

**УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ  
ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ  
КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ**

*И. М. Астрахан*

(Москва)

Устойчивость ламинарного вращательного движения вязкой жидкости детально изучена в работах [1, 2, 3, 4].

В данной работе рассматривается переход от ламинарного вращательного движения вязко-пластичной жидкости к турбулентному движению путем исследования устойчивости ламинарного движения методом малых возмущений, развитым Тейлором и Лием. Случай, когда расстояние между цилиндрами мало, рассмотрен при помощи метода Галеркина. Проведено также сравнение полученных теоретических выводов с результатами эксперимента.

1. Изучается устойчивость кругового движения вязко-пластичной жидкости между двумя коаксиальными бесконечными цилиндрами по отношению к бесконечно малым возмущениям. Предполагается, что поле возмущений является пространственным, но обладающим осевой симметрией. Основные уравнения движения несжимаемой вязко-пластичной жидкости и уравнение неразрывности, записываемые в безразмерной форме в цилиндрической системе координат ( $z$  — вдоль оси цилиндров), имеют вид [5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R''h}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{R''h^2} \left[2 \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R''h}\right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{R''h^2} \left[\frac{\partial h}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}\right] \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R''h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{1}{R''h^2} \left[\frac{\partial h}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + 2 \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z}\right] \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

При этом интенсивность скоростей деформации сдвига

$$h = \pm \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + 2 \frac{u^2}{r^2} + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$R = \frac{\rho \Omega_1 R_1^2}{\eta}, \quad R'' = \frac{\rho \Omega_1^2 R_1^2}{\tau_0}$$

Здесь  $r$  — расстояние от оси,  $u, v, w$  — проекции скорости движения на оси координат,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\eta$  — вязкость,  $\tau_0$  — предельное напряжение сдвига вязко-пластичной жидкости,  $\Omega_1$  — угловая скорость внутреннего цилиндра,  $R_1$  — радиус внутреннего цилиндра.

Для изучения малых возмущений установившегося движения будем искать решение уравнений (1.1)–(1.4) в виде

$$u = \varepsilon u', \quad v = v^0 + \varepsilon v', \quad w = \varepsilon w', \quad p = p^0 + \varepsilon p'$$

Здесь  $v^0, p^0$  — представляют основное течение, а  $u', v', w', p'$  — возмущение. Для основного установившегося течения [6]

$$v^0 = Ar + \frac{B}{r} \mp \frac{1}{2} Sr (2 \ln r - 1), \quad S = \frac{R}{R''}$$

Угловая скорость  $\Omega$  движения жидкости на расстоянии  $r$  от оси

$$\omega = \frac{\Omega}{\Omega_1} = A + \frac{B}{r^2} \mp \frac{S}{2} (2 \ln r - 1) \quad (1.5)$$

Рассматриваем два случая движения: первый — внутренний цилиндр радиуса  $R_1$  вращается с угловой скоростью  $\Omega_1$ , а внешний цилиндр радиуса  $R_2$  неподвижен, второй — внешний цилиндр вращается, а внутренний неподвижен. В первом случае уравнения надо брать с нижними знаками, во втором — с верхними. При вращении внутреннего цилиндра на основании условий прилипания жидкости к стенкам

$$A = \frac{S}{2} - \frac{Sr_2^2 \ln r_2 + 1}{r_2^2 - 1}, \quad B = \frac{r_2^2 (1 + S \ln r_2)}{r_2^2 - 1} \quad (1.6)$$

а при вращении наружного цилиндра

$$A = \frac{r_2 + Sr_2^2 \ln r_2}{r_2^2 - 1} - \frac{S}{2}, \quad B = -\frac{r_2 + Sr_2^2 \ln r_2}{r_2^2 - 1} \left( r_2 = \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (1.7)$$

Считаем, что вся жидкость между цилиндрами находится в движении и на границах касательное напряжение  $\tau$  больше  $\tau_0$ .

