

ОБТЕКАНИЕ КЛИНА ГАЗОМ ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ
ЧАСТИ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ

А. В. Елецкий

(Новосибирск)

Обтекание тел газом с большими сверхзвуковыми скоростями сопровождается большим рядом физических процессов, связанных с высокой температурой газа, окружающего тело. Наиболее простым из этих процессов является возбуждение колебательной энергии двухатомного газа. В определенном интервале давления и температур, реализуемых при полетах на больших высотах, возбуждение колебательной энергии молекул происходит неравновесно, т. е. за время, сравнимое со временем, за которое жидкая частица проходит путь порядка длины обтекаемого тела. Аналогичным образом могут запаздывать диссоциация и ионизация.

В настоящее время имеются экспериментальные данные по этим явлениям [1], предложены методы численного расчета [2] в зоне запаздывания. Однако для случаев, когда явление запаздывания части внутренней энергии существенно на расстояниях порядка размеров тела, нет качественных рассмотрений, дающих характер изменения параметров потока в зоне запаздывания, за исключением случая течения за прямой стационарной ударной волной [3].

Течение газа с резкими изменениями параметров потока, в частности со скачками уплотнения, сопровождается запаздыванием колебательной энергии ε (отставанием ее действительного значения E от величины E' , вычисленной по равновесной температуре T в данной точке):

$$\varepsilon = E' - E \quad (0.1)$$

так как время релаксации τ (E) велико по сравнению со временем релаксации поступательной и вращательной энергии [1, 5]. Толщина первой зоны ударной волны (где существенны вязкость и теплопроводность) имеет порядок $10^{-7} - 10^{-8}$ м.

Приводим (из работы [5]) порядок времени τ_3, τ_2, τ_1 (в сек.) и путей l_3, l_2, l_1 релаксации соответственно поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы N_2 при $p=1$ и $v = 500-1000$ м/сек за скачком.

τ_3	τ_2	τ_1	(в сек.)	l_3	l_2	l_1	(в м)
10^{-10}	10^{-9}	10^{-2}		$0.5 \cdot 10^{-7}$	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$0.5 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$
$2 \cdot 10^{-11}$	10^{-10}	10^{-5}		10^{-7}	10^{-5}	10^{-1}	для $T=300^\circ\text{K}$
10^{-11}	10^{-10}	10^{-7}		$5 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-7}$	10^{-3}	» $T=2000^\circ\text{K}$
							» $T=6000^\circ\text{K}$

Из этих данных видно, что активные (сравнительно быстро устанавливающиеся, поступательные и вращательные) степени устанавливаются практически в первой зоне, которую мы примем за геометрическую линию, а путь релаксации инертных (сравнительно медленно устанавливающихся колебательных) степеней — вторая зона скачка, где газ можно считать идеальным, может быть порядка характерной длины L газодинамической задачи, т. е.

$$K = \frac{L}{l_1} = \frac{L}{\tau U} \sim 1 \quad (0.2)$$

где U — характерная скорость.

Инертность или активность какой-либо компоненты внутренней энергии определяется параметром K : при $K \gg 1$ соответствующая компонента внутренней энергии инертна, при $K \ll 1$ — активна; таким образом, K есть мера инертности компоненты внутренней энергии.

Согласно адиабатическому закону [3], имеем $p \sim a^2$, где a — скорость звука ($\gamma = 1.4$), и $\tau \sim 1/p$; характерная скорость задана, поэтому при уменьшении давления на один-два порядка a и T изменяются мало, заметно увеличится лишь τ , т. е. может быть $K \sim 1$ и в случае, когда величина l_1 ($\approx L$) на один-два порядка больше, чем указанные выше.

Для O_2 значения τ_1 и l_1 примерно на порядок меньше, чем для N_2 . Так, согласно [5], для азота (N_2) значения $c(T)$ при температурах $T=300$ и 1273°K соответ-

ственно будут 0.002 и 0.58, а для кислорода O_2 , при тех же условиях, будут 0.031 и 0.78 (за единицу измерения $c(T)$ взята газовая постоянная R).

Случаи $K \ll 1$ и $K \gg 1$ рассмотрены в работе [11]. В случае, когда $K \gg 1$ и l_1 сравнимо с толщиной первой зоны скачка (для N_2 при $T \sim 6000^\circ K$), надо изменить γ в начале зоны релаксации E и решить обычную газодинамическую задачу. В работах [3, 6] сделаны общие выводы о влиянии запаздывания на поток в прямом скачке, основанные только на уравнениях сохранения. В работах [7, 8] рассмотрено точное численное решение задачи о прямом скачке с использованием уравнения релаксации и оценены толщины второй зоны скачка. В работе [9] рассмотрено приближенное аналитическое решение той же задачи; в работах [6, 9] — условия образования ударной волны. В работах [5, 10] предложен метод и приведены результаты экспериментального определения равновесных значений колебательной теплоемкости $c(T)$.

