ПМТФ, № 3, 1964

ОБ ОДНОКОМПОНЕНТНЫХ ПУЧКАХ ОДНОИМЕННО ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. А. Сыровой

(*Москва*)

Под однокомпонентным понимается течение в направлении одной из координатных осей (например, в x^1-направлении) произвольной ортогональной системы координат x^i ($i = 1,2,3$). Ниже исследуется вопрос о системах координат, допускающих такие течения. Показано, что в плоском случае (§ 2) однокомпонентные течения возможны лишь в трех ортогональных системах координат: декартовой x, y; полярной R, ψ и спиральной q_1, q_2. В трехмерном пространстве (§ 3) рассматриваются системы координат, для которых

$$g_{11} = h_1(x^1)\, h_2(x^2)\, h_3(x^3), \qquad g_{22} = k(x^2)\, K(x^1, x^3), \qquad g_{33} = l(x^3)\, L(x^1, x^2)$$

При этом к трем цилиндрическим системам координат, соответствующим указанным двумерным системам, добавляются сферические координаты r, θ, ψ.

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения. Моноэнергетический нерелятивистский пучок одноименно заряженных частиц в стационарном случае при отсутствии внешнего магнитного поля описывается, как известно [1, 2], одним нелинейным дифференциальным уравнением четвертого порядка относительно W — действия, отнесенного к массе частицы. В произвольной криволинейной системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$), метрика в которой задается соотношением

$$dS^{(2)} = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{1.1}$$

это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left\{ g^{mn} \frac{\partial W}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\sqrt{g}\, g^{jl} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(g^{ik} \frac{\partial W}{\partial x^i} \frac{\partial W}{\partial x^k}\right)\right]\right\} = 0 \tag{1.2}$$

Выяснению вопроса о тех ортогональных системах координат, которые допускают однокомпонентные течения, посвящен ряд работ [3–8]. Однако их целью было получение необходимых и достаточных условий возможности однокомпонентного течения в x^1-направлении (сокращенно, x^1-течения). Вопрос о существовании в заданной системе координат x^1-течения решался путем применения выработанных критериев к метрическому тензору этой системы. Ясно, что число координатных систем, удовлетворяющих этим критериям, не могло быть установлено по той причине, что при таком подходе действовать приходилось методом перебора. Так в работе [6] исследованию было подвергнуто одиннадцать криволинейных координатных систем, встречающихся в теории электромагнитных полей.

В работах [2,3] показано, что в случае течения в x^1-направлении уравнение (1.2) принимает вид

$$f(x)\, w^{1/2} \frac{d^2 w}{(dx^1)^2} + \frac{\partial f(x)}{\partial x^1} w^{1/2} \frac{dw}{dx^1} + h(x)\, w^{3/2} = F(x^2, x^3)$$
$$f(x) = [(g^{11})^5 g_{22} g_{33}]^{1/2}, \qquad h(x) = \frac{(g_{11})^2}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial g^{11}}{\partial x^k}\right), \qquad w = \left(\frac{dW}{dx^1}\right)^2 \tag{1.3}$$

Здесь $F(x^2, x^3)$ — некоторая функция, возникающая в результате интегрирования по x^1, а $f(x) = f(x^1, x^2, x^3)$. Так как компоненты метрического тензора, имеющего в ортогональных координатах диагональный вид, зависят, вообще говоря, от всех трех координат, а $w = w(x^1)$, то на g_{hh} (h — фиксирующий индекс) должны быть наложены определенные ограничения. Достаточные условия возможности x^1-течения были получены в [7], исходя из того требования, чтобы уравнение (1.3) было обыкновенным дифференциальным уравнением относительно w, и состоят в следующем:

$$f(x) = \Phi(x^1) F(x^2, x^3) + G(x)$$
$$f(x) h(x) = \Psi(x^1) F(x^2, x^3) + H(x) \tag{1.4}$$