Уравнениями первого приближения для малых возмущений будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} - 2v' \left( A + \frac{B}{r^2} \mp S \ln r \pm \frac{1}{2} S \right) = -\frac{\partial p'}{\partial r} + \left[ \frac{1}{R} \mp \frac{1}{R''} \left( \frac{2B}{r^2} \pm S \right)^{-1} \right] \times \\ \times \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right) \mp \frac{8B}{R'' r^3} \left( \frac{2B}{r^2} \pm S \right)^{-2} \frac{\partial u'}{\partial r} \quad (1.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + 2u' (A \mp S \ln r) = \\ = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial r} - \frac{v'}{r^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right] \mp \frac{1}{R''} \left( \frac{2B}{r^2} \pm S \right)^{-1} \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \quad (1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \left[ \frac{1}{R} \mp \frac{1}{R''} \left( \frac{2B}{r^2} \pm S \right)^{-1} \right] \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial r} \right) \mp \\ \mp \frac{4B}{R'' r^3} \left( \frac{2B}{r^2} \pm S \right)^{-2} \left( \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \quad (1.10) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru') + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (1.11)$$

Граничные условия

$$u' = v' = w' = 0 \quad \text{при } r = 1 \text{ и } r = r_2 \quad (1.12)$$

Введем функцию тока  $\psi$ , тогда

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r\psi), \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \quad (1.13)$$

Следуя [2], возмущение представим в виде

$$\psi' = i\psi^* (r) \exp(\sigma t + i\lambda z), \quad v' = v^* (r) \exp(\sigma t + i\lambda z) \quad (1.14)$$

тогда

$$u' = \lambda \psi^* (r) \exp(\sigma t + i\lambda z)$$

Функции  $\psi^*, v^*$  и постоянная  $\sigma$  могут быть комплексными,  $\lambda$  — действительна и положительна. Уравнения возмущения (1.8) — (1.10) с уче-

том (1.13) и (1.14) сводятся к двум дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} & (L - \lambda^2 - \sigma R)(L - \lambda^2) \psi^* \mp S(2Br^{-2} \pm S)^{-1}(L - \lambda^2)^2 \psi^* = \\ & = 2\lambda R(A + Br^{-2} \mp S \ln r \pm \frac{1}{2} S) v^* \pm 4BSr^{-3}(2Br^{-2} \pm S)^{-2} \times \\ & \times \left[ 2 \frac{d}{dr}(L\psi^*) + \frac{1}{r} L\psi^* - \frac{\lambda^2}{r} \psi^* - 2\lambda^2 \frac{d\psi^*}{dr} - \frac{3}{r} L\psi^* - \frac{3\lambda^2}{r} \psi^* \right] \pm \\ & \pm 32B^2Sr^{-6}(2Br^{-2} \pm S)^{-3}(L + \lambda^2) \psi^* \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\{L - \lambda^2 [1 \mp (2BS^{-1}r^{-2} \pm 1)^{-1}] - \sigma R\} v^* = 2\lambda R(A \mp S \ln r) \psi^* \quad (1.16)$$

$$\left( L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right)$$

Граничные условия (1.12) примут вид

$$\psi^* = d\psi^*/dr = v^* = 0 \quad \text{для } r = 1 \text{ и } r = r_2 \quad (1.17)$$

Уравнения (1.15)–(1.16) при  $1/R'' = 0$  совпадают с уравнениями возмущения для вязкой жидкости. Характеристическое уравнение, связывающее  $\sigma$  и  $\lambda$  с заданными параметрами  $R$ ,  $R''$ ,  $R_2/R_1$ , имеет вид

$$F(\sigma, \lambda, R, S, R_2/R_1) = 0 \quad (1.18)$$

2. Для исследования устойчивости стационарного вращательного движения вязко-пластичной жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами при очень больших числах Рейнольдса, т. е. при достаточно малой вязкости, сделаем в уравнениях (1.15)–(1.16) предельный переход при  $R \rightarrow \infty$ . Из (1.15)–(1.16), учитывая, что  $u^* = \lambda \psi^*$ , получим

$$u^* = -\frac{\sigma v^*}{2(A \mp S \ln r)}, \quad (L - \lambda^2) u^* = -2\lambda^2 \sigma^{-1} \omega v^* \quad (2.1)$$

Исключаем  $u^*$  из (2.1)

$$Lv^* - \lambda^2 [1 + 4\omega \sigma^{-2} (A \mp S \ln r)] v^* = 0$$

или

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} \right] - \left( \frac{1}{\sigma^2} \frac{\lambda^2}{r} F + \frac{\lambda^2}{r} \right) g = 0 \quad (2.2)$$