§ 1. Исходные соотношения. При $T < 2000^\circ K$ в воздухе несущественны диссоциация, излучение, ионизация. В зоне релаксации верны обычные уравнения неразрывности и движения для идеального газа. Через c_p , c_v , $\gamma = c_p / c_v$ будем обозначать теплоемкости, относящиеся только к активным степеням свободы; рассматриваем газ с одной колебательной степенью. Имеем

$$c(T) = dE' / dT \quad (1.1)$$

В набегающем потоке предполагаем термодинамическое равновесие. Неравновесность, вызываемая запаздыванием E , во многих задачах существенна лишь в целом, подобно гидродинамической неравновесности от градиентов давления, скорости. В обоих случаях при малых перемещениях жидких частиц можно пренебрегать градиентами параметров и считать локально справедливым равновесное уравнение состояния:

$$p = R\rho T \quad (1.2)$$

Различие этих двух видов неравновесности состоит в том, что, как видно из формулы [3]

$$\tau = A \frac{1}{p} T^{1/2} \exp(BT^{-1/2}) \quad (1.3)$$

и вышеприведенных значений τ , неравновесность от запаздывания E существенна при определенных значениях давления и температуры; гидродинамическая неравновесность не зависит от абсолютных величин p , T . Так как полная энергия на единицу массы равна $c_v T + E$, то уравнение энергии [11] имеет вид:

$$\rho \frac{d}{dt} (c_p T + E) - \frac{dp}{dt} = 0 \quad (1.4)$$

Оно не замыкает систему уравнений газодинамики, так как вводит в систему новую неизвестную функцию E . Квантовая статистика дает в рассматриваемом случае уравнение [4], которое для движущейся частицы имеет вид:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{E - E'}{\tau} \quad (1.5)$$

где предполагаются малые отклонения от равновесия, так что τ достаточно близко к своему равновесному значению (1.3).

Уравнения (1.2), (1.4) и (1.5) верны в зоне релаксации независимо от того, каким образом возникло запаздывание ϵ .

Изменение энтропии только равновесных степеней в зоне релаксации будет [2]

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{T} \frac{d\epsilon}{dt} > 0 \quad (1.6)$$

значит, запаздывание ϵ должно монотонно убывать. Несмотря на это, E может как возрасти после резкого роста T (например, за первой зоной скачка), так и убывать после резкого понижения T (например, после обтекания тупого угла).

§ 2. Задача об обтекании клина. Рассмотрим клин, частично или целиком находящийся в зоне релаксации — второй зоне скачка. Будем рассматривать задачу с присоединенным скачком, понимая в дальнейшем под скачком лишь его первую зону — линию. При этом [12]

$$\omega < \beta(M^2), \quad M_- \sin(\omega + \theta) \geq 1 \quad (2.1)$$

где θ — угол скачка с клином, ω — угол клина с набегающим потоком (фиг. 1); будем обозначать индексами минусом и плюсом значения величин соответственно слева и справа от скачка. Тогда, по вышесказанному, $E_- = E_+$.

При условии (2.1) поток газа с «замороженной» на скачке E будет всюду сверхзвуковой. (Энергия E «заморожена» на скачке, если она на каждой линии тока постоянна и принимает то же значение, что и непосредственно за скачком.)

Если набегающий поток — однородный и стационарный, то течение за скачком можно считать плоским и стационарным. Влияние ε будем рассматривать как малое возмущение потока газа с «замороженной» на скачке E . Исключая T при помощи (1.2), получим, учитывая (0.1) и (1.1),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} + \frac{c(T)}{R} \right) \left(\rho u \frac{\partial}{\partial x} + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{p}{\rho} \right) + \left(\rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) - \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.2) \\ u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\tau} - \frac{c(T)}{R} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0 \end{aligned}$$

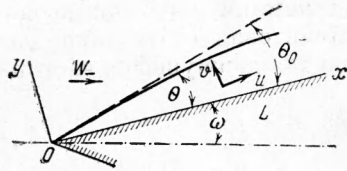
Условия на скачке имеют вид (фиг. 1) [13, 14]:

$$\begin{aligned} \rho_- w_- \sin(\omega + \theta_-) = \rho_+ (u_+ \sin \theta_+ - v_+ \cos \theta_+), \quad \theta_+ = \theta_- = \theta \\ \rho_- + \rho_- w_-^2 \sin^2(\omega + \theta_-) = \rho_+ + \rho_- w_- \sin(\omega + \theta) (u_+ \sin \theta_+ - v_+ \cos \theta_+) \quad (2.3) \\ w_- \cos(\omega + \theta_-) = u_+ \cos \theta_+ + v_+ \sin \theta_+ \end{aligned}$$

$$\frac{w_-^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_-}{\rho_-} = \frac{w_+^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_+}{\rho_+}, \quad \varepsilon_+ = \int_0^{T_+} c(T) dT$$