Для w имеет место уравнение

$$\Phi(x^1) w'' + \Phi'(x^1) w' + \Psi(x^1) w = w^{-1/2} \tag{1.5}$$

Здесь Φ, Ψ — некоторые функции от x^1, а G, H и w связаны

$$G(x) \frac{d^2 w}{(dx^1)^2} + \frac{\partial G(x)}{\partial x^1} \frac{dw}{\partial x^1} + H(x) w = 0 \tag{1.6}$$

При $G = H = 0$ формулы (1.4) определяют условия, установленные ранее в работе [3]

$$f(x) = \Phi(x^1) F(x^2, x^3), \qquad h(x) = \Psi(x^1) \tag{1.7}$$

Условия (1.4) и (1.7) относятся к двум качественно различным классам течений. Для выполнения граничных условий на эмиттере решение должно содержать две произвольные постоянные. Если же на метрику наложены ограничения (1.4), то оно будет иметь не более одной произвольной постоянной. В этом смысле решения, для которых выполняется (1.4), являются вырожденными. Решения такого типа справедливо противопоставлялись в [3,4] решениям, описывающим однокомпонентные течения с поверхности, на которой выполнены условия термоэмиссии. Действительно, выражая w'' из (1.6) и подставляя его в (1.5), имеем

$$\left[\Phi'(x^1) - \frac{\partial \ln G(x)}{\partial x^1} \Phi(x^1)\right] \frac{dw}{dx^1} + \left[\Psi(x^1) - \frac{H(x)}{G(x)} \Phi(x^1)\right] w = \frac{1}{\sqrt{w}} \tag{1.8}$$

Требуя, как и выше, чтобы (1.8) было обыкновенным дифференциальным уравнением относительно w, получаем

$$\Phi'(x^1) - \frac{\partial \ln G(x)}{\partial x^1} \Phi(x^1) = \alpha(x^1) + U(x)$$
$$\Psi(x^1) - \frac{H(x)}{G(x)} \Phi(x^1) = \beta(x^1) + V(x) \tag{1.9}$$

$$\alpha(x^1) \frac{dw}{dx^1} + \beta(x^1) w = \frac{1}{\sqrt{w}}, \qquad U(x) \frac{dw}{dx^1} + V(x) w = 0 \tag{1.10}$$

Легко проверить, что решения [9, 10], приведенные в [4, 5]

$$W = x^1, \qquad (1) \quad x^1 = {}^1/_2 (x^2 - y^2),$$
$$(2) \quad x^1 = \operatorname{Re}(2i \ln \operatorname{sc} z) \qquad (z = x + iy) \tag{1.11}$$

одновременно удовлетворяют уравнениям (1.6), (1.10). Они соответствуют тому случаю, когда $U = V = 0$ и

$$f = 1 / g = \Phi(x^1) F(x^2) + K(x^1) L(x^2) \qquad (g = |g_{ik}|)$$

Для первого из них $\Phi = L = 1$, для второго $\Phi = 1$. В каждом из случаев (1), (2) решения (1.11) будут, по-видимому, единственно возможными.

В дальнейшем будем интересоваться системами координат, для которых имеют место условия (1.7), и, следовательно, невырожденными решениями.

Кроме выполнения условий (1.7) необходимо, чтобы метрика была эвклидовой. Это требование выражается равенством нулю тензора Римана—Кристоффеля [11]

$$R^{p}_{\cdot rst} = 0 \tag{1.12}$$

или симметричного тензора второго ранга S^{ij}

$$S^{ij} = (4g)^{-1} e^{ikl} e^{jmn} R_{klmn} = 0 \qquad (R_{prst} = g_{pm} R^{m}_{\cdot rst}) \tag{1.13}$$