Здесь

$$g = rv^*, \quad F = 4\omega (A \mp S \ln r)$$

Граничные условия

$$g = 0 \quad \text{для } r = 1 \text{ и } r = r_2$$

Движение будет устойчивым, если  $\text{Re } \sigma < 0$ , и неустойчивым, если  $\text{Re } \sigma > 0$ ; когда  $\sigma$  чисто мнимая величина, колебания нейтрально устойчивые. Для уравнения (2.2) с граничными условиями (2.4) имеем задачу Штурма — Лиувилля,  $\lambda$  считаем заданным. Известно [7], что так как

$$\frac{1}{r} > 0, \quad \frac{\lambda^2}{r} > 0$$

то собственные значения  $\sigma^2$  необходимо действительны. Кроме того, если

$$F > 0 \quad \text{для } 1 < r < r_2$$

то значения  $\sigma^2$  отрицательны и колебания нейтрально устойчивы. Если

$$F < 0 \quad \text{для } 1 < r < r_2$$

то движение будет неустойчивым. Определим знак  $F$  для случая, когда внутренний цилиндр вращается, а наружный неподвижен. Можно всегда считать, что  $\omega > 0$ , тогда знак  $F$  совпадает со знаком

$$\psi(r) = A + S \ln r$$

Производная  $\psi'(r) > 0$ . Найдем знак  $\psi(r_2)$ . Учитывая (1.6), имеем

$$\psi(r_2) = \frac{S(r_2^2 - 2 \ln r_2 - 1 - 2S^{-1})}{2(r_2^2 - 1)}$$

Знак  $\psi(r_2)$  зависит от знака  $\chi(r_2)$

$$\chi(r_2) = r_2^2 - 2 \ln r_2 - 1 - 2S^{-1}$$

При вращении внутреннего цилиндра со скоростью  $\Omega_1$ , радиус  $r_2^*$ , до которого может распространиться движение, определяется из уравнения

$$r_2^{*2} - 2 \ln r_2^* - 1 - 2S^{-1} = 0$$

В рассматриваемом случае движения всегда  $r_2 < r_2^*$ . Функция  $\chi(r_2)$  возрастающая, а при  $r_2 = r_2^*$  она обращается в нуль, значит, при  $r_2 < r_2^*$  величина  $\chi(r_2) < 0$ . Следовательно,  $F < 0$  и при вращении внутреннего цилиндра движение всегда будет неустойчивым.

Рассмотрим случай, когда внутренний цилиндр неподвижен, а наружный вращается с некоторой скоростью  $\Omega_2$ . Тогда

$$\psi(r) = A - S \ln r, \quad \psi'(r) < 0$$

Аналогично можно показать, что  $\psi(r_2) > 0$ , следовательно,  $F > 0$  и движение будет устойчивым. Заметим, что

$$F = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (\omega r^2)^2$$

Здесь величина  $\omega$  определена по (1.5). Таким образом, в рассматриваемом случае условием устойчивости будет

$$\frac{d}{dr} (\omega r^2)^2 > 0$$

Полученное условие устойчивости выполняется при любых возможных значениях  $S$ .

3. Значительный интерес представляет случай, когда радиусы обоих цилиндров почти равны, так как все экспериментальные работы по изучению свойств вязко-пластичных жидкостей проводятся на ротационных вискозиметрах с очень малым зазором между цилиндрами. При этом основные уравнения (1.15) — (1.16) можно значительно упростить. Следуя [2], введем следующие безразмерные переменные:

$$\xi = (r - 1) [(R_2 / R_1) - 1]^{-1}, \quad \zeta = z [(R_2 / R_1) - 1]^{-1} \quad (3.1)$$

тогда

$$r = 1 + [(R_2 / R_1) - 1] \xi = 1 + \varepsilon \xi;$$

Безразмерными параметрами будут

$$k = \lambda [(R_2 / R_1) - 1], \quad R' = R [(R_2 / R_1) - 1]^2, \quad R'' = R'' [(R_2 / R_1) - 1]^2$$