При написании последнего условия (2.3) мы считали, что E_-' исчезающе мало, что справедливо при $T_- < 300^\circ \text{K}$ для N_2 и при $T_- < 250^\circ \text{K}$ для O_2 . Поэтому же $E'(0) = 0$. $\theta(x)$ — неизвестно. На стенке клина имеем

$$y = 0, \quad v = 0 \quad (2.4)$$



Фиг. 1

Будем полагать, что τ равно своему равновесному значению $\tau(p, T)$. Из приведенных во введении значений $c(T)$ видно, что в достаточно большом интервале температур T (от 300 до 800°K) параметр, входящий в уравнения, и граничные условия, $\delta = c(T_+)/R \ll 1$; так как при обтекании клина без запаздывания $v = 0$, то, с учетом вышесказанного, решение задачи (2.2), (2.3), (2.4) можно искать в виде

$$\begin{aligned} u = u_0 + \delta u_1 + \dots, \quad p = p_0 + \delta p_1 + \dots, \quad T = T_0 + \delta T_1 + \dots \\ v = \delta v_1 + \dots, \quad \varepsilon = \delta \varepsilon_1 + \dots, \\ c(T) = c(T_0) + \delta \frac{dc(T_0)}{dT_0} T_1 + \dots \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho_1 + \dots, \quad \theta = \theta_0 + \delta \theta_1 + \dots, \quad \tau(p, T) = \tau_0 + \delta T_1 \frac{d\tau_0}{dT_0} + \dots$$

Вводя малый параметр δ , мы ограничиваемся T , при которых E сравнительно невелико, но отыскание решения в форме (2.5) преследует прежде всего цель — качественно исследовать поток. Для расчета течения с запаздыванием есть другие методы [2].

Параметры f_0 постоянны и равны параметрам потока совершенного газа, лишенного колебательной теплоемкости, обтекающего тот же клин (L, ω) при тех же условиях в набегающем потоке (M_-, p_-, T_-). f_0 определяются из (2.3), если туда подставить (14) и пренебречь членами $\sim \delta$.

Из (2.2)—(2.5) получим граничные условия и уравнения для f_1 :

$$x - y \operatorname{ctg} \theta_0 = 0, \quad \varepsilon_{1+} = \frac{p_0}{\rho_0}, \quad M_0^2 = \frac{\rho_0 u_0^2}{\gamma p_0} \quad (2.6.1)$$

$$\left(\frac{\rho_{1+}}{\rho_0} + \frac{u_{1+}}{u_0}\right) \sin \theta_0 - \frac{v_{1+}}{u_0} \cos \theta_0 + \left(1 - \frac{\rho_-}{\rho_0}\right) \cos \theta_0 \theta_1 = 0 \quad (2.6.2)$$

$$\frac{p_{1+}}{\rho_0 \gamma M_0^2} + \frac{u_{1+}}{u_0} \sin^2 \theta_0 - \frac{v_{1+}}{u_0} \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \left(1 - \frac{\rho_-}{\rho_0}\right) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \theta_1 = 0 \quad (2.6.3)$$

$$\frac{u_{1+}}{u_0} \cos \theta_0 + \frac{v_{1+}}{u_0} \sin \theta_0 + \frac{\rho_0}{\rho_-} \left(1 - \frac{\rho_-}{\rho_0}\right) \sin \theta_0 \theta_1 = 0 \quad (2.6.4)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{1+}}{\rho_0 \gamma M_0^2} - \frac{1}{(\gamma - 1) M_0^2} \frac{p_{1+}}{\rho_0} + \frac{u_{1+}}{u_0} = 0 \quad (2.6.5)$$

$$y = 0, \quad \frac{v_1}{u_0} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{u_1}{u_0}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_1}{u_0}\right) = 0 \quad (2.8.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_1}{u_0} + \frac{p_1}{\rho_0 \gamma M_0^2}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_1}{u_0}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p_1}{\rho_0 \gamma M_0^2}\right) = 0 \quad (2.8.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(M_0^2 \frac{p_1}{\rho_0 \gamma M_0^2} - \frac{p_1}{\rho_0} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\varepsilon_1}{\rho_0 / \rho_0}\right) = 0 \quad (2.8.3)$$

$$\frac{1}{K_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon_1}{\rho_0 / \rho_0}\right) + \frac{\varepsilon_1}{\rho_0 / \rho_0} = 0, \quad K_0 = \frac{L}{\tau_0 u_0} \quad (2.8.4)$$

В (2.6), (2.7) и (2.8) x, y заменены на $x/L, y/L$ и последние снова обозначены через x, y . Из (2.8.4) и (2.6.1) имеем

$$\frac{\varepsilon_1}{\rho_0 / \rho_0} = e^{[-K_0(x - y \operatorname{ctg} \theta_0)]} \quad (2.9)$$

Таким образом, энергия запаздывания, вычисленная по первому приближению, не зависит от самого запаздывания. Из (2.8.4) и (2.9) видно, что ε_1 убывает вдоль линий тока $y = \operatorname{const} + O(\delta)$ в соответствии с условием роста энтропии (1.6); оно максимально на скачке и монотонно убывает до нуля на бесконечности. Величина ε_1 постоянна на прямых, параллельных скачку газового потока, лишенного E , обтекающего тот же клин при тех же начальных условиях; поэтому удобно говорить об изменении ε_1 как о распространении волны запаздывания. Очевидно, что

$$\frac{\varepsilon_1|_{x=1}}{\varepsilon_1|_{x=0}} = e^{-K_0}, \quad \frac{\varepsilon_1|_{y=0}}{\varepsilon_1|_{y=1}} = e^{-K_0 \operatorname{ctg} \theta_0} \quad (2.10)$$

Здесь $K_0, K_0 \operatorname{ctg} \theta_0$ имеют смысл коэффициентов продольного и поперечного затухания волны запаздывания.

