ПМТФ, № 2, 1965

О ПЕРЕНОСЕ МАССЫ В ЗВУКОВОМ ПОЛЕ

А. П. Бурдуков, В. Е. Накоряков

(Новосибирск)

Упругие колебания используются для интенсификации процессов химической технологии, подчиняющихся закономерностям диффузионной кинетики [1].

Известно также, что скорость горения жидкого и твердого топлива сильно меняется при возникновении в камерах сгорания акустических колебаний. Несмотря на широкое распространение колебательных процессов в технике, механизм переноса тепла и массы при колебаниях изучен очень слабо. Целью настоящей работы является исследование переноса массы от шара в поле звуковых волн.

Обозначения

ω — круговая частота колебаний;
λ — длина волны;
R — характерный размер осесимметричного тела;
s — амплитуда смещения частиц среды в плоской звуковой волне;
B — амплитуда скорости колебаний;
x, y — продольная и поперечная координаты;
u, v — продольная и поперечная составляющие скорости;
ν — кинематическая вязкость;
U — $A(x)\cos\omega t$ — скорость потенциального течения;
δ^+ — толщина динамического пограничного слоя;
δ^- — толщина диффузионного пограничного слоя;
m — безразмерная концентрация диффундирующего вещества;
m_* — концентрация диффундирующего вещества у поверхности испарения;
t — время;
D — коэффициент диффузии;
ρ — средняя плотность смеси;
erf — интеграл вероятности;
r — текущий радиус осесимметричного тела;
R — число Рейнольдса;
P — диффузионное число Прандтля;
$\langle\ \rangle$ — знак усреднения по времени;
N, N_d — числа Нусельта, построенные по радиусу и по диаметру;
$'$ — пульсирующая составляющая скорости концентрации;
$_0$ — стационарная составляющая скорости концентрации.

1. Рассматривается осесимметричное тело, помещенное в среду, возмущенную плоской звуковой волной. Основные допущения, принятые при решении задачи, состоят в следующем.

(а) Плотность смеси постоянна. Поле скоростей не зависит от поля концентраций.

(б) Вязкость газа и коэффициент диффузии не зависит от концентрационного поля.

(в) Тело является абсолютно жестким.

(г) Длина волны звуковых колебаний много больше размеров тела ($\lambda/R \gg 1$), это предположение позволяет считать жидкость у поверхности тела несжимаемой.

(д) Колебательное число Рейнольдса $\omega R^2/\nu$ достаточно велико, т. е. появляется возможность использовать уравнения пограничного слоя.

При указанных предположениях можно выделить два предельных случая — когда амплитуда смещения среды много больше ($s/R \gg 1$) и много меньше ($s/R \ll 1$) размера тела.

2. Рассмотрим гидродинамику процесса для случая, когда $s/R \ll 1$. Экспериментальные исследования [2,3] показали, что в этом случае в окрестности тела возникают стационарные вторичные течения. При приведенных выше допущениях уравнения движения, неразрывности и граничные условия в системе координат oxy (фиг. 1) запишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{\partial (ur)}{\partial x}+\frac{\partial (vr)}{\partial y}=0 \tag{2.1}$$

$$u=U=A(x)\cos\omega t \quad \text{при } y=\infty, \qquad u=v=0 \quad \text{при } y=0 \tag{2.2}$$

Для решения поставленной задачи можно использовать метод, примененный Г. Шлихтингом [4] при анализе периодического слоя на цилиндрическом теле. Представим поле скоростей в виде суммы $u=u'+u_0$.

На основании предположения $s/R\ll 1$ получим для пульсационной составляющей скорости уравнение и граничные условия

$$\frac{\partial u'}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}=\frac{\partial U}{\partial t}, \qquad \begin{array}{l} u'=5 \text{ при } y=0 \\ u'=U=A(x)\,\mathrm{cost}\,\omega t \text{ при } y=\infty \end{array} \tag{2.3}$$

Решение задачи (2.3) имеет вид:

$$u'=A(x)\left[\cos\omega t-e^{-\eta}\cos(\omega t-\eta)\right] \qquad (\eta=y\sqrt{\omega/2\nu}) \tag{2.4}$$

Нормальная составляющая скорости v' определится из уравнения неразрывности (2.2).

