, $p_0 = 10^5 \text{ Па}/\rho_0 c_0^2$. Видно, что для солитонов, квадраты скорости которых меньше 0,9, амплитуды для линейного и нелинейного уравнений состояния жидкости совпадают. При $c^2 > 0,9$ амплитуды существенно различны.

Таким образом, для одномерных стационарных возмущений получено точное решение нелинейных уравнений движения жидкости с пузырьками газа. При этом учет гидродинамической нелинейности и сжимаемости жидкого компонента среды приводит к расширению класса стационарных решений.

Автор выражает благодарность В. К. Кедринскому за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступила 28 XII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Когарко Б. С. Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникновением и развитием кавитации. — ДАН СССР, 1964, т. 155, № 4.
2. Гончаров В. В., Наугольных К. А., Рыбак С. А. Стационарные возмущения в жидкости, содержащей пузырьки газа. — ПМТФ, 1976, № 6.
3. Богуславский Ю. Я., Григорьев С. Б. О распространении волн произвольной амплитуды в газожидкостной смеси. — Акуст. журн., 1977, т. 23, № 4.
4. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа. — ПМТФ, 1960, № 3.
5. Иорданский С. В., Куликовский А. Г. О движении жидкости, содержащей мелкие частицы. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 4.
6. Коул Р. Подводные взрывы. М.: ИЛ, 1950.

УДК 541.182 : 532.7 : 539.219.3

ПРОБЛЕМА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА В МНОГОФАЗНЫХ СРЕДАХ

Ю. В. Первушин
(Донецк)

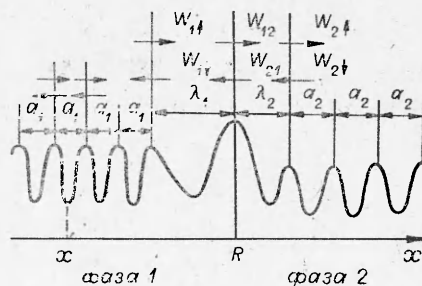
Нестационарные явления переноса в многофазных средах во многом определяются кинетическими процессами на границах раздела. Простейшие идеализации, восходящие к временам Фурье и Фика, когда межфазовая кинетика задана граничными условиями типа

$$\partial n_i / \partial R = a_{ij}(n_i - n_j),$$

не в состоянии отразить основные черты процессов переноса, когда физические условия на поверхностях раздела существенно и быстро изменяются. Особенно это относится к задачам с подвижными границами, возникающим, например, при анализе кинетики фазовых превращений [1—5]. В сферическом варианте нестационарные эффекты заведомо обусловлены, в частности, лапласовским давлением, которое явно связано с законом движения границы ($\sim 1/R(t)$).

Дадим вывод общего типа граничной кинетики, основываясь на процессе одномерного переноса фиксированного компонента вещества через границу раздела R двух сред (фаз), которая является поверхностью раз-

рыва для поля концентраций данного компонента. Рассмотрим модель, схематически показанную на фигуре. Она предполагает, что объем сред можно разбить на некоторые элементарные области молекулярного порядка протяженности a_i , причем они могут кинетически и деформационно изменяться во времени, т. е. $a_i = a_i(t)$. В случае твердых сред параметр a_i соответствует постоянной решетке, для газовых сред — длине свободного пробега частиц. Полагаем, что движение частиц происходит в некотором потенциальном поле, усредненный рельеф которого схематически изображен на фигуре. Присутствие внешних и внутренних полей вносит асимметрию в потенциальный рельеф частиц, изменяя кинетику их перебросов в прямом и обратном направлениях. В дальнейшем средние скорости таких случайных блужданий W_i будут различаться направлениями стрелок. Кроме того, будем считать, что размеры $\lambda_i(t)$ элементарных ячеек, непосредственно примыкающих к границе, искажены и отличны от объемных. Предлагаемая модель фаз в какой-то мере сочетает элементы дискретного и непрерывного.



