

## ЛИТЕРАТУРА

1. McDonald P. E., Seiffert S. L., Martinson Z. R. et al. Assessment of light water reactor fuel damage during a reactivity initiated accident // CSNI Specialist's meeting on water reactor fuel safety and fission product release in off-normal and accident conditions, Espoo, Finland, 1980.
2. Burns III R. D., Scott J. H. Statistical analysis of 7 TREAT experiments // Trans. ANS.— 1978.— V. 30.— P. 463.
3. Tsuruta T., Oshiai M., Saito S. Fuel fragmentation and mechanical energy conversion ratio at rapid deposition of high energy in LWR fuels // J. Nucl. Sci. and Technol.— 1985.— V. 22, N 9.
4. Oshiai M. WTRGDA—a computer program for the transient analysis of waterlogged fuel rods under the RIA conditions // Nucl. Eng. and Design.— 1981.— V. 66, N 2.
5. Tansawa S., Fujishiro T. Effects of waterlogged fuel rod rupture on adjacent fuel rods and channel box under RIA conditions // J. Nucl. Sci. and Technol.— 1987.— V. 24, N 1.
6. Fujishiro T., Ishijima K. Recent progress of research on the reactivity initiated accident in Japan // Working Material of the 2nd Techn. Committee Meet. on Safety Aspects of Reactivity Initiated Accidents, Vienna, Austria, 1990.
7. Егорова Л. А., Павшук В. А. Анализ результатов ампульных динамических испытаний модельных твэлов типа ВВЭР на реакторах ИГР и «ГИДРА»: Отчет / АН СССР, Сиб. отд-ние, ИАЭ; Инв. № 30/694186.— Новосибирск, 1986.
8. Большаков В. В., Сегаль М. Д. Моделирование аварийных процессов в ядерных реакторах, обусловленных неконтролируемым введением положительной реактивности: Отчет / АН СССР, Сиб. отд-ние, ИАЭ, Инв. № 37/1-419-89.— Новосибирск, 1989.
9. Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций.— М.: Мир, 1972.

г. Москва

Поступила 16/VI 1992 г.,  
в окончательном варианте — 23/XII 1992 г.

УДК 539.3

*Л. А. Фильштинский, Е. М. Кравец, В. А. Хворост*

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНАМИ В ПРИСУТСТВИИ СИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При помещении в магнитное поле ферромагнитного тела вследствие намагничиваемости материала в теле появляются массовые и поверхностные силы. Под действием этих сил в среде возникают деформации, изменяющие исходное магнитное поле.

В данной работе рассматривается граничная задача магнитоупругости для магнитомягкой ферромагнитной среды, ослабленной криволинейными трещинами. Предполагается, что в среде имеется постоянное магнитное поле  $H_0$ , на берегах разрезов задаются нормальные и касательные усилия. Для одиночной прямолинейной трещины подобная задача рассматривалась в [1, 2].

1. В линеаризованной постановке [1, 3] полная система соотношений магнитоупругости для магнитомягкого кусочно-однородного ферромагнетика включает в себя уравнения состояния

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad \mathbf{b} = \mu_0 \mu_r \mathbf{h}, \quad \mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad \mathbf{m} = \chi \mathbf{h}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m} \end{aligned}$$

и дифференциальные уравнения магнитоупругости

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{S} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \\ \mathbf{S} &= \mathbf{T} + \mathbf{t}, \quad t_{ij} = \sigma_{ij} + \mu_0 \chi H_{0i} H_{0j} + \mu_0 \chi (H_{0i} h_j + H_{0j} h_i), \end{aligned}$$

© Л. А. Фильштинский, Е. М. Кравец, В. А. Хворост, 1993

$$T_{ij} = \mu_0 (\mu_r H_{0i} H_{0j} - 0,5 \delta_{ij} H_{0k} H_{0k}) + \mu_0 [\mu_r (H_{0i} h_j + H_{0j} h_i) - \delta_{ij} H_{0k} h_k],$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \partial_k u_k + \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad \partial_k = \partial / \partial x_k.$$

Граничные условия на линии раздела сред имеют вид

$$(1.3) \quad n_1 (b_1 - b_1^{(e)}) + n_2 (b_2 - b_2^{(e)}) = \mu_0 \chi H_0 \cos \psi \cdot n_m \partial u_m / \partial s,$$

$$-n_2 (h_1 - h_1^{(e)}) + n_1 (h_2 - h_2^{(e)}) = \chi H_0 \sin \psi \cdot n_m \partial u_m / \partial s,$$

$$n_1 (S_{1j} - S_{1j}^{(e)}) + n_2 (S_{2j} - S_{2j}^{(e)}) = 0.$$

В соотношениях (1.1)–(1.3)  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — абсолютная магнитная постоянная;  $\mu_r = 1 + \chi$  — относительная магнитная проницаемость среды;  $\mathbf{B}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0$  — магнитная индукция, напряженность исходного магнитного поля и намагниченность материала;  $\mathbf{b}, \mathbf{h}, \mathbf{m}$  — флуктуации этих величин;  $u_k$  — упругие перемещения среды;  $\lambda, \mu$  — постоянные Ламе;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\varepsilon_{ijk}$  — символ Леви — Чивита.