Из (2.8) получим:

$$\Lambda \frac{p_1}{\rho_0 \gamma M_0^2} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} K_0^2 \frac{\varepsilon_1}{\rho_0 / \rho_0}, \quad \Lambda \frac{v_1}{u_0} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} K_0^2 \frac{\varepsilon_1}{\rho_0 / \rho_0} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{v_1}{u_0} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{p_1}{\rho_0 \gamma M_0^2} \quad \left(\sin \alpha_0 = \frac{1}{M_0}\right)$$

Здесь оператор Λ имеет вид

$$\Lambda = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Из (2.6), так же как и в работе [14], имеем

$$x = y \operatorname{ctg} \theta_0 = 0, \quad \frac{p_{1+}}{\rho_0 \gamma M_0^2} = \frac{v_{1+}}{u_0} \operatorname{tg} \lambda \quad \left(0 < \theta_0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.12.1)$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin 2\theta_0 \sin^2(\omega + \theta_0)}{\cos^2 \alpha_0 \sin^2(\omega + \theta_0) - \sin^2 \alpha_0 - \cos^2 \theta_0} \quad \left(\sin \alpha_- = \frac{1}{M_-}\right) \quad (2.12.2)$$

Исключая u_{1+}/u_0 из (2.6.3) и (2.6.4), с учетом (2.12) получим

$$\theta_1(x) \left(1 - \frac{\rho_-}{\rho_0}\right) \left(\frac{\rho_0}{\rho_-} \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0\right) = \frac{v_{1+}}{u_0} \left(\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \theta_0} - 1\right)$$

Из (2.12.2) и уравнений (2.7), (2.6) и (2.13) следует, что на носике клина

$$x = y = 0, \quad \frac{v_1}{u_0} = \frac{p_1}{\rho_0 \gamma M_0^2} = \theta_1 = \frac{u_1}{u_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{T_1}{T_0} = 0 \quad (2.14)$$

Сделаем замену

$$\frac{p_1}{\rho_0 \gamma M_0^2} = \Pi - V^\circ \operatorname{tg} \lambda + V^\circ \operatorname{tg} \theta_0 (1 - e^{-K_0(x-y \operatorname{ctg} \theta_0)}) \quad (2.15)$$

$$\frac{v_1}{u_0} = V - V^\circ e^{-K_0(x-y \operatorname{ctg} \theta_0)}, \quad V^\circ = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{\operatorname{ctg}^2 \theta_0 - \operatorname{ctg}^2 \alpha_0}$$

Тогда задача принимает вид:

$$\Delta \Pi = 0, \quad \Delta V = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.16.1)$$

$$x - y \operatorname{ctg} \theta_0 = 0, \quad y = 0, \quad V = V^\circ e^{-K_0 x}, \quad \Pi = V \operatorname{tg} \lambda \quad (2.16.2)$$

$$x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0, \quad V < +\infty, \quad \Pi < +\infty \quad (2.16.3)$$

Последнее условие (2.16) следует из возможности разложения (2.5). По форме (2.16) совпадает с математической формулировкой задачи об обтекании сверхзвуковым потоком слабо искривленного клина [14], где воздействие на поток сосредоточено на поверхности клина; у нас оно распределено по всей зоне релаксации, однако, как видим, его можно свести к сосредоточенному воздействию на величины Π, V . Общее решение системы уравнений (2.16) имеет вид:

$$\Pi = F(x - y \operatorname{ctg} \alpha_0) + G(x + y \operatorname{ctg} \alpha_0) \quad (2.17)$$

$$V = \operatorname{ctg} \alpha_0 [F(x - y \operatorname{ctg} \alpha_0) - G(x + y \operatorname{ctg} \alpha_0)]$$

Удовлетворяя условиям на скачке и стенке, получим

$$F[x(\operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{ctg} \alpha_0)] + G[x(\operatorname{ctg} \theta_0 + \operatorname{ctg} \alpha_0)] - \\ - \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \alpha_0} \{F[x(\operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{ctg} \alpha_0)] - G[x(\operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{ctg} \alpha_0)]\} = 0 \quad (2.18)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha_0 [F(x) - G(x)] = V^\circ e^{-K_0 x}$$

Эти соотношения характеризуют взаимодействие простых волн F, G на скачке и стенке; Π и V суть комбинации простых волн; последние меняются лишь на границах потока, волна запаздывания меняется во всем потоке. Единственной неоднородностью задачи (2.16) является условие на стенке, выражающее взаимодействие волны запаздывания $\exp[-K_0(x-y \operatorname{ctg} \theta_0)]$ со стенкой $y=0$; при условии на стенке $V=0$ было бы $F=G=0$, параметры потока формировались бы одной лишь волной запаздывания и выражались бы (2.15) при $\Pi=V=0$. Механизм преобразования потока в зоне релаксации состоит, таким образом, в возбуждении волной запаздывания простых волн на стенке, которые (см. (2.15) и (2.17)) вместе с волной запаздывания формируют изменения параметров потока. Источник преобразований — волна запаздывания появляется при наличии инертной части внутренней энергии. Введем теперь

$$\Gamma = \frac{\operatorname{ctg} \theta_0 + \operatorname{ctg} \alpha_0}{\operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{ctg} \alpha_0} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{tg} \theta_0}{\operatorname{tg} \alpha_0 - \operatorname{tg} \theta_0}, \quad \sigma = \frac{\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{tg} \alpha_0}{\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{tg} \alpha_0} \quad (2.19)$$