Составляющие скорости возмущения

$$u_1^* = \frac{u^* R_1}{R_2 - R_1}, \quad v_1^* = \frac{v^* R_1}{R_2 - R_1}$$

Рассмотрим случай, когда внутренний цилиндр вращается с угловой скоростью  $\Omega_1$ , а наружный цилиндр неподвижен (нижние знаки). Подставим введенные величины в уравнения (1.15) — (1.16), учитывая, что  $u^*(r) = \lambda \psi^*(r)$ . Пренебрегая членами порядка  $\varepsilon = (R_2 / R_1) - 1$  и выше, получим

$$(D^2 - k^2 - \sigma R') (D^2 - k^2) u_1^* + [2BS^{-1} (1 + \varepsilon \xi)^{-2} - 1]^{-1} (D^2 - k^2)^2 u_1^* = 2k^2 R' \omega v_1^* \quad (3.2)$$

$$\{D^2 - k^2 \{1 + [2BS^{-1} (1 + \varepsilon \xi)^{-2} - 1]^{-1}\} - \sigma R'\} v_1^* = 2R' [A + S \ln (1 + \varepsilon \xi)] u_1^* \quad (D = d/d\xi) \quad (3.3)$$

Граничные условия (1.17) примут вид

$$u_1^* = du_1^*/d\xi = v_1^* = 0 \quad \text{для } \xi = 0 \text{ и } \xi = 1 \quad (3.4)$$

В рассматриваемом случае из (1.6)

$$A = -\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{S}{2} \left[ \frac{3}{2} \varepsilon + o(\varepsilon) \right], \quad B = \frac{1}{2\varepsilon} + 1 + o(1) + \frac{1}{2} S [1 + o(1)]$$

Введем обозначения

$$f(\xi) = [2BS^{-1}(1 + \varepsilon\xi)^{-2} - 1]^{-1}, \quad \varphi(\xi) = S \ln(1 + \varepsilon\xi)$$

Представим  $S$  в виде

$$S = \frac{R}{R''} - \frac{R^2}{R''} \frac{1}{R} = \frac{N}{R}, \quad N = \frac{R^2}{R''} = \frac{\rho\tau_0 R_1^2}{\eta^2}$$

Тогда характеристическое уравнение

$$F(\sigma, k, R, R/N, R_2/R_1) = 0$$

Допустим, что  $k, N, R_2/R_1$  фиксированы, а  $R$  возрастает. Момент возникновения неустойчивости определяется тем значением  $R$ , при котором  $\text{Re } \sigma$  обращается впервые в нуль. Предполагаем, что на границе области неустойчивости не только  $\text{Re } \sigma = 0$ , но и вообще  $\sigma = 0$ . Если основное течение задано, то  $N, R_2/R_1$  известны и  $R(k)$  будет функцией от  $k$ . Наименьшее значение  $R(k)$ , равное  $R_*$ , зависит от  $N$  и  $R_2/R_1$ .

Подставив в уравнения (3.2) — (3.3)  $\sigma=0$  и исключив  $u_1^*$ , получим

$$(D^2 - k^2)^2 \{D^2 - k^2 [1 + [2BS^{-1}(1 + \varepsilon\xi)^{-2} - 1]^{-1}]\} v_1^* = \\ = 4k^2 \omega R'^2 \{1 + [2BS^{-1}(1 + \varepsilon\xi)^{-2} - 1]^{-1}\} [A + S \ln(1 + \varepsilon\xi)] v_1^* \quad (3.5)$$

В уравнении (3.5) переменные коэффициенты в рассматриваемом интервале  $0 \leq \xi \leq 1$  меняются слабо, поэтому заменим их средними значениями. Угловую скорость  $\omega$  заменим средним значением  $\omega_0$ , равным  $1/2$ . Величины  $f(\xi)$  и  $\varphi(\xi)$  заменим их средними значениями  $f_0$  и  $\varphi_0$  в рассматриваемом интервале. Так

$$f_0 = \frac{1}{2} \{ (2BS^{-1} - 1)^{-1} + [2BS^{-1}(1 + \varepsilon)^{-2} - 1]^{-1} \} \\ \varphi_0 = \frac{1}{2} S \ln(1 + \varepsilon) \quad (3.6)$$

Из (3.5) имеем

$$(D^2 - k^2)^2 [D^2 - k^2(1 + f_0)] v_1^* = -T' k^2 (1 + f_0)^{-1} v_1^* \quad (3.7)$$

Здесь

$$T' = -4 \left( \frac{R_2}{R_1} - 1 \right)^4 R^2 \omega_0 (A + \varphi_0) \quad (3.8)$$