Для стационарной составляющей скорости получим уравнение

$$\nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=\left\langle u'\frac{\partial u'}{\partial x}\right\rangle+\left\langle v'\frac{\partial u'}{\partial y}\right\rangle-\left\langle U\frac{\partial U}{\partial x}\right\rangle$$

Вычислив осредненные члены, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2}=-\frac{A(x)}{\omega}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\left[e^{-\eta}(2+\eta)\cos\eta-e^{-\eta}(1-\eta)\sin\eta-e^{-2\eta}\right]-$$
$$-\frac{1}{r(x)}\frac{\partial r(x)}{\partial x}\frac{A^2(x)}{\omega}\left[\eta e^{-\eta}(\cos\eta+\sin\eta)-e^{-\eta}\sin\eta\right] \tag{2.5}$$

проинтегрировав которое при граничных условиях

$$u_0=0 \text{ при } \eta=0, \qquad \partial u_0/\partial\eta=0 \quad \text{при } \eta=\infty$$

получим

$$u_0=\frac{A(x)}{\omega}\frac{\partial A(x)}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\eta e^{-\eta}(\sin\eta-\cos\eta)+e^{-\eta}\left(2\sin\eta+\frac{1}{2}\cos\eta\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}e^{-2\eta}\right]-\frac{3}{4}\frac{A(x)}{\omega}\frac{\partial A(x)}{\partial x}-\frac{A^2(x)}{\omega r(x)}\frac{\partial r(x)}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}-\right.$$
$$\left.-\left[e^{-\eta}\left(\frac{\eta}{2}+1\right)\sin\eta+\frac{e^{-\eta}}{2}(1-\eta)\cos\eta\right]\right\} \tag{2.6}$$

Формула (2.6) для стационарной составляющей скорости отличается от решения Г. Шлихтинга наличием членов в фигурных скобках, учитывающих осесимметрию. Анализ формул (2.5) и (2.6) показывает, что толщина динамического пограничного слоя одинакова для стационарной и пульсирующей компонент и равна

$$\delta^+=\sqrt{2\nu/\omega}$$

За пределами динамического пограничного слоя продольная составляющая скорости определяется выражением

$$u=-\frac{3}{4}\frac{A(x)}{\omega}\frac{\partial A(x)}{\partial x}-\frac{1}{2\omega}\frac{A^2(x)}{r(x)}\frac{\partial r(x)}{\partial x}+A(x)\cos\omega t \tag{2.7}$$

Для сферы $r(x)=R\sin x/R$, $A(x)={}^3/_2 B\sin(x/R)$, поэтому при $y>\delta^+$ формула для u_0 принимает вид

$$u_0=-1.4B^2(\omega R)^{-1}\sin(2x/R) \tag{2.8}$$

Решение системы уравнений (2.1), (2.2) было получено ранее Рой [5], однако оно содержит ошибку вследствие неправильного выбора знака в формуле для поперечной составляющей скорости.

3. Найдем распределение концентраций диффундирующей компоненты у поверхности сферы при $s/R \ll 1$. Так как стационарные течения набегают на экватор сферы (формула (2.8)), необходимо написать уравнение диффузии в системе координат $o'xy$ (фиг. 1)

$$\frac{\partial m}{\partial t} + u\frac{\partial m}{\partial x} + v\frac{\partial m}{\partial y} = D\frac{\partial^2 m}{\partial y^2} \tag{3.1}$$

По аналогии с полем скоростей представим поле концентраций в виде

$$m = m_0 + m' \tag{3.2}$$

где m_0 — стационарная и m' — пульсирующая компоненты концентраций.