В соответствии с кинетической схемой фигуры законы сохранения числа частиц для двух элементарных пограничных областей, примыкающих к границе слева и справа, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\lambda_1(t)}^0 n_1(R+z, t) dz &= \frac{1}{\lambda_2} \int_0^{\lambda_2} W_{21}(R+z, t) n_2(R+z, t) dz - \\ &- \frac{1}{\lambda_1} \int_{-\lambda_1}^0 [W_{12}(R+z, t) n_1(R+z, t) + W_{1\downarrow}(R+z, t) n_1(R+z, t)] dz + \\ &+ \frac{1}{a_1} \int_{-a_1}^0 W_{1\uparrow}(R-\lambda_1+z, t) n_1(R-\lambda_1+z, t) dz, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\lambda_2(t)} n_2(R+z, t) dz &= \frac{1}{\lambda_1} \int_{-\lambda_1}^0 W_{12}(R+z, t) n_1(R+z, t) dz - \\ &- \frac{1}{\lambda_2} \int_0^{\lambda_2} [W_{21}(R+z, t) n_2(R+z, t) + W_{2\uparrow}(R+z, t) n_2(R+z, t)] dz + \\ &+ \frac{1}{a_2} \int_0^{a_2} W_{2\downarrow}(R+\lambda_2+z, t) n_2(R+\lambda_2+z, t) dz, \end{aligned}$$

где n_i — граничные концентрации рассматриваемого компонента на левой и правой стороне границы R . Средние скорости блужданий $W_{i\uparrow}$, $W_{i\downarrow}$ и средние скорости переходов через границу W_{ij} вычисляются путем усреднения по соответствующим функциям распределения частиц в заданном направлении с учетом вероятностей перебросов. Проводя разложения и учитывая уравнения переноса внутри объема фаз, которые следуют из аналогичных законов сохранения для элементарных областей ($x \pm a_i/2$) и имеют вид

$$(1) \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} = -\frac{\partial J_i}{\partial x} - \dot{\sigma}_i(a_i) n_i, \quad J_i = v_i n_i - \frac{\partial}{\partial x} (D_i n_i),$$

где $v_i = W_{i1} - W_{i2}$; $D_i = \frac{a_i}{2} (W_{i1} + W_{i2})$; $\dot{\sigma}_i(a_i) = \frac{1}{a_i} \frac{\partial a_i}{\partial t}$, получаем с точностью до линейных по параметрам a_i и λ_i членов, что граничная кинетика описывается системой уравнений

$$(2) \quad \begin{aligned} \delta_1 \partial n_1 / \partial t &= u_{11} n_1 + u_{12} n_2 + D_{11} \partial n_1 / \partial R + D_{12} \partial n_2 / \partial R, \\ \delta_2 \partial n_2 / \partial t &= u_{21} n_1 + u_{22} n_2 + D_{21} \partial n_1 / \partial R + D_{22} \partial n_2 / \partial R, \end{aligned}$$

$$\text{где } \delta_i = \frac{\lambda_i}{2} \left(i - \frac{2}{3} \frac{\lambda_i}{a_i} - \frac{1}{3} \frac{a_i}{\lambda_i} \right);$$

$$\begin{aligned} u_{11} &= v_1 - \frac{1}{2} \left(i + \frac{\lambda_i}{a_i} \right) \frac{\partial D_i}{\partial R} - W_{12} + \frac{\lambda_1}{2} \frac{\partial W_{12}}{\partial R} + \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda_1^2}{a_1} - \frac{a_1 + 3\lambda_1}{4} \right) \frac{\partial v_1}{\partial R} + \\ &+ \frac{1}{6} \left(a_1 + 3\lambda_1 + 2 \frac{\lambda_1^2}{a_1} \right) \dot{\sigma}(a_1) - \lambda_1 \dot{\sigma}(\lambda_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{22} &= -v_2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_2}{a_2} \right) \frac{\partial D_2}{\partial R} - W_{21} - \frac{\lambda_2}{2} \frac{\partial W_{21}}{\partial R} + \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda_2^2}{a_2} - \frac{a_2 + 3\lambda_2}{4} \right) \frac{\partial v_2}{\partial R} + \\ &+ \frac{1}{6} \left(a_2 + 3\lambda_2 + 2 \frac{\lambda_2^2}{a_2} \right) \dot{\sigma}(a_2) - \lambda_2 \dot{\sigma}(\lambda_2); \end{aligned}$$