Граничные условия (3.4) можно записать в виде

$$[D^2 - k^2(1 + f_0)] v_1^* = 0 \\ D [D^2 - k^2(1 + f_0)] v_1^* = 0 \quad v_1^* = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \text{ и } \xi = 1 \quad (3.9)$$

Для решения задачи о собственных значениях уравнения (3.7) с граничными условиями (3.9) применим метод Галеркина. Этот метод применялся к задачам устойчивости вязкой жидкости [4]. Введем функцию

$$P = [D^2 - k^2(1 + f_0)] v_1^*$$

Граничные условия (3.9) примут вид

$$P = 0, \quad DP = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \text{ и } \xi = 1 \quad (3.10)$$

Разложим  $P$  в ряд функций  $P_i$ , удовлетворяющих условиям (3.10). Для нахождения  $v_1^*$  получаем уравнение

$$[D^2 - k^2(1 + f_0)] v_1^* = \alpha_1 \xi^2 (\xi - 1)^2 + \alpha_2 \xi^2 (\xi - 1)^3 \quad (3.11)$$

Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — неопределенные коэффициенты. Решение уравнения (3.11) запишется в виде

$$v_1^* = C_1 \exp(k \sqrt{1 + f_0} \xi) + C_2 \exp(-k \sqrt{1 + f_0} \xi) + \sum_{i=0}^5 c_i \xi^i \quad (3.12)$$

Для определения произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$  используем граничное условие  $v_1^* = 0$  при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ ,  $c_i$  определяем, подставляя (3.12) в (3.11) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\xi$ .

Таблица

$f_0$	$k$	$T'$	$f_0$	$k$	$T'$
0	2.10	2056.8	1.40	2.61	6711.2
	3.15	1710.4		2.68	6710.4
	3.30	1716.7		2.75	6721.4
0.10	2.67	2014.6	1.52	2.55	7273.1
	3.00	1971.8		2.62	7265.6
	3.15	1973.0		2.69	7270.3
0.40	2.80	2859.4	1.62	2.50	7762.1
	2.92	2849.4		2.63	7745.0
	3.04	2853.8		2.89	7842.7
0.68	2.48	3808.2	1.756	2.44	8447.7
	2.58	3791.2		2.57	8416.1
	2.73	3793.3		2.82	8491.8

Затем, подставляя (3.11) и (3.12) в уравнение (3.7) и используя  $P_1 = \xi^2 (\xi - 1)^2$  и  $P_2 = \xi^2 (\xi - 1)^3$  как весовые функции, получим два однородных алгебраических уравнения относительно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Приравнявая определитель этой системы нулю, получим характеристическое уравнение  $F(T', k, f_0) = 0$  рассматриваемой задачи. Минимум  $R$  означает минимум  $T'$ . Принимаем  $f_0$  за параметр и строим зависимость  $T'(k)$  от  $k$  при различных  $f_0$ . Минимальное значение  $T'(k)$  будет критическим значением  $T'_*$ , отмечающим границу

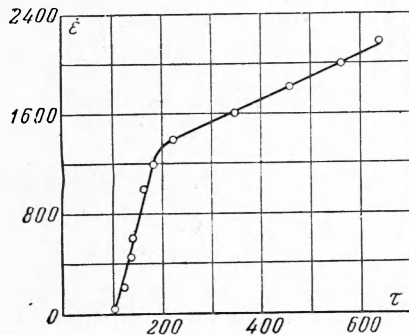
области неустойчивости для данного  $f_0$ . Результаты расчета представлены в таблице.

4. Исследованию устойчивости вращательного движения вязкой жидкости между двумя цилиндрами посвящены многочисленные экспериментальные работы [1, 8, 9]. В большинстве опытов наступление неустойчивости, характеризуемое образованием ряда вихрей, расположенных в меридиональной плоскости, определялось визуально, путем введения в жидкость красящего вещества или легкого алюминиевого порошка. В работе [8] исследование устойчивости вязкой жидкости проводилось на обычном ротационном вискозиметре и появление неустойчивости характеризовалось разрывом величины и наклона кривой эффективной вязкости, при этом теоретические выводы очень хорошо совпали с результатами опыта.