Система функциональных уравнений (2.18) примет вид:

$$G(x\Gamma) = \sigma F(x); \quad F(x) - G(x) = V^0 \operatorname{tg} \alpha_0 e^{-K_0 x} \quad (2.20)$$

В силу (2.12) в общем случае (2.1) «шаг» волны

$$\Gamma > 1$$

Здесь Γ , как и в [14], есть отношение расстояний по стенке двух точек таких, что из первой возмущение F исходит по $x - y \operatorname{ctg} \alpha_0 = \text{const}$, а во вторую оно же, равное $G(x\Gamma)$, приходит после отражения от скачка по характеристике $x + y \operatorname{ctg} \alpha_0 = \text{const}$.

Если L — длина рассматриваемого клина, то

$$x^* = \frac{1}{\Gamma} \quad (2.22)$$

где x^* — последняя точка стенки, возмущение от которой возвращается на тело; таким образом, $1/\Gamma$ — часть стенки (от носика), влияющая на свое продолжение.

Коэффициентом $\sigma = G(x\Gamma)/F(x)$ характеризуют затухание простой волны. Из (28) и (21) получим

$$\zeta = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \alpha_0} > 0, \quad \sigma = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}, \quad \zeta = \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} > 0 \quad (2.23)$$

Отсюда

$$-1 < \sigma < +1, \quad \begin{cases} -1 < \sigma \leq 0 & \text{при } 0 < \operatorname{tg} \lambda \leq \operatorname{tg} \alpha_0 \\ 0 \leq \sigma < 1 & \text{при } 0 < \operatorname{tg} \alpha_0 \leq \operatorname{tg} \lambda \end{cases} \quad (2.24)$$

При $\sigma > 0$ волна сжатия $F > 0$ при отражении от скачка остается волной сжатия, а волна разрежения — волной разрежения; при $\sigma < 0$ волна сжатия при отражении от скачка переходит в волну разрежения, и наоборот. При $\sigma = 0$ волна F полностью поглощается на скачке в первый же раз, когда она его достигает; при этом $\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg} \alpha_0$, т. е. $\lambda (< 1/2 \pi)$ — угол наклона характеристики, при котором происходит полное поглощение возмущений, приходящих на скачок (λ — угол полного поглощения). Эти выводы верны и для других видов возмущений. Общее решение (2.20), удовлетворяющее условию (2.16), совпадает с частным решением (2.14) вида [14]:

$$F(x) = V^0 \operatorname{tg} \alpha_0 \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i \exp\left(-K_0 \frac{x}{\Gamma^i}\right); \quad G(x) = V^0 \operatorname{tg} \alpha_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^i \exp\left(-K_0 \frac{x}{\Gamma^i}\right) \quad (2.25)$$

Так как $|\exp(-K_0 x/\Gamma^i)| < 1$, то ряды (2.25) мажорируются геометрической прогрессией и, так как $|\sigma| < 1$, сходятся равномерно и абсолютно по x и по параметрам σ, Γ , а их суммы и все производные от сумм непрерывно зависят от x, σ, Γ , так как $|\sigma/\Gamma| < \sigma$. С учетом (2.25) имеем из (24):

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^0} \frac{p_1}{\rho_0 \gamma M_0^2} &= \operatorname{tg} \theta_0 \{1 - \exp[-K_0(x - y \operatorname{ctg} \theta_0)]\} - \quad (2.26) \\ &\quad - \operatorname{tg} \alpha_0 \{1 - \exp[-K_0(x - y \operatorname{ctg} \alpha_0)]\} - \\ &\quad - \operatorname{tg} \alpha_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^i \left\{ \left[1 - \exp\left(-\frac{K_0}{\Gamma^i}(x - y \operatorname{ctg} \alpha_0)\right) \right] + \left[1 - \exp\left(-\frac{K_0}{\Gamma^i}(x + y \operatorname{ctg} \alpha_0)\right) \right] \right\} \\ \frac{1}{V^0} \frac{v_1}{u_0} &= - \{ \exp[-K_0(x - y \operatorname{ctg} \theta_0)] - \exp[-K_0(x - y \operatorname{ctg} \alpha_0)] \} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^i \left\{ \exp\left[-\frac{K_0}{\Gamma^i}(x - y \operatorname{ctg} \alpha_0)\right] - \exp\left[-\frac{K_0}{\Gamma^i}(x + y \operatorname{ctg} \alpha_0)\right] \right\} \\ x \mp y \operatorname{ctg} \alpha_0 &\geq 0, \quad x - y \operatorname{ctg} \theta_0 \geq 0, \quad 0 \leq \exp\left[-\frac{K_0}{\Gamma^i}(x \mp y \operatorname{ctg} \alpha_0)\right] < 1 \end{aligned}$$