Условия (1.13) называются тождествами Ляме и в подробной записи имеют вид [12]

$$2\frac{\partial^2 \ln g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial \ln g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\beta}\frac{\partial \ln g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \ln g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\beta}\frac{\partial \ln g_{\beta\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \ln g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \ln g_{\gamma\gamma}}{\partial x^\beta} = 0 \tag{1.14}$$

$$g_{\alpha\alpha}\left[2\frac{\partial^2 \ln g_{\alpha\alpha}}{(\partial x^\beta)^2} + \frac{\partial \ln g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\ln\frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{\beta\beta}}\right] + g_{\beta\beta}\left[2\frac{\partial^2 \ln g_{\beta\beta}}{(\partial x^\alpha)^2} + \frac{\partial \ln g_{\beta\beta}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln\frac{g_{\beta\beta}}{g_{\alpha\alpha}}\right] +$$

$$+ g^{\gamma\gamma}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\gamma}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^\gamma} = 0 \tag{1.15}$$

Три условия (1.14) объединяют тождества $R_{\beta\alpha\alpha\gamma} = 0$, три условия (1.15) — тождества $R_{\beta\alpha\alpha\beta} = 0$; здесь α, β, γ — фиксирующие индексы и $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.

В §§ 2, 3 делается попытка получить решение уравнений (1.14), (1.15) при выполнении условий (1.7) на плоскости и в трехмерном пространстве. Аналогичное исследование для уравнения Шредингера проведено Эйзенхартом в работах [13-15]. Линейность уравнения, подвергнутого анализу, способствовала полному решению задачи: в [13-15] указано одиннадцать криволинейных ортогональных систем, в которых волновая функция частицы может быть представлена в виде: $\Psi = \prod_i \Psi_i (x^i)$. Ниже рассматривается более частная задача: отыскиваются системы координат, в которых $W = W(x^1)$.

§ 2. Плоские течения. Без ограничения общности можно считать, что произвольная ортогональная система координат на плоскости задается выражениями вида [16]

$$x^1 = \operatorname{Re} f(z), \qquad x^2 = \operatorname{Im} f(z) \qquad (z = x + iy) \tag{2.1}$$

Здесь $f(z)$ — некоторая аналитическая функция комплексного переменного z. В этом случае

$$g_{11} = g_{22} = \sqrt{g} \qquad (g = |g_{ik}|) \tag{2.2}$$

Пользуясь (2.2), получим условия (1.7) в виде

$$\frac{1}{g} = \Phi(x^1) F(x^2), \qquad \sqrt{g}\,\triangle\frac{1}{\sqrt{g}} = \Psi(x^1) \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2}\right) \tag{2.3}$$

Все уравнения (1.14), (1.15) удовлетворяются тождественно, за исключением одного: $S^{33} = 0$ или $R_{1212} = 0$

$$\triangle(\sqrt{g}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^2}\right)^2\right] \tag{2.4}$$

Это уравнение и второе условие (2.3) можно представить в виде

$$\frac{1}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial x^2}\right)^2\right]=\Psi(x^1),\qquad \Delta g=\frac{1}{g}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial x^2}\right)^2\right] \tag{2.5}$$

Пользуясь выражением для детерминанта метрического тензора из (2.3), получаем уравнения для определения $\varphi = \Phi^{-1}$, $f = F^{-1}$ и Ψ

$$\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}-\Psi=\frac{f'^2}{f^2}=b^2,\qquad \frac{\varphi''}{\varphi}-\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}=-\frac{f''}{f}+\frac{f'^2}{f^2}=\delta \qquad (b,\ \delta=\text{const}) \tag{2.6}$$

Первое из этих уравнений показывает, что $f \sim \exp(bx^2)$. Подставляя это выражение во второе уравнение (2.6), находим, что $\delta = 0$. Следовательно, $\varphi \sim \exp(ax^1)$, а $\Psi = a^2 - b^2$. Таким образом, общее решение уравнений (2.5) имеет вид

$$g=\gamma\exp(\alpha x^1+\beta x^2),\qquad \Psi=a^2-b^2 \qquad (\alpha=-a,\ \beta=-b) \tag{2.7}$$