$$u_{12} = W_{21} + \frac{\lambda_2}{2} \frac{\partial W_{21}}{\partial R}, \quad u_{21} = W_{12} - \frac{\lambda_1}{2} \frac{\partial W_{12}}{\partial R},$$

$$D_{11} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{a_1} \right) D_1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda_1^2}{a_1} - \frac{a_1 + 3\lambda_1}{4} \right) v_1 + \frac{\lambda_1}{2} W_{12};$$

$$D_{22} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_2}{a_2} \right) D_2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda_2^2}{a_2} - \frac{a_2 + 3\lambda_2}{4} \right) v_2 - \frac{\lambda_2}{2} W_{21};$$

$$D_{12} = \frac{\lambda_2}{2} W_{21}; \quad D_{21} = -\frac{\lambda_1}{2} W_{12}.$$

Граничная кинетика чувствительна к структуре пограничного слоя. Для двух вариантов, когда $\lambda_i/a_i = 1/2$ и 1 , $\delta_i = 0$ и граничные условия близки к традиционной форме.

В сферическом случае граничные условия на поверхности сферы также определяются формой (2), однако кинетические коэффициенты u_{ii} и D_{ii} содержат соответственно дополнительные слагаемые

$$\frac{1}{3R} \left[\left(a_i + 2 \frac{\lambda_i^2}{a_i} - 3\lambda_i \right) v_i + a_i \left(\frac{\lambda_i^2}{a_i} - 1 \right) \frac{\partial D_i}{\partial R} \right], \quad \frac{2a_i}{R} \left(\frac{\lambda_i^2}{a_i} - 1 \right) D_i.$$

Граничная кинетика при этом явным образом зависит от координаты границы раздела R . Дополнительные члены будут существенны только при описании эволюции микрородышей с размерами $R \sim \lambda_i^2/a_i$.

Граничные условия вида (2) должны иметь место и для нестационарного теплообмена. Однако их вывод связан с существенными трудностями, обусловленными тем, что передача энергии осуществляется по нескольким каналам: радиация, столкновения, реакции и т. д.

Обратимся к случаю подвижных границ раздела, ориентируясь на процессы типа испарения, растворения, плавления и обратные им. Для определенности будем рассматривать конечную двухфазную однокомпонентную систему, замкнутую в том смысле, что отсутствует обмен частицами с внешней средой. Пусть вся система занимает интервал $(0, L)$, причем начало отсчета привязано к фазе 1. При этом скорость смещения границы раздела определяется законами сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R(t)} n_1(x, t) dx = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{R(t)}^L n_2(x, t) dx = J_{12}(R, t),$$

где ток через границу задан величиной

$$J_{12}(R, t) = -W_{12}(R, t)n_1(R, t) + W_{21}(R, t)n_2(R, t).$$

Используя объемные уравнения (1), в итоге получаем

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{R} &= \gamma_1 + W_{21}Y - D_1X_1 - \frac{J_1(0, t)}{n_1(R, t)} + \dot{\sigma}_1(a_1) \frac{N_1(R, t)}{n_1(R, t)} = \\ &= \gamma_2 - W_{12} \frac{1}{Y} - D_2X_2 - \frac{J_2(L, t)}{n_2(R, t)} - \dot{\sigma}_2(a_2) \frac{N_2(R, t)}{n_2(R, t)}, \end{aligned}$$