Для $\sigma = 0$ мы получим решение в замкнутом виде. Отношение p_{1+}/p_0 определяется из (2.6.5), выражения для $p_{1+}/p_0 \gamma M_0^2$ находятся подстановкой первого равенства (2.6.1) в (2.26)

$$\frac{p_{1+}}{p_0 \gamma M_0^2} = -V^\circ \operatorname{tg} \alpha_0 \left\{ \left[1 - \exp\left(-\frac{2K_0}{\Gamma+1} x\right) \right] - \right. \\ \left. - \sigma \left[1 - \exp\left(-\frac{2K_0 x}{\Gamma(\Gamma+1)}\right) \right] + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^i \left[1 - \exp\left(-\frac{2K_0 x}{\Gamma^i(\Gamma+1)}\right) \right] \right\}$$

§ 3. Исследование решения. Рассмотрим характер изменения параметров потока. По (2.12), (2.19) и (2.1) имеем оценку:

$$\Gamma\sigma + 1 = \\ = 2 \frac{\operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{tg} \theta_0 \cos^2 \theta_0 \sin^2(\omega + \theta_0)}{(\operatorname{tg} \alpha_0 - \operatorname{tg} \theta_0)(\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{tg} \alpha_0)} \frac{2 - \cos^2 \alpha_0 / \cos^2 \theta - [M_\infty^2 \sin^2(\omega + \theta_0)]^{-1}}{\cos^2 \alpha_0 \sin^2(\omega + \theta_0) + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta_0} > 0 \quad (3.1)$$

Так что $-1/\Gamma < \sigma < +1$, что верно и при других видах возмущений и таким образом уточняет результат в примечании к работе [14]. При $\sigma \geq 0$ из (2.26) с учетом (2.12) $p_1 < 0$. Ввиду непрерывной зависимости $F(x)$ от x и при достаточно малых $\sigma < 0$

$$p_1 < 0 \quad (3.2)$$

Но по (2.26), (3.1) и (2.19) при $x \rightarrow +\infty$ ($y < +\infty$)

$$\frac{p_1}{p_0 \gamma M_0^2} \rightarrow V^\circ \left[(\operatorname{tg} \theta_0 - \operatorname{tg} \alpha_0) - 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\sigma}{1-\sigma} \right] \quad (3.3) \\ \delta \frac{v_{1+}}{u_0} \rightarrow -\delta V^\circ, \quad \frac{p_1}{p_0 \gamma M_0^2} \rightarrow V^\circ (\operatorname{tg} \theta_0 - \operatorname{tg} \lambda) < 0$$

т. е. δV° — наклон линии тока за скачком на бесконечности. На стенке $v_1 = 0$, на скачке при $\sigma \geq 0$ и при $\sigma < 0$ по (3.2) и (2.12) $v_{1+} < 0$. Пусть в точке x°, y° , не лежащей на скачке и стенке, $v_1 = 0$; тогда по (2.15)

$$V(x^\circ, y^\circ) = V^\circ e^{-K_0(x^\circ - y^\circ \operatorname{ctg} \alpha_0)}$$

что не удовлетворяет при $x \rightarrow x^\circ, y \rightarrow y^\circ$ волновому уравнению (2.16) для V . Поэтому и по (2.26) в зоне релаксации между скачком и стенкой при $\sigma \geq 0$ и достаточно малых $\sigma < 0$

$$v_1 < 0, \quad \frac{\partial v_1(\sigma)}{\partial x} = -K_0 v_1 \left(\frac{\sigma}{\Gamma} \right) > 0 \quad (3.4)$$

Из (2.13) с учетом (2.24), (2.19), (2.12), (2.25) и (2.14) при тех же σ , что и в соотношении (3.4),

$$\theta(x) \left(1 - \frac{\rho_-}{\rho_0} \right) \left(\frac{\rho_0}{\rho_-} \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0 \right) = \frac{2(\sigma\Gamma + 1)}{(1-\sigma)(\Gamma-1)} \frac{v_{1+}}{u_0} \leq 0 \quad (3.5)$$

Пусть

$$\frac{\partial v_{1+}}{\partial x} \Big|_{x=0} \neq \frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=y \operatorname{ctg} \theta_0}$$

обращается в нуль в какой-то точке x° скачка; согласно (2.15)

$$V(x^\circ) = V^\circ \exp\left(-\frac{2K_0 x^\circ}{\Gamma+1}\right)$$

и при $x \rightarrow x^\circ$ не удовлетворяется волновое уравнение (2.16) для V . Знак $\partial v_{1+}/\partial x$ сохраняется и по (2.26) и (3.5)

$$\frac{\partial v_{1+}}{\partial x} \Big|_{x=0} < 0, \quad \frac{\partial v_{1+}}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x} < 0 \quad (\sigma \geq 0, \sigma \rightarrow -0) \quad (3.6)$$

Таким образом, при обтекании тел сверхзвуковым потоком с запаздыванием колебательной энергии характерно уменьшение угла наклона

скачка и уменьшение угла наклона скорости потока по отношению к соответствующему (при тех же M_-, p_-, T_-, L, ω) течению того же газа, лишенного колебательной энергии. Угол наклона скачка при удалении от клина монотонно уменьшается; скачок выпуклый вверх, наклон линий тока непосредственно за скачком уменьшается (монотонно) при удалении от клина от нуля до отрицательной величины. Картина линий тока и скачка, характерная для течения с запаздыванием E , дана на фиг. 2. Из (3.6) и (2.12)