При $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = 0$ получаем декартовы координаты x, y; при $\gamma = 1$ и $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ или $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ выражение (2.7) соответствует координатам $\ln R, \psi$. Спиральные координаты q_1, q_2 определяются формулами (2.1) при

$$f(z)=(b_1+ib_2)\,/\,(b_1^2+b_2^2)\ln z \qquad (b_1,\ b_2=\text{const})$$

В спиральных координатах

$$g=(b_1^2+b_2^2)^2\exp\left[4(b_1q_1+b_2q_2)\right] \tag{2.8}$$

Видно, что при $\gamma = (b_1^2 + b_2^2)^2$, $\alpha = 4b_1$, $\beta = 4b_2$ формула (2.7) переходит в (2.8). В каждой из перечисленных координатных систем возможны однокомпонентные течения в направлении любой координатной оси. Эмиттирующими поверхностями могут быть плоскости $x, y = \text{const}$, цилиндры $R = \text{const}$, полуплоскости $\psi = \text{const}$, спиральные цилиндры q_1, $q_2 = \text{const}$. При этом частицы движутся по прямым, окружностям или спиралям.

§ 3. **Трехмерные течения.** Условия эвклидовости пространства (1.14), (1.15) в подробной записи имеют вид

$$2p_{23}{}^1+p_2{}^1p_3{}^1-p_2{}^1p_3{}^2-p_3{}^1p_2{}^3=0 \tag{3.1}$$

$$2p_{13}{}^2+p_1{}^2p_3{}^2-p_3{}^1p_1{}^2-p_3{}^2p_1{}^3=0 \tag{3.2}$$

$$2p_{12}{}^3+p_1{}^3p_2{}^3-p_1{}^2p_2{}^3-p_2{}^1p_1{}^3=0 \tag{3.3}$$

$$p_k{}^h=\frac{\partial\ln g_{hh}}{\partial x^k},\qquad p_{kl}{}^h=\frac{\partial^2\ln g_{hh}}{\partial x^k\partial x^l}$$

$$2\left[\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^3)^2}+\frac{\partial^2 g_{33}}{(\partial x^2)^2}\right]=-g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}+g^{22}\left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}\right)^2+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right]+ \\ +g^{33}\left[\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\right] \tag{3.4}$$

$$2\left[\frac{\partial^2 g_{33}}{(\partial x^1)^2}+\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^3)^2}\right]=g^{11}\left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\right)^2+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right]-g^{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}+ \\ +g^{33}\left[\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right)^2+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\right] \tag{3.5}$$

$$2\left[\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2}+\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2}\right]=g^{11}\left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right]-g^{33}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}+ \\ +g^{22}\left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)^2+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right] \tag{3.6}$$

Здесь могут представиться следующие случаи

$1^\circ.\quad p_3^2 \neq 0,\ p_2^1 = p_3^1 = 0;\qquad 2^\circ.\quad p_3^1 \neq 0,\ p_1^2 = p_3^2 = 0$

$3^\circ.\quad p_3^1 = 0,\ p_3^2 = 0;\qquad 4^\circ.\quad p_3^1 \neq 0,\ p_3^2 \neq 0$

Окончательные результаты в трехмерном случае удается получить, если предположить что

$$g_{11} = h_1(x^1)\, h_2(x^2)\, h_3(x^3),\qquad g_{22} = k(x^2)\, K(x^1, x^3),\qquad g_{33} = l(x^3)\, L(x^1, x^2)$$

Первое условие (1.7) удовлетворяется лишь тогда, когда K и L представимы в виде произведения функций, зависящих от x^1 и x^3, x^1 и x^2, соответственно. Введением новых переменных можно добиться, чтобы

$$g_{hh} = \prod_{i\neq h} f_i(x^i) \tag{3.7}$$

1°. В этом случае, на основании сказанного, следует считать, что $g_{11} = 1$. Второе условие (1.7) при этом удовлетворяется тождественно. Используя первое условие (1.7), получаем решение уравнения (3.2)

$$g_{22} = \sqrt{\Phi(x^1)}\, S(x^2, x^3) + T(x^1, x^2) \tag{3.8}$$

Далее возможны следующие непротиворечивые комбинации

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha) & p_1^2 \neq 0,\quad p_3^1 \neq 0\\ \beta) & p_1^2 = 0,\quad p_1^3 = 0\end{array}\right\} p_2^3 \neq 0,\qquad \left.\begin{array}{ll}\gamma) & p_1^2 \neq 0,\quad p_1^3 \neq 0\\ \delta) & p_1^2 = 0,\quad p_1^3 \neq 0\end{array}\right\} p_2^3 \neq 0$$