где

$$(4) \quad \begin{aligned} X_i &= \frac{1}{n_i(R, t)} \frac{\partial n_i}{\partial R}, \quad Y = \frac{n_2(R, t)}{n_1(R, t)}, \quad \gamma_1 = v_1 - W_{12} - \frac{\partial D_1}{\partial R}, \quad \gamma_2 = \\ &= v_2 + W_{21} - \frac{\partial D_2}{\partial R}, \quad N_1(R, t) = \int_0^{R(t)} n_1(x, t) dx, \quad N_2(R, t) = \int_{R(t)}^L n_2(x, t) dx. \end{aligned}$$

Появление в уравнениях (3) членов $J_1(0, t)$ и $J_2(L, t)$ обусловлено введенными выше ограничениями о конечности и замкнутости двухфазной системы. Оказывается, конечность системы явным образом отражается на скорости движения границы раздела. Разделяющие поверхности как бы чувствуют друг друга. Отметим также, что классический вариант задачи Стефана [6], когда $\dot{R} = \text{const}$ ($\partial n/\partial R$), представляет собой приближение, которое справедливо лишь в исключительных случаях.

Проанализируем вариант, когда кинетические параметры не зависят от времени явно. При этом должен существовать класс решений, когда $n_i(t) = n_i(R(t))$, т. е. изменение концентраций на границе раздела во времени определяется только законом ее смещения. Отсюда имеем

$$(5) \quad \partial n_i / \partial t = \dot{R} \partial n_i / \partial R.$$

Соотношения (3)–(5) преобразуют граничные условия (2) к форме

$$(6) \quad R^2 - \left[\gamma_1 + \frac{D_{11}}{\delta_1} - \frac{I_1}{n_1} + Y \left(\frac{D_1 D_{12}}{D_2 \delta_1} + W_{21} \right) \right] \dot{R} + \frac{1}{\delta_1} \left\{ D_1 \left(u_{11} - \frac{D_{12}}{D_2} W_{12} \right) + D_{11} \left(\gamma_1 - \frac{I_1}{n_1} \right) + Y \left[u_{12} D_1 + W_{21} D_{11} + \frac{D_1}{D_2} D_{12} \left(\gamma_2 - \frac{I_2}{n_2} \right) \right] \right\} = 0;$$

$$(7) \quad R^2 - \left[\gamma_2 + \frac{D_{22}}{\delta_2} - \frac{I_2}{n_2} + \frac{1}{Y} \left(\frac{D_2 D_{21}}{D_1 \delta_2} - W_{12} \right) \right] \dot{R} + \frac{1}{\delta_2} \left\{ D_2 \left(u_{22} + \frac{D_{21}}{D_1} W_{21} \right) + D_{22} \left(\gamma_2 - \frac{I_2}{n_2} \right) + \frac{1}{Y} \left[u_{21} D_2 - W_{12} D_{22} + \frac{D_2}{D_1} D_{21} \left(\gamma_1 - \frac{I_1}{n_1} \right) \right] \right\} = 0,$$

где

$$(8) \quad I_1 = J_1(0, t) - \dot{\sigma}_1(a_1)N_1(R, t), \quad I_2 = J_2(L, t) + \dot{\sigma}_2(a_2)N_2(R, t).$$

Итоговая система уравнений (6), (7) является алгебраической относительно неизвестных \dot{R} и $Y = n_2/n_1$, достаточно симметричный вид которой указывает на простой путь ее качественного анализа и приближенного решения.