Пусть неограниченная магнитоупругая среда, отнесенная к координатной системе  $x_1 O x_2$ , находится в сильном магнитном поле  $\mathbf{H}_0 = (0, H_0, 0)$ . Будем предполагать, что в среде имеются трещины, которые в недеформированном состоянии ассоциируются с математическими разрезами  $L_j$  ( $j = 1, k$ ). На берегах  $L_j$  зададим нормальную и касательную нагрузки  $N$  и  $T$ , непрерывно продолжимые с одного берега на другой. В этой постановке рассматриваемая плоская задача магнитоупругости сводится к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla^2 u_j + \sigma \partial_j \theta + \frac{2}{\mu} \chi \mu_0 H_0 \partial_2 h_j = 0 \quad (j = 1, 2),$$

$$\nabla^2 U = 0, \quad h_j = \partial_j U, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \sigma = (1 - 2\nu)^{-1}.$$

Решения этой системы можно выразить через три произвольные аналитические функции по формулам

$$2\mu (u_1 + iu_2) = \kappa \varphi(z) - zW(z) - \overline{\varphi_1(\bar{z})} - C_0 f(z),$$

$$t_{11} + t_{22} = 2 \operatorname{Re} \Phi(z) + 2 \operatorname{Re} W(z) + C_0 H_0,$$

$$t_{22} - t_{11} + 2it_{12} = 2\bar{z}W'(z) + 2W_1(z) + C_0,$$

$$h_1 - ih_2 = iF(z), \quad F(z) = f'(z), \quad \Phi(z) = \varphi'(z),$$

$$\Phi_1(z) = \varphi_1(z), \quad \kappa = 3 - 4\nu, \quad W(z) = \Phi(z) - C_0 F(z),$$

$$W_1(z) = \Phi_1(z) - C_0 F(z), \quad C_0 = \chi \mu_0 H_0.$$

Соответственно представляются граничные условия на берегах разрезов. С учетом (1.3) их можно записать в комплексной форме

$$(1.4) \quad 2 \operatorname{Re} W(z) - \exp(2i\psi) \{ \bar{\zeta} W'(\zeta) + W_1(\zeta) \} + C_0 \Lambda^*(\zeta) = R(\zeta),$$

$$\Lambda^*(\zeta) = \operatorname{Re} \{ (1 - i\chi n_2 \exp(i\psi)) F(\zeta) \},$$

$$R(\zeta) = N - iT + C_0 H_0 (\chi n_2^2 - 1 + \exp(2i\psi)) / 2,$$

$$n_m \partial u_m / \partial s = \operatorname{Im} \{ -\kappa \Phi(z) - W(z) + C_0 F(z) +$$

$$+ \exp(2i\psi) (\bar{z}W'(z) + \Phi_1(z)) \} / 2\mu, \quad \zeta \in L_j.$$

2. Для решения сформулированной граничной задачи введем интегральные представления аналитических функций:

$$F(z) = \frac{C_0}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad W(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

$$W_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\zeta p(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{q}(\zeta)}{\zeta - z} d\bar{\zeta}.$$

Подстановка предельных значений этих функций в граничные условия (1.4) приводит к системе сингулярных интегральных уравнений относительно скачков перемещений и производных от них:

$$(2.1) \quad \int_L \{U(\zeta) dH_{11}(\zeta, \zeta_0) + V(\zeta) dH_{12}(\zeta, \zeta_0)\} = N_1(\zeta_0),$$

$$\int_L \{U(\zeta) dH_{21}(\zeta, \zeta_0) + V(\zeta) dH_{22}(\zeta, \zeta_0)\} = N_2(\zeta_0).$$