α) При $p_2^3 \neq 0$ уравнение (3.3) дает для g_{33}

$$g_{33} = \sqrt{\Phi(x^1)}\, U(x^2, x^3) + V(x^1, x^3) \tag{3.9}$$

Решая уравнения (3.5), (3.6), имеем

$$g_{22} = [\alpha(x^2, x^3)\, x^1 + \beta(x^2, x^3)]^2,\quad g_{33} = [\gamma(x^2, x^3)\, x^1 + \delta(x^2, x^3)]^2 \tag{3.10}$$

Анализируя различные ситуации, представляющиеся возможными при одновременном выполнении (3.8) — (3.10), обнаруживаем, что лишь одна из них имеет смысл: $T = V = 0$ (или $\beta = \delta = 0$). Таким образом

$$g_{11} = 1,\qquad g_{22} = (x^1)^2\, S(x^2, x^3),\qquad g_{33} = (x^1)^2\, U(x^2, x^3)$$

Функции S и U связаны уравнением (3.4)

$$2\left[\frac{\partial^2 S}{(\partial x^3)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial x^2)^2}\right] + 4US = \frac{\partial \ln US}{\partial x^2}\frac{\partial U}{\partial x^2} + \frac{\partial \ln US}{\partial x^3}\frac{\partial S}{\partial x^3} \tag{3.11}$$

Предполагая, что (3.7) справедливо, т. е. $S = S(x^3)$, $U = U(x^2)$, получаем вместо (3.11)

$$[2S'' - S'(\ln S)'] + [2U'' - U'(\ln U)'] + 4US = 0$$

Учитывая, что $p_2^3 \neq 0$ и, следовательно, $U \neq \text{const}$, имеем единственную возможность, при которой это уравнение имеет место

$$S = 1,\qquad 2UU'' - U'^2 + 4U^2 = 0 \tag{3.12}$$

Решая уравнение (3.12), получаем

$$g_{11} = 1,\qquad g_{22} = (x^1)^2,\qquad g_{33} = (x^1 \sin x^2)^2 \tag{3.13}$$

Формулы (3.13) определяют метрику в сферических координатах r, θ, ψ. Рассмотренный случай показывает возможность r-течения.

β) Все условия эвклидовости пространства, кроме уравнения (3.4), удовлетворяются тождественно. Из (3.8), (3.9) и $p_1^2 = p_1^3 = 0$ следует, что $\Phi = 1$, $T = V = 0$, $g_{22} = S(x^2, x^3)$, $g_{33} = U(x^2, x^3)$.

Условия (1.7) при этом выполняются. При тех же предположениях, что и в предыдущем пункте, получаем формулу (1.1) в виде

$$dS^{(2)} = (dx^1)^2 + S\,(x^3)\,(dx^2)^2 + U\,(x^2)\,(dx^3)^2$$

Вводя новые переменные ξ, η, ζ по формулам

$$\xi = x^1, \qquad dx^2 = \sqrt{U\,(x^2)}\,d\eta, \qquad dx^3 = \sqrt{S\,(x^3)}\,d\zeta$$

преобразуем выражение для $dS^{(2)}$ следующим образом

$$dS^{(2)} = d\xi^2 + U\,(\eta)\,S\,(\zeta)\,(d\eta^2 + d\zeta^2) \qquad (3.14)$$

Формула (3.14) определяет метрику в некоторой цилиндрической системе координат, причем течение осуществляется в z-направлении ($\xi = z$). Так как в декартовых координатах x, y, z возможно течение в направлении любой оси, то видом функций U и S можно не интересоваться. Случай γ) приводит к тому же результату, что и α).