Совместность двух квадратных уравнений означает, что какой-либо из корней $\dot{R}_1 = f_1(Y)$ первого уравнения (6) обязательно должен быть равен одному из корней $\dot{R}_2 = f_2(Y)$ второго уравнения (7). При этом условие

$$f_1(Y) = f_2(Y)$$

определяет значение Y в виде функции

$$(9) \quad Y = n_2/n_1 = \varphi(v_i, W_{ij}, D_i, R, n_i),$$

устанавливая взаимосвязь между граничными концентрациями. Явная зависимость от n_i происходит от членов I_i/n_i в уравнениях (5), (6), явная зависимость от R заведомо появляется в случае сферической диффузии, когда кинетические параметры u_{ij} и D_{ij} являются функциями R . Подстановка функции φ в соответствующий корень квадратного уравнения приводит закон движения границы к виду

$$(10) \quad \dot{R} = f_1(Y) = f(v_i, W_{ij}, D_i, R, n_i),$$

где еще фигурируют неизвестные функции $n_i(R)$. Обращаясь к уравнениям (3), при учете зависимостей (8)—(10) получим

$$(11) \quad \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{n_1} \frac{\partial n_1}{\partial R} = \frac{1}{D_1} \left[\gamma_1 + W_{21}\varphi - f - \frac{I_1}{n_1} \right], \\ X_2 &= \frac{1}{n_2} \frac{\partial n_2}{\partial R} = \frac{1}{D_2} \left[\gamma_2 - \frac{W_{12}}{\varphi} - f - \frac{I_2}{n_2} \right]. \end{aligned}$$

Эта система определяет граничные концентрации $n_i(v_i, W_{ij}, D_i, R)$, а возвращение к уравнению (10) — скорость смещения границы и зависимость $R(t)$, т. е. получен набор граничных условий на подвижной границе для решения диффузионной задачи в объеме двухфазной среды.

Представленная программа, по существу, должна носить самосогласованный характер, поскольку величины I_i являются функционалами объемных концентраций $n_i(x, t)$. Для ее практического осуществления необходимо из физических соображений постулировать стартовые значения величин I_i .

Проведем начальную стадию решения для частного случая одномерной диффузии с постоянными кинетическими коэффициентами, полагая в первом приближении, что $I_i = 0$. В результате решения системы (6), (7) получаем

$$(12) \quad Y = n_2/n_1 = \varphi(v_i, W_{ij}, D_i) = \text{const} = n_2(R_0)/n_1(R_0) = Y_0,$$

причем отношение начальных концентраций предопределено видом функции φ . Соответственно, согласно (10), имеем

$$(13) \quad \dot{R} = f_1(Y_0) = f_0 = \text{const}, \quad R(t) = R_0 + f_0 t.$$

Знак величины f_0 дает направление движения. Наконец,

$$(14) \quad X_1 = \frac{1}{n_1} \frac{\partial n_1}{\partial R} = \frac{1}{D_1} (\gamma_1 + W_{21}Y_0 - f_0) = \frac{1}{r_*}, \quad n_1 = n_1(R_0) \exp \frac{R - R_0}{r_*}.$$

Последующее решение объемной диффузионной задачи с граничными условиями (12)—(14) выдает вид зависимостей $I_i(R)$, и цикл (9)—(11) определяет следующее приближение. При этом, по-видимому, целесообразно трансформировать систему (11), используя связь (9), к виду

$$(15) \quad \begin{aligned} D_1 \partial n_1 / \partial R &= (\gamma_1 - f)n_1 + W_{21}n_2 - I_1, \\ D_2 \partial n_2 / \partial R &= (\gamma_2 - f)n_2 - W_{12}n_1 - I_2, \end{aligned}$$

которая после восстановления зависимости $\dot{R} = f(n_i, I_i)$ становится определенной. Уравнения (15), по существу, определяют граничные условия на подвижной поверхности раздела. Заметим, что для конечных и замкнутых систем они нелинейны даже при постоянных кинетических параметрах v_i, D_i, W_{ij} , когда осуществляется простейший тип концентрационной зависимости $f = f(I_i/n_i)$. Конкретный приближенный вид системы уравнений (15) можно получить при подстановке в нее разложений функции f в ряд по соответствующим величинам. Причем одно из уравнений полученной системы можно исключить, если взаимосвязь между n_i устанавливать из зависимости (9), проведя аналогичного типа разложения для функции φ . Ограничиваясь линейными членами разложений по степеням вели-