Подставив (3.2) в (3.1), усредним уравнение (3.1) почленно по правилам Рейнольдса

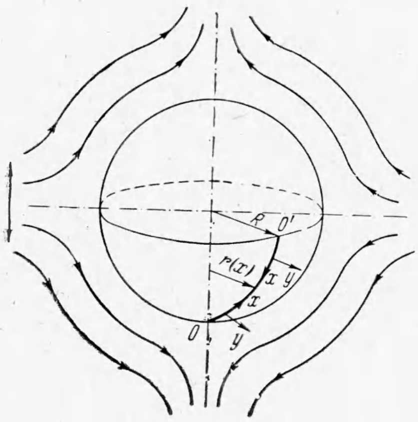
$$u_0\frac{\partial m_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial m_0}{\partial y} = D\frac{\partial^2 m_0}{\partial y^2} - \left\langle u'\frac{\partial m'}{\partial x}\right\rangle - \left\langle v'\frac{\partial m'}{\partial y}\right\rangle \tag{3.3}$$

Граничные условия к уравнению (3.3) имеют вид

$$m_0 = m^* \quad \text{при } y = 0, \qquad m_0 = 0 \quad \text{при } y = \infty$$

Для отношения толщин динамического и диффузионного пограничных слоев получим

$$\frac{\delta^+}{\delta^-} \approx \frac{s}{R}P^{1/2} \quad \text{при } n = \frac{1}{2}\left(\delta \approx \left(\frac{DR}{u_0}\right)^{1/2}\right)$$



Фиг. 1

При $P \leqslant 1$ и $s/R \ll 1$ динамический пограничный слой тонет в диффузионном; пренебрегая диффузионным сопротивлением динамического пограничного слоя, имеем в системе координат $o'xy$ (фиг. 1) (3.4)

$$u_0 = 1.4\frac{B^2}{\omega R}\sin\frac{2x}{R}, \qquad v_0 = -\int_0^y \frac{\partial(u_0 r)}{r\partial x}dy$$

$$u' = \frac{3}{2}B\sin\frac{x}{R}\cos\omega t$$

$$v' = \frac{3B}{R}\sin\frac{x}{R}\Big(y\cos\omega t - \tag{3.5}$$

$$- \frac{1}{2}\delta^+\cos\omega t - \frac{1}{2}\delta^+\sin\omega t\Big)$$

Текущий радиус сферы в новой системе координат меняется по закону $r = R\cos(x/R)$

Уравнение (3.3) содержит неизвестную величину пульсации концентрации m' в диффузионном слое. Для определения m' можно воспользоваться теорией Лайтхилла [6], согласно которой

$$m' = -\int u'\frac{\partial m_0}{\partial x}dt - \int v'\frac{\partial m_0}{\partial y}dt \qquad (y > \delta^+) \tag{3.6}$$

Используя (3.6) и (3.5), можно вычислить члены пульсационного переноса массы

$$\left\langle u'\frac{\partial m'}{\partial x}\right\rangle + \left\langle v'\frac{\partial m'}{\partial y}\right\rangle = -\frac{9}{4}\frac{B^2\delta^+}{\omega R^2}\left[\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{R} - \sin^2\frac{x}{R}\right]\frac{\partial m_0}{\partial y} \tag{3.7}$$

которые в δ^+ раз меньше членов конвективного переноса массы в уравнении (3.3). Пренебрегая членами пульсационного переноса массы, уравнение (3.3) можно привести к виду

$$\frac{\partial m_0}{\partial\theta} = D\frac{\partial^2 m_0}{\partial\psi^2} \qquad \left(\theta=\int\limits_0^x u_0 r^2 dx,\quad \psi=\int\limits_k^x u_0 r dy\right) \qquad (3.8)$$

с граничными условиями

$$m = m^* \text{ при } \psi=0,\quad m_0=0 \text{ при } \psi=\infty,\quad m_0=0 \text{ при } \psi=0,\ \theta=0 \qquad (3.9)$$

Решения уравнения (3.8), с граничным условием (3.9), известно

$$m_0 = m^*\left(1-\operatorname{erf}\frac{\psi}{2\sqrt{D\theta}}\right) \qquad (3.10)$$