Здесь

$$dH_{11} = \text{Im} \left\{ [-h_1(\psi)(h_4(\psi_0)(\kappa + 1) + h_3(\psi_0) \exp(2i(\psi - \alpha_0))/2) + \right.$$

$$\left. + h_2(\psi)h_3(\psi_0) \exp(2i(\psi - \psi_0))/2 - i\chi^2\mu_0e_0^2(\kappa + 1)\delta(\psi)h_5(\psi_0)/4] \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \right\};$$

$$dH_{12} = \text{Im} \left\{ [1 + \chi^2(\kappa + 1)e_0^2n_1^0n_2^0/4 + \right.$$

$$\left. + h_3(\psi_0)(\exp(2i(\psi_0 - \alpha_0)) - \exp(2i(\psi_0 - \psi)))/2] \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \right\};$$

$$dH_{21} = \text{Re} \left\{ [h_6(\psi_0)(h_1(\psi) \exp(2i(\psi_0 - \alpha_0)) - h_2(\psi) \exp(2i(\psi_0 - \psi)))/2 + \right.$$

$$\left. + \chi(1 + \chi \sin^2 \psi_0)e_0^2(\kappa + 1)h(\psi, \psi_0)/4] \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \right\};$$

$$dH_{22} = \text{Re} \left\{ [h_6(\psi_0)(\exp(2i(\psi_0 - \psi)) - \exp(2i(\psi_0 - \alpha_0)))/2 - \right.$$

$$\left. - \chi(\kappa + 1)e_0^2(1 + \chi \sin^2 \psi_0)/4] \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \right\};$$

$$N_1(\zeta) = (\kappa + 1)\pi [N/\mu + \chi e_0^2(\chi n_2^2 + \cos 2\psi - 1)/2]/2;$$

$$N_2(\zeta) = (\kappa + 1)\pi [-T/\mu + \chi e_0^2 \sin 2\psi/2]/2;$$

$$h_1(\psi) = i + e_0^2\Lambda(\psi); \quad h_2(\psi) = e_0^2\overline{\Lambda_1(\psi)} - i; \quad h_3(\psi) = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + 2h_4(\psi);$$

$$h_4(\psi) = \frac{1}{\kappa + 1} + \chi^2 e_0^2 n_1 n_2 / 4;$$

$$h_5(\psi) = \overline{\alpha(\psi)} + \chi^2 e_0^2 n_1 n_2 (1 - \kappa + \exp(2i\psi))/2;$$

$$h_6(\psi) = 1 + \chi e_0^2 (1 + \chi \sin^2 \psi)/2;$$

$$h(\psi, \psi_0) = h_1(\psi) + \chi^2 \mu_0 e_0^2 \delta(\psi) (1 - \kappa + \exp(2i\psi_0))/2;$$

$$\Lambda(\psi) = \chi \{i + \chi [in_1(2 - \kappa)/\mu_r - n_2(\kappa + 1)] \exp(-i\psi)\}/2;$$

$$\Lambda_1(\psi) = \chi \{-\kappa i + \chi in_1(2 - \kappa) \exp(-i\psi)/\mu_r\}/2;$$

$$\alpha(\psi) = \chi n_2 \exp(-i\psi) - i;$$

$$e_0^2 = \mu_0 H_0^2 / \mu; \quad \zeta, \zeta_0 \in L_j.$$

Систему (2.1) необходимо рассматривать совместно с дополнительными условиями

$$(2.2) \quad \int_{L_j} (U + iV) d\zeta = 0 \quad (j = \overline{1, k}).$$

Для численного решения системы уравнений (2.1), (2.2) удобно провести параметризацию контура  $L_j$  (ниже индекс  $j$  опускаем):  $\zeta = \zeta(\beta)$ ,  $\zeta_0 = \zeta(\beta_0)$ ,  $-1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1$ . В соответствии с этим представим

$$U(\zeta) = \frac{\Omega(\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \bar{V}(\zeta) = \frac{\Omega^*(\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad a = \zeta(-1), \quad b = \zeta(1).$$

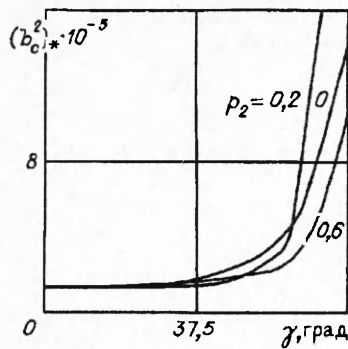


Рис. 1

Применяя известные квадратурные формулы [4], сводим уравнения (2.1), (2.2) к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функций  $\Omega$  и  $\Omega^*$  в чебышевских узлах.