чин I_i/n_i , т. е. полагая $f = f_0 + j_1/n_1 + j_2/n_2$, $1/Y = n_1/n_2 = 1/Y_0 + m_1/n_1 + m_2/n_2$, где $j_i = I_i \left(\frac{\partial f}{\partial \frac{I_i}{n_i}} \right)_{I_i=0}$; $m_i = I_i \left(\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial \frac{I_i}{n_i}} \right)_{I_i=0}$, получаем

$$n_2 = \frac{n_1 - m_2}{n_1 + Y_0 m_1} Y_0 n_1, \quad D_1 \frac{\partial n_1}{\partial R} = \left(\gamma_1 - f_0 + Y_0 W_{21} \frac{n_1 - m_2}{n_1 + Y_0 m_1} \right) n_1 - \frac{j_2}{Y_0} \frac{n_1 + Y_0 m_1}{n_1 - m_2} - j_1 - I_1.$$

Последующие вычисления граничных концентраций и закона движения границы $\dot{R} = f$ обусловлены чисто техническими деталями.

Большой практический интерес представляют собой исследования по устойчивости движения межфазовой границы, которые связаны с определением вида зависимости $\dot{R} = f(R)$. Особенно это относится к проблеме эволюции сферических зародышей новой фазы.

Устойчивый однонаправленный характер движения границы раздела возможен только при постоянстве знака функции $f(R)$. Если же функция $f(R)$ знакопеременна, то движение границы неоднозначно. Пусть изменение знака происходит в точках R_i , т. е. $f(R_i) = 0$. Тогда в случае $\partial f / \partial R|_{R=R_i} > 0$ сферический зародыш новой фазы с начальным радиусом $R_0 > R_i$ будет расти, а зародыш с $R_0 < R_i$ — зарастать. При $\partial f / \partial R|_{R=R_i} < 0$ растут зародыши с $R_0 < R_i$, а зародыши с $R_0 > R_i$ убывают в своих размерах. В последнем варианте при наличии только одной точки R_1 , где происходит перемена знака f , зародыши любого размера в конечном итоге своего развития приходят именно к этой величине R_1 . Возможны колебания размеров зародыша около этого равновесного значения.

Факт существования нуль-точек функции $f(R)$ следует из качественного анализа системы уравнений (6), (7). Случай $\dot{R} = f(R) = 0$ соответствует обращению в нуль фигурных скобок указанной системы.

Ограничимся рассмотрением развития одиночного сферического зародыша в бесконечной среде, когда можно полагать $I_i = 0$. При выводе граничных условий (2) обращалось внимание на то, что в сферическом варианте кинетические параметры u_{ii} и D_{ii} явно зависят от радиуса, причем $u_{ii} = u_{ii}^{(0)} + c_{ii}/R$, $D_{ii} = D_{ii}^{(0)} + d_{ii}/R$, где индекс 0 относится к коэффициентам на плоской границе. При $\dot{R} = 0$ структура уравнений (6), (7) принимает вид

$$\begin{aligned} (A_{11} + B_{11}^*/R)n_1 + (A_{12} + B_{12}/R)n_2 &= 0, \\ (A_{21} + B_{21}/R)n_1 + (A_{22} + B_{22}/R)n_2 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет ненулевые решения при равенстве нулю ее детерминанта, который определяется квадратичной формой относительно $1/R$. Это означает принципиальную возможность существования двух точек R_1 и R_2 , в которых $\dot{R} = 0$. Кинетическая схема развития зародышей при этом имеет два основных варианта. Если $\partial f / \partial R|_{R=R_1} > 0$, то $\partial f / \partial R|_{R=R_2} < 0$, поэтому зародыши с $R_0 < R_1$ зарастают, а остальные стремятся к значению R_2 . В противоположном варианте зародыши с $R_0 > R_2$ растут, а остальные приходят в устойчивое состояние с размером R_1 . Описанная ситуация интересна фактом существования метастабильных зародышей.