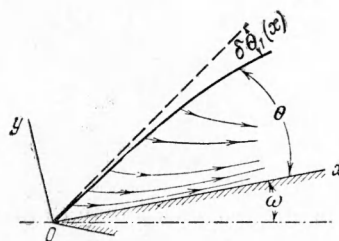
$$\partial p_{1+} / \partial x < 0$$

Между скачком и телом $\partial p_1 / \partial x \neq 0$, так как иначе $\partial \Pi / \partial x$ не удовлетворяло бы волновому уравнению (2.16). Кроме того, по (2.26) и (2.23)

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} \Big|_{x=y=0} = V^0 K_0 \left[\operatorname{tg} \theta_0 - \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\Gamma + \sigma}{\Gamma - \sigma} \right] < 0 \quad (3.7)$$

Следовательно,

$$\partial p_1 / \partial x < 0 \quad (3.8)$$



Фиг. 2

От запаздывания E давление изменяется, а именно, за прямым скачком давление возрастает вниз по потоку [3]; за косым скачком (3.8) давление падает вниз по потоку. Чем объясняется направление изменения p ? В одномерном стационарном потоке с запаздывающей колебательной энергией (когда производные по y в (2.8) исчезают) имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{p_0}{\rho_0} e^{-K_0 x}$$

и по (2.8.1) и (2.8.4)

$$(M_0^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_1}{\rho_0 \gamma M_0^2} = - \frac{\gamma - 1}{\gamma} K_0 e^{-K_0 x} \quad (3.9)$$

Если запаздывание вызвано прямым скачком, то за ним $M_0 < 1$ и $\partial p_1 / \partial x > 0$, что совпадает с оценкой [3], если же $M_0 > 1$ и возникло запаздывание E , то $\partial p_1 / \partial x < 0$, как и в двумерном потоке; в последнем случае давление уменьшается еще и за счет простых волн. Таким образом, направление изменения определяется отношением скорости потока к скорости звука. Из (3.8) с учетом (2.8.1)

$$\partial u_1 / \partial x > 0 \quad (3.10)$$

Заметим, что по (3.5) и (2.12) отношения θ_1 / v_{1+} и θ_1 / p_{1+} не зависят от природы возмущений (запаздывание E , искривление стенки клина и т. д.) и определяются лишь ω и набегающим потоком (M_-, p_-, T_-).

Найдем коэффициент сопротивления C_x

$$C_x = \frac{2 \sin \omega}{\rho_- W_-^2} \int_0^1 (p_0 + \delta p_1) dx = C_{x0} + \delta C_{x1}$$

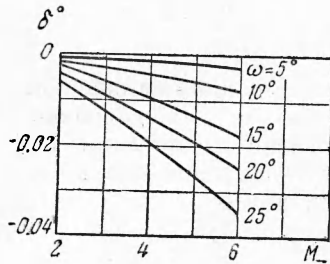
$$C_{x0} = \frac{2 \sin \omega}{\gamma + 1} \left[\sin^2 (\omega + \theta_0) - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \sin^2 \alpha_- \right] \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_x - C_{x0}}{C_{x0}} = & - \delta \frac{\gamma - 1}{\cos^2 \alpha_0} \frac{\Gamma - 1}{2\Gamma} \left\{ 1 + \frac{e^{-K_0} - 1}{K_0} + \sigma (\Gamma + 1) \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1}{1 - \sigma} - \frac{\Gamma}{K_0} \sum_{i=1}^{\infty} (\sigma \Gamma)^i \left(1 - \exp \left(- \frac{K_0}{\Gamma^i} \right) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

В предположении $K_0 \ll \Gamma$ (нас интересует $K_0 \sim 1$) покажем, что ряд в (3.11) сходится абсолютно и равномерно по σ , Γ , т. е. что интегрирование законно. Учитывая последнее неравенство (2.26) при $y = 0$, $x = 1$, получим для любого члена ряда (3.11) оценку

$$\begin{aligned} & \left| (\sigma\Gamma)^{i-1} \left(1 - \exp\left(-\frac{K_0}{\Gamma^i}\right) \right) \right| = \\ & = \left| \sigma^{i-1} \Gamma^{i-1} \exp\left(-\frac{K_0}{\Gamma^i}\right) \left[\frac{K_0}{\Gamma^i} + \frac{1}{2!} \left(\frac{K_0}{\Gamma^i}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{K_0}{\Gamma^i}\right)^3 + \dots \right] \right| \leq \\ & \leq \frac{K_0}{\Gamma} |\sigma|^{i-1} \left| 1 + \frac{1}{2!} \frac{K_0}{\Gamma^i} + \frac{1}{3!} \left(\frac{K_0}{\Gamma^i}\right)^2 + \dots \right| \leq \\ & \leq |\sigma|^{i-1} \left| \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) - 1 \right| = (e - 1) \sigma^{i-1} \end{aligned}$$

чем и доказаны ввиду (2.24) абсолютная и равномерная по σ , Γ сходимости ряда в равенстве (3.11).



Фиг. 3

Величина $\delta C_{x1}/C_{x0}$, как показывает расчет, при постоянном M_- и изменении ω меняется главным образом за счет δ , множитель C_{x1}/C_{x0} мало влияет на ее изменение при росте ω , запаздывание E уменьшает волновое сопротивление тела.