δ) Учитывая (3.7), получаем $g_{hh} = 1$. Это — декартовы координаты.

2°. В этом случае $g_{22} = 1$, и представляются возможными следующие непротиворечивые комбинации

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha) & p_2{}^1 \neq 0, \quad p_2{}^3 \neq 0 \\ \beta) & p_2{}^1 = 0, \quad p_2{}^3 = 0\end{array}\right\} p_1{}^3 \neq 0, \qquad \left.\begin{array}{ll}\gamma) & p_2{}^1 \neq 0, \quad p_2{}^3 \neq 0 \\ \delta) & p_2{}^1 \neq 0, \quad p_2{}^3 = 0 \\ \varkappa) & p_2{}^1 = 0, \quad p_2{}^3 = 0\end{array}\right\} p_1{}^3 = 0$$

α) Уравнения (3.4), (3.6) дают для g_{11} и g_{33} выражения вида

$$g_{11} = [\alpha\,(x^1, x^3)\,x^2 + \beta\,(x^1, x^3)]^2, \qquad g_{33} = [\gamma\,(x^1, x^3)\,x^2 + \delta\,(x^1, x^3)]^2 \quad (3.15)$$

Первое условие (1.7) выполняется в двух случаях:

$$(1) \quad \delta = \beta = 0, \qquad g_{11} = (x^2)^2\,S\,(x^1, x^3), \qquad g_{22} = (x^2)^2\,U\,(x^1, x^3)$$

$$(2) \quad g_{11} = g_{33} = f\,(x^1)\,[\alpha\,(x^3)\,x^2 + \beta\,(x^3)]^2$$

В первом случае уравнения (3.1) — (3.3) удовлетворяются тождественно; второй справедлив при $p_{23}{}^1 = 0$, т. е. при $\alpha \sim \beta$, и совпадает, таким образом, со случаем (1). Функции U, S связаны соотношением, получающимся из (3.5)

$$2\left[\frac{\partial^2 S}{(\partial x^3)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial x^1)^2}\right] + 4US = \frac{\partial \ln US}{\partial x^1}\frac{\partial U}{\partial x^1} + \frac{\partial \ln US}{\partial x^3}\frac{\partial S}{\partial x^3}$$

которое, при выполнении (3.7), дает решение в виде

$$g_{11} = (x^2)^2, \qquad g_{22} = 1, \qquad g_{33} = (x^2 \sin x^1)^2 \qquad (3.16)$$

Формулы (3.16) определяют метрику в сферических координатах r, θ, ψ при течении в θ-направлении.

β) В этом случае $g_{11} = S\,(x^1, x^3)$, $g_{22} = 1$, $g_{33} = U\,(x^1, x^3)$, причем для U и S остается уравнение (3.5) и условия (1.7)

$$2\left[\frac{\partial^2 S}{(\partial x^3)^2} + \frac{\partial^2 U}{(\partial x^1)^2}\right] = \frac{\partial \ln US}{\partial x^1}\frac{\partial U}{\partial x^1} + \frac{\partial \ln US}{\partial x^3}\frac{\partial S}{\partial x^3} \qquad (3.17)$$

При выполнении (3.7) первое условие (1.7) удовлетворяется тождественно, а (3.17) и второе условие (1.7) принимают вид

$$2U'' - U'\,(\ln U)' = -2S'' + S'\,(\ln S)' = a, \quad 2S'' - 3S'\,(\ln S)' = b \quad (a, b = \mathrm{const})$$

Совместное решение двух уравнений для S показывает, что $S = (x^3)^2$ Следовательно, $a = 0$ и $U = (x^1)^2$. Таким образом

$$dS^{(2)} = (x^3 dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (x^1 dx^3)^2$$

Вводя новые переменные по формулам

$$x^1 = b_1^{-1}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\,e^{b_1 q_1}, \qquad x^2 = z, \qquad x^3 = b_2^{-1}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\,e^{b_2 q_2}$$

получаем для $dS^{(2)}$ выражение, определяющее метрику в спиральной цилиндрической системе координат. Здесь возможны течения в q_1- и q_2-направлениях.