Таким образом, для случая, когда кинетические параметры не зависят явно от времени и существует класс решений $n_i = n_i(R(t))$, граничные условия (2) совместно с условиями (3)—(5) полностью определяют граничную кинетику и законы движения границы. Более общий случай, при котором $v_i = v_i(R, t)$, $D_i = D_i(R, t)$ и соответственно $n_i = n_i(R, t)$, требует дальнейшей разработки.

Поступила 27 VIII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. Статистическая физика. М.: Изд-во АН СССР, 1948; Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975.
2. Гегузин Я. Е. Диффузионная зона. М.: Наука, 1979.
3. Пинес Б. Я. Спекание, крип, отдых, рекристаллизация и другие явления, обусловленные самодиффузией в кристаллических телах.— УФН, 1954, т. 52, № 4.
4. Лифшиц И. М., Слезов В. В. О кинетике диффузионного распада пересыщенных твердых растворов.— ЖЭТФ, 1958, т. 35.
5. Акуличев В. А. Кавитация в криогенных и кипящих жидкостях. М.: Наука, 1978.
6. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

УДК 622.235.5 + 622.236.4 + 532.51

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЗРЫВА

В. М. Кузнецов

(Москва)

Модель идеальной несжимаемой жидкости, как известно, положена в основу созданной М. А. Лаврентьевым теории кумуляции [1] как модель, хорошо описывающая деформирование и течение некоторых твердых тел (например, металлов) при больших давлениях. В дальнейшем эта «схема несжимаемости» развивалась как в работах самого М. А. Лаврентьева [2], так и в работах, выполненных при его участии [3, 4] или под влиянием его идей [5—9]. Оказалось, что модель идеальной несжимаемой жидкости можно с некоторыми дополнительными предположениями физического характера применить для описания действия взрыва в грунтах и горных породах. Однако при практической реализации результатов, полученных в рамках этой модели, возникли трудности как принципиального, так и чисто прикладного характера. К числу первых относится, например, бесконечность энергии, часто встречающаяся в гидродинамических задачах, но трудно поддающаяся физическому восприятию. К другим — переход от гидродинамических величин к физическим и механическим. Например, в задачах о направленном взрыве и равномерном дроблении [3, 6] теоретически получается некоторое распределение импульсного давления на границе выбрасываемого или разрушаемого объема. Здесь сначала нужно найти зависимость импульса от массы ВВ, а затем заменить непрерывное распределение дискретным, размещая заряды ВВ в скважинах и патронах различного диаметра. Некоторые из этих проблем решаются эмпирическим путем, другие требуют специального исследования.

1. Проблема бесконечности энергии. Пусть бесконечно длинный цилиндрический заряд ВВ радиуса r_0 находится в неограниченной несжимаемой идеальной среде. Течение описывается потенциалом точечного источника

$$(1.1) \quad \varphi = A \ln r + B, \quad v = \partial\varphi/\partial r = A/r,$$

где A и B — постоянные.

Интеграл энергии, взятый по всему пространству,

$$(1.2) \quad E = \pi\rho \int_{r_0}^{\infty} v^2 r dr$$

расходится на бесконечности.

Рассмотрим теперь заряд конечной длины $2l_0$, расположенный перпендикулярно плоскости xy так, что его концы находятся в точках $z = \pm l_0$. Каждый его бесконечно малый элемент dl , имеющий координаты $(0, 0, l)$, создает в произвольной точке (x, y, z) потенциал, соответствующий точечному заряду

$$d\varphi = C[(z - l)^2 + x^2 + y^2]^{-1/2} dl, \quad C = \text{const.}$$

Интегрируя это выражение по l в пределах от $-l_0$ до $+l_0$, получим потенциал, создаваемый в среде удлинненным зарядом:

$$\varphi = C \ln \frac{\sqrt{(l_0 - z)^2 + r^2} + l_0 - z}{\sqrt{(l_0 + z)^2 + r^2} - l_0 - z}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$