Изменение коэффициента подъемной силы и сопротивления

$$\delta c_{x1} < 0 \quad (3.12)$$

$$\delta c_{y1} = \delta c_{x1} \frac{1}{\operatorname{tg} \omega} < 0 \quad (3.13)$$

Наконец, из уравнения состояния (3.8.4), (2.9) и (3.2) найдем изменение температуры на стенке клина (клин предполагается нетеплопроводным; $\sigma \geq 0$, $\sigma \rightarrow -0$)

$$\delta \frac{T_1}{T_0} \Big|_{y=0} = -\delta \frac{\gamma-1}{\gamma} (1 - e^{-K_0 x}) + (\gamma M_0^2 - 1) \frac{P_1}{P_0 \gamma M_0^2} \Big|_{y=0} < 0 \quad (3.14)$$

Далее по (24) получим

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{y=0} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} K_0 e^{-K_0 x} + (\gamma M_0^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} \frac{P_1}{P_0 \gamma M_0^2} < 0 \quad (3.15)$$

т. е. температура стенки клина ниже, чем в соответствующем потоке газа, лишенного E , и она убывает вниз по потоку, так же как и за прямым скачком.

Зависимость

$$\delta^\circ = \delta^\circ(M_-), \quad \delta^\circ = \delta T_1 / T_0 \quad \text{при } y = 0, x = 1, K_0 = 1, T_- = 300^\circ \text{ К}$$

для различных значений ω дана на фиг. 3, откуда ясно видно монотонное убывание температуры за счет запаздывания колебательной энергии с ростом M_- и с ростом ω . Зная $\theta(x)$, легко найти форму скачка из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta_0 + \delta\theta_1) = \operatorname{tg} \theta_0 + \delta\theta_1(x)$$

Имеем

$$y = \operatorname{tg} \theta_0 x + \delta \int_0^x \theta_1(x) dx = y_0 + \delta y_1$$

где

$$y_1 = \frac{2(1+\sigma\Gamma)}{(1-\sigma)(\Gamma-1)} V^0 \left[\left(1 - \frac{\rho_-}{\rho_0} \right) \left(\frac{\rho_0}{\rho_-} \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0 \right) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ -x - \frac{\Gamma+1}{2K_0} \left(\exp \left(-\frac{2K_0 x}{\Gamma+1} \right) - 1 \right) - \frac{\Gamma(\Gamma+1)}{2K_0} \left(\exp \left(-\frac{2K_0 x}{\Gamma(\Gamma+1)} \right) - 1 \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^i \left[\frac{\Gamma^i(\Gamma+1)}{2K_0} \left(\exp \left(-\frac{2K_0 x}{\Gamma^i(\Gamma+i)} \right) - 1 \right) \right] \right\} \quad (3.16)$$

Сходимость ряда в (3.16) доказывается точно так же, как и для ряда в (3.11). Отметим еще, что в рассмотренном случае причиной падения давления за скачком служит разница (на несколько порядков) между временами релаксации активных и инертных степеней и взаимодействие волны запаздывания со стенкой, в отличие от [15], где причиной падения давления за (прямой) ударной волной третьего типа служит разница между временем возбуждения некоторой «степени свободы» (диссоциации молекулы) и временем установления той же самой «степени свободы» (рекомбинации той же молекулы). Степень свободы понимается здесь в смысле [3].

В заключение приношу благодарность Г. Ф. Теленину, который предложил мне эту задачу, а также А. С. Мучной, Т. Низюлько, Л. Климиной, проводившим расчеты.

Поступила
29 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Логан Дж. Г. Явления релаксации в гиперзвуковой аэродинамике. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1959, вып. 1.
2. Реслер Э. Характеристики и скорость звука в неизэнтропических течениях газа с неравновесными термодинамическими состояниями. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1958, вып. 3.
3. Зельдович Я. Б. и Райзер. Ударные волны большой амплитуды в газах. Успехи физ. наук, 1957, т. 63, вып. 3.
4. High speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Editor E. D. Rossini, v.1. I, ser. H, 1, 2, 3, 19, 20, 21.
5. Kantrowitz A. Heat-Capacity Lag. in Gas Dynamics, J. Chem. Phys., 1946, vol. 14.
6. Зельдович Я. Б. Теория ударных волн и введение в газовую динамику. Гостехиздат, 1946.
7. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, Ред. Хоуарт, т. I, гл. 2, § 3; гл. 4, § 5. ИИЛ, 1953.
8. Зельдович Я. Б. ЖЭТФ, 1946, т. 16.
9. Gunn. Rept. Memor. Aero Res. Conn., 1946, № 2.
10. Huber P. W. a. Kantrowitz A. Heat-Capacity Lag. Measurements in Various Gases, J. Chem. Phys., 1947, v. 15.
11. Рочин И. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 2. Гостехиздат, 1948.
12. Ферри. Аэродинамика сверхзвуковых течений. Гостехиздат, 1953.
13. Ландау Л. Д. и Лившиц Г. А. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
14. Бона-Течу. О взаимодействии сильного скачка уплотнения с возникающими позади него слабыми возмущениями, Сб. пер. механика, № 2, 1953.
15. Дьяков С. П. Ударные волны в релаксирующей среде. ЖЭТФ, 1954, т. 27, вып. 6.