γ) Решая уравнения (3.4), (3.6), имеем

$$g_{11} = [\alpha(x^1, x^3)\,x^2 + \beta(x^1, x^3)]^2, \qquad g_{33} = [\gamma(x^3)\,x^2 + \delta(x^3)]^2 \qquad (\alpha, \gamma \neq 0)$$

Первое условие (1.7) выполняется, если $\beta = \delta = 0$, а $\alpha(x^1, x^3) = \alpha_1(x^1)\,\alpha_3(x^3)$. Значит, решение можно искать в виде

$$g_{11} = (x^2)^2 S(x^3), \qquad g_{22} = 1, \qquad g_{33} = (x^2)^2$$

Так же, как и в α), существует возможность выполнения первого условия (1.7) при $g_{11} = g_{33}$; из рассмотрения (3.1) следует, что этот случай входит в предыдущий. Уравнение (3.5) принимает вид (3.12) относительно S. Таким образом

$$dS^{(2)} = (x^2 \sin x^3 dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (x^2 dx^3)^2$$

Случай соответствует течению в ψ-направлении в координатах r, θ, ψ.

δ) В этом случае $g_{22} = 1$, $g_{33} = 1$. Решая (3.5), получаем

$$g_{11} = [\alpha(x^1, x^2)\,x^3 + \beta(x^1, x^2)]^2$$

Первое условие (1.7) имеет место в двух случаях

$$(1) \quad \beta = 0, \quad g_{11} = (x^3)^2 S(x^1, x^3), \qquad (2) \quad g_{11} = [\alpha(x^2)\,x^3 + \beta(x^2)]^2$$

Первый из них противоречит начальным предположениям, так как из рассмотрения (3.1) следует, что $p_2^1 \cdot p_3^1 = 0$. Во втором случае решение (3.1) и (3.6) дает для g_{11} выражение

$$g_{11} = (\alpha x^2 + x^3)^2 \qquad (\alpha = \mathrm{const})$$

Введем теперь вместо x^2 и x^3 новые ортогональные координаты

$$\xi = x^1, \qquad \eta = \alpha x^2 + x^3, \qquad \zeta = -x^2 + \alpha x^3$$

В новых координатах

$$dS^{(2)} = \eta^2 d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 \tag{3.18}$$

Формула (3.18) определяет метрику в координатах R, ψ, z при течении в ψ-направлении. К этому же результату приводит рассмотрение $\varkappa$.

3°. Будем сразу считать, что имеют место ограничения (3.7). Тогда, требуя выполнения первого условия (1.7), имеем

$$g_{11} = S(x^2), \qquad g_{22} = T(x^1), \qquad g_{33} = U(x^1)\,V(x^2)$$

Рассматривая (3.3), находим, что могут быть следующие случаи

(α) $\quad (\ln S)'/(\ln V)' = a, \qquad (\ln T)'/(\ln U)' = 1 - a \qquad (U', V' \neq 0,\ a = \mathrm{const})$

(β) $\quad U = T = 1, \quad g_{11} = S(x^2), \quad g_{22} = 1, \quad g_{33} = V(x^2) \qquad (V' \neq 0)$

(γ) $\quad V = S = 1, \quad g_{11} = 1, \quad g_{22} = T(x^1), \quad g_{33} = U(x^1) \qquad (U' \neq 0)$

(δ) $\quad U = V = 1, \quad g_{11} = S(x^2), \quad g_{22} = T(x^1), \quad g_{33} = 1$

Уравнения (3.4) — (3.6) приводят к выражениям

$$\begin{aligned} &(2V'' - V'^2/V) = bV, && (\ln T)'(\ln U)' = -b \\ &T(2U'' - U'^2/U) = cU, && S'(\ln V)' = -c \qquad (b, c, d = \mathrm{const}) \\ &2S'' - S'^2/S = d, && 2T'' - T'^2/T = -d \end{aligned}$$

Все случаи, за исключением γ) при $T = 1$, повторяют уже известные результаты.