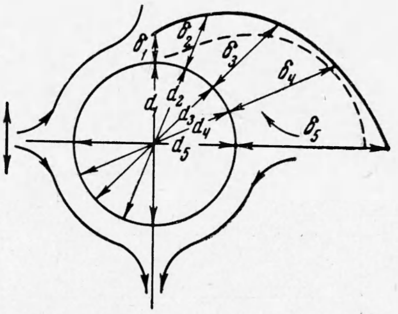
Безразмерный коэффициент массообмена согласно (3.10) определяется выражением (3.11)

$$N = 1.89\frac{B\Phi}{\sqrt{\omega D}}\left(\Phi=\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}},\quad \varphi=\frac{x}{R}\right)$$

При учете членов пульсационного переноса массы в уравнении (3.3)

$$N = 1.89\frac{B\Phi}{\sqrt{\omega D}}\frac{\exp[-(\alpha\Phi)^2]}{(\alpha\Phi)} \qquad (3.12)$$

$$(\alpha = 0.95\ S/RP)^{1/2}$$



Фиг. 2

Анализируя выражение (3.12), следует отметить, что увеличение интенсивности переноса массы за счет пульсаций скорости пренебрежимо мало, т. е. практически можно пользоваться формулой (3.11), которая в среднем для шара имеет вид

$$N_d = 1.3B/\sqrt{\omega D} \qquad (3.13)$$

4. Цель экспериментального исследования массообмена от шара в звуковом поле — установить зависимость безразмерного коэффициента массообмена от параметров звукового поля для случая, когда $s/R \ll 1$ и $\lambda/2\pi R \geqslant 1$ (при $\lambda/2\pi R < 1$ начинают сказываться эффекты второго порядка — отражение звуковой волны от поверхности тела, образование «звуковой тени» и т. д.). Опыты проводились с шариками камфоры, испаряющимися в поле стоячих звуковых волн частотой 11.5 и 18 *кгц* при интенсивности колебаний от 150 до 163 *дб* (0.1—2.15 *вт/см*^{2}). Источник звука — электродинамический излучатель, позволяющий получать в газовой среде гармонические колебания строго фиксированной частоты, определяемой геометрическими размерами излучателя.

Для исключения влияния пористости материала шарики изготавливались помещением шарообразной металлической подложки на короткое время в пары кипящей камфоры. У приготовленных таким способом образцов диаметром 3,5,6 и 10 *мм* толщина поверхностного слоя камфоры составляла 0.1—0.2 *мм*. При рассмотрении поверхности образцов под микроскопом видимых трещин и пор не наблюдалось.

Для выяснения роли вторичных течений при массообмене были проведены опыты по определению локальных коэффициентов массообмена. Покрытый камфорой шарик, припаянный к специальной держалке, устанавливался на предметный столик горизонтального компаратора ИЗА-2, работающего с окулярным винтовым микрометром МОВ-1-15 (общая погрешность при измерении линейного размера составляет 2—3 *мк*).

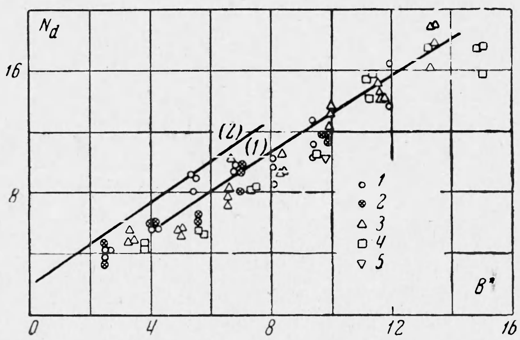
Диаметр шара измерялся в пяти сечениях d_1 — d_5 (фиг. 2) до и после испарения образца в звуковом поле. На фиг. 2 приведены результаты исследования локальных коэффициентов массообмена от шара. Из рассмотрения кривой, характеризующей изменение диаметра шара по поверхности, видно, что «снос» максимален в точках поверхности шара, являющихся лобовыми для набегающих вторичных течений, и минимален там, где течения отходят от поверхности испарения. Пунктирная линия, построенная по формуле (3.11), достаточно хорошо согласуется с экспериментальной зависимостью (сплошная линия). Таким образом, стационарные вторичные течения являются, по-видимому, основным фактором, определяющим интенсивность переноса от поверхности сферы в звуковом поле. Опыты по определению суммарных коэффициентов массообмена проводились по весовой методике. За поверхность испарения принималась внешняя геометрическая поверхность шара; его диаметр замерялся на компараторе.