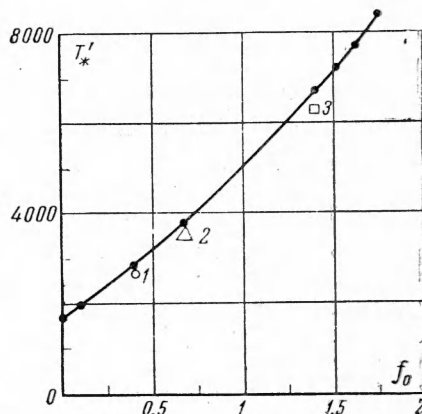
Переход к турбулентности в вязко-пластичных жидкостях был отмечен в работе [10].

Ниже проводится сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными. Эти экспериментальные результаты исследования реологических свойств красок мне предоставлены Б. М. Ябло, за что приношу автору глубокую благодарность. Опыты Б. М. Ябло проводились на ротационном вискозиметре [11], радиус внутреннего цилиндра  $R_1 = 3.85$  см, наружного  $R_2 = 3.95$  см, длина внутреннего вращающегося цилиндра  $l = 23.5$  см. Были получены кривые течения для охры с пирофосфатом натрия, охры со стеаратом калия и сурика с пирофосфатом натрия. Опытная кривая для сурика с пирофосфатом натрия представлена на фиг. 1 ( $\tau$  — напряжение,  $\dot{\epsilon}$  — скорость деформации). Появление неустойчивости характеризуется изменением наклона реологической кривой. Принимаем величину между последней точкой, лежащей на прямой постоянной вязкости, и первой точкой, в которой изменилась вязкость,

за критическую скорость вращения  $\Omega_*$ . Сравнение экспериментальных и теоретических данных показано на фиг 2, где точка 1 соответствует опыту охра с пирофосфатом натрия  $\tau_0 = 35 \text{ дин/см}^2$ ,  $\eta = 0.07 \text{ пуаз}$ ,  $\rho = 1.31 \text{ г/см}^3$ ,  $\Omega_* = 35.9 \text{ сек}^{-1}$ ,  $f_0 = 0.4$ ,  $T'_* = 2670$ , точка 2 — охра



Фиг. 1



Фиг. 2

со стеаратом калия  $\tau_0 = 75 \text{ дин/см}^2$ ,  $\eta = 0.075 \text{ пуаз}$ ,  $\rho = 1.37 \text{ г/см}^3$ ,  $\Omega_* = 42.3 \text{ сек}^{-1}$ ,  $f_0 = 0.68$ ,  $T'_* = 3,530$ , точка 3 — сурик с пирофосфатом натрия  $\tau_0 = 100 \text{ дин/см}^2$ ,  $\eta = 0.062 \text{ пуаз}$ ,  $\rho = 1.86 \text{ г/см}^3$ ,  $\Omega_* = 34.6 \text{ сек}^{-1}$ ,  $f_0 = 1.4$ ,  $T'_* = 6\,300$ .

Точки, лежащие на кривой, построены по данным таблицы.

Максимальное расхождение теоретических результатов и данных эксперимента составляет 7%.

В заключение работы автор благодарит И. А. Чарного, Г. И. Баренблатта и С. С. Григоряна за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 15 III 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil Trans. A, 1923, 223, 289.
2. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., ИИЛ, 1958.
3. Chandrasekhar S. The stability of viscous flow between rotating cylinders. Proc. Roy. Soc. A, 1958, 246, 1246.
4. Ди-Прима. Применение метода Галеркина к задачам устойчивости движения. Сб. пер., Механика, 1956, № 3.
5. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Баку, Азнефтеншпр, 1959.
6. Вейнберг Б. П. К изучению тел с большими значениями коэффициента внутреннего трения. Журнал русского физико-химического общества, 1912, т.44, вып. 4.
7. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. М., ГТТИ, 1951.
8. Donnelly R. I. Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders. Proc. Roy. Soc. A, 1958, 246, 1246.
9. Lewis D. I. An experimental study of the motion of a viscous liquid contained between two coaxial cylinders. Proc. Roy. Soc. A, 1927, 117, 388.
10. Михайлов Н. В., Ребиндер П. А. О структурно-механических свойствах дисперсных и высокомолекулярных систем. Коллоидный журнал, 1955, вып. 2.
11. Калмыкова Е. Е., Михайлов Н. В. Определение структурно-механических характеристик упруго-пластично-вязких систем на электронно-сельсинном приборе. Заводская лаборатория, 1953, № 8.