β) При $T = 1$ имеем $U = (x^1)^2$ и

$$dS^{(2)} = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (x^1 dx^3)^2$$

что соответствует течению в R-направлении в координатах R, ψ, z.

Можно показать, что при выполнении (3.7) случай 4° не приводит к каким-либо новым результатам.

Таким образом, к трем цилиндрическим системам координат, соответствующим указанным в § 2 двумерным системам, добавились сферические координаты r, θ, ψ. Частицы могут эмитироваться со сфер $r = \text{const}$ и конусов $\theta = \text{const}$, двигаясь по радиальным прямым или окружностям.

Заметим, что четыре перечисленные системы координат возникли естественным образом при исследовании групповых свойств уравнений пучка [17, 18].

Замечание. В работе В. Т. Овчарова [19] показано, что при выполнении условий (1.7) частицы в плоском случае могут двигаться по спиралям, прямым или окружностям; в трехмерном пространстве рассматривались системы координат с вращательной симметрией.

Поступила 17 1 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Spangenberg K. Use of the Action Function to Obtain the General Differentia Equations of Space Charge Flow in More Than One Dimension. J. Franklin Institute 1941, vol. 232, No. 4.
2. Meltzer B. Single-Component Stationary Electron Flow Under Space-Charge Conditions. J. Electronics, 1956, vol. 2, No. 2.
3. Lucas A. R., Meltzer B., Stuart G. A. A General Theorem for Dense Electron Beams. J. Electronics and Control, 1958, vol. 4, No. 2.
4. Meltzer B., Lucas A. R. Sufficient and Necessary Trajectory Conditions for Dense Electron Beams. J. Electronics and Control, 1958, vol. 4, No 5.
5. Kirstein P. T. Comments on «A General Theorem for Dense Electron Beams» by A. R. Lucas, B. Meltzer, and G. A. Stuart. J. Electronics and Control, 1958, vol. 4, No. 5.
6. Mueller W. M. Necessary and Sufficient Trajectory Conditions for Dense Electron Beams. J. Electronics and Control, 1959, vol. 5, No. 6.
7. Mueller W. M. Comments on Necessary and Sufficient Trajectory Conditions for Dense Electron Beams. J. Electronics and Control, 1960, vol. 8, No. 2.
8. Rosenblatt J. Three-Dimensional Space-Charge Flow. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 8.
9. Meltzer B. Electron Flow in Curved Paths Under Space-Charge Conditions. Proc. Phys. Soc. B, 1949, vol. 62, No. 355.
10. Kirstein P. T. The Complex Formulation of the Equations of Two-Dimensional Space-Charge Flow. J. Electronics and Control, 1958, vol. 4, No. 5.
11. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ. Физматгиз, 1963.
12. Eisenhart L. P. Riemann Geometry. Princeton, Princeton University Press, 1926.
13. Eisenhart L. P. Separable Systems in Euclidean 3-space. Phys. Rev., 1934, vol. 45, No. 6.
14. Eisenhart L. P. Enumeration of Potentials for Which One-Particle Schroedinger Equations Are Separable. Phys. Rev., 1948, vol. 74, No. 1.
15. Eisenhart L. P. Separation of the Variables in One-Particle Schroedinger Equation in 3-space. Proc. National Acad. Sci. USA, 1949, vol. 35, No. 7.
16. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. ИЛ, т. 1, стр. 474. 1958; т. 2, стр. 166, 1960.
17. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений плоского стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1962, № 4.
18. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений пространственного стационарного пучка заряженных частиц, ПМТФ, 1963, № 3.
19. Овчаров В. Т. О потенциальном движении заряженных частиц. Радиотехника и электроника, 1959, т. 6, вып. 10.