Интенсивность звуковых колебаний определялась при помощи акустического зонда АЗ-2, работающего в комплекте с вольтметром ВЗ-2А и осциллографом.

Сферический титанат (бариевый датчик акустического зонда) и покрытый камфорой шарик на державке устанавливались над излучателем звука в специальном суппорте, позволяющем вводить шарик в пучность скорости звуковой волны при замеренной интенсивности колебаний.

Изменение веса шариков определялось взвешиванием на аналитических весах АДВ-200, производимым до и после помещения образцов в звуковое поле.

Температура воздуха у поверхности испарения замерялась хромель-копелевой термопарой. Значение коэффициента диффузии паров камфоры в воздухе и давления ее насыщения паров при температуре опыта принимались согласно [7,8].



Фиг. 3

На фиг. 3 представлены результаты экспериментов, обработанные в виде зависимости диффузионного критерия Нуссельта N_D от комплекса $B^* = (B^2/\omega D)^{1/2}$, представляющего собой критерий Пекле, построенный по скорости вторичных течений. Здесь же нанесены результаты теоретического расчета: линия (1) проведена по формуле (3.13); линия (2) — по формуле $N_d = 2 + 1.3$ B*; экспериментальные данные соответствуют значениям параметров f (кгц) и d (мм): точки *1* — (18,6); *2* — (18, 3.5); *3* — (11.5, 10); *4* — (11.5, 6); *5* — (11.5, 3.5).

Как видно из графика, при B* $>$ 3 безразмерный коэффициент массообмена может быть определен по формуле (3.13), в области же $(B)^{1/2} < 3$ расчетная формула, по-видимому, должна переходить в $N_d = 2 + 1.3$ B*

Таким образом, в звуковом поле при $s/R < 1$ и $^1/_2\lambda/\pi R > 1$ безразмерный коэффициент массообмена от шара не зависит от размера сферы, увеличивается с ростом интенсивности звука и обратно пропорционален корню из частоты звуковых колебаний.

5. Случай, когда $s/R \gg 1$, реализуется всегда в камерах сгорания пульсирующего типа. По данным Рейнста [9], амплитуда смещения частиц среды равна 0,5—1 *м*, т. е. безусловно во много раз больше размера частиц сжигаемой или газифицируемой пыли. Процесс массообмена в этом случае можно считать квазистационарным. Соотношения для массообмена, полученные для стационарного режима, в каждый момент времени справедливы и в рассматриваемом случае. Если скорость среды меняется по гармоническому закону, то из формулы Эккерта $N_d = 0.37\, R_d^{0.6} P^{1/3}$ (где R_d — число Рейнольдса [10] получим в среднем по времени

$$N_d = 0.259 P^{1/3} (Bd/\nu)^{0.6}$$

В заключение авторы благодарят С. С. Кутателадзе и И. А. Яворского, под руководством которых выполнена эта работа.

Поступила 23 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинстлинг А. М., Баром А. А. Ультразвук в процессах химической технологии. Госхимиздат, 1960.
2. Andrade E. N. On the circulations caused by vibration of air in a tube. Proc. Roy. Soc. A, 1931, vol. 134, p. 363.
3. Holstmark J., Johnsen S., Sicceland T., Skavlem S. Boundary layer flov near a cylyndrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid. J. Acoust. Soc. America, 1954, vol. 27, p. 102.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
5. Roy D. Non steady periodic boundary layer. Z. angew. Math. und Phys., 1961, vol. 12, S. 363.
6. Lighthill. The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity. Proc., Roy. Soc. A, 1954, vol. 224, p. 1.
7. Сб. «Физико-химические свойства индивидуальных углеводородов», под ред. Тимофеева М. Р. Госхимиздат, 1953.
8. Gililand. Diffusion coefficients in Gaseous streams. Industr. and Engng Chem., 1934, vol. 26.
9. Reynst Pulsating combustion chambers. Oil. Engine, 1953, vol. XX, № 238.
10. Эккерт Р. и Дрэйк Р. М. Теория тепла и массообмена. Госэнергоиздат, 1961.