Коэффициенты интенсивности напряжений определяются обычным образом и имеют вид

$$K_I - iK_{II} = \pm \mu \sqrt{s'} (\pm 1) \left\{ -2 \frac{\Omega - i\Omega^*}{x+1} + \chi e_0^2 \Omega \left[ \frac{x-1}{x+1} + \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^* n_i n_j \right] / 2 \right\},$$

$$a_{11}^* = -1 - \frac{(2-x)2\chi}{(x+1)(\chi+1)}, \quad a_{22}^* = -(2\chi+1),$$

$$a_{12}^* = a_{21}^* = i\chi [1 - (2-x)/(\chi+1)].$$

3. В качестве первого примера рассмотрим среду, ослабленную одной параболической трещиной  $x_1 = p_1 \beta \cos \gamma - p_2 \beta^2 \sin \gamma$ ,  $x_2 = p_1 \beta^2 \sin \gamma + p_2 \beta^2 \cos \gamma$  ( $|\beta| \leq 1$ ) ( $\gamma$  — угол поворота трещины относительно системы координат  $x_1 O x_2$ ). Из [1, 2] следует, что существуют критические значения параметра  $b_c^2 = b_0^2 / \mu_0 \mu$ , при которых напряжения в среде становятся бесконечно большими. Для прямой трещины, фронт которой перпендикулярен направлению исходного магнитного поля,  $b_c^2 = 1,33 \cdot 10^{-5}$  (при  $\nu = 0,25$  и  $\chi = 10^5$ ). Для другой ориентации трещины по отношению к исходному магнитному полю критические значения будут иными. На рис. 1 приведены графики критических значений  $b_c^2$  в зависимости от ориентации трещины  $\gamma$  для различных значений кривизны параболической трещины. Кривые, характеризующие зависимость коэффициента интенсивности деформаций  $K_I$  от параметра  $b_c^2$ , для различной ориентации прямой трещины приведены на рис. 2.

Рассмотрим ситуацию, когда среда ослаблена двумя прямолинейными трещинами, одна из которых занимает отрезок  $[-l; l] = [-1; 1]$  оси  $x_1$ , а вторая повернута к ней на угол  $\gamma$ . Расстояние между центрами обеих трещин  $d = 1, 2, 3$ , длина второй трещины  $2l_1 = 2$ . На рис. 3 представлены графики критических значений  $b_c^2$  в зависимости от угла  $\gamma$  между трещинами для различных расстояний  $d$  между ними. Видно, что в том случае, когда вторая трещина перпендикулярна первой, значение  $b_c^2$  такое же, как для среды с одной трещиной, перпендикулярной исходному магнитному полю. Когда обе трещины параллельны,  $b_c^2$  монотонно возрастает с увеличением расстояния между ними.

Из анализа результатов видно, что существенное влияние на равновесие ферромагнитной среды с прямолинейной трещиной оказывает исходное маг-

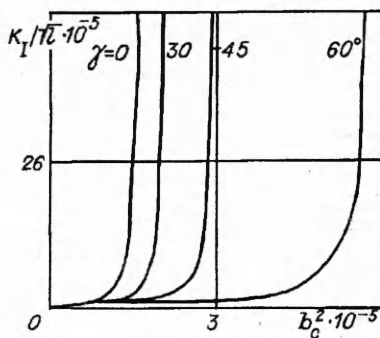


Рис. 2

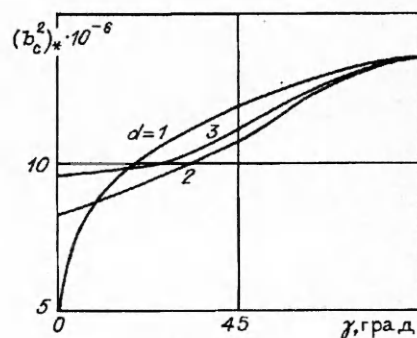


Рис. 3

нитное поле  $B_0$ , уровень которого близок к критическому значению. Так, для горизонтальной трещины  $B_0 \approx 1,2$  Тл. В общем случае критические значения уровней исходного магнитного поля существенно зависят от взаимного расположения дефектов и их конфигурации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Shindo Y. The linear magnetoelastic problem for a soft ferromagnetic elastic solid with a finite crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1977.— N 44.
2. Асанян Д. Д., Асланян А. А., Багдасарян Г. Е. О концентрациях упругих напряжений и индуцированного магнитного поля возле трещины, обусловленных внешним магнитным полем // Изв. АН АрмССР. Механика.— 1988.— Т. XLI, № 2.
3. Pao Y.-H., Yeh C.-S. A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids // Int. J. Engng Sci.— 1973.— N 1.
4. Erdogan F., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations // Quart. Appl. Math.— 1972.— N 4.

г. Сумы

Поступила 27/VII 1992 г.,  
в окончательном варианте — 6/1 1993 г.

#### ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В № 4 1993 г. замечены следующие опечатки:

Страница	Рисунок, строка	Напечатано	Следует читать
125	Рис. 3 и 4	$p \cdot 10^3$ , МПа	$p \cdot 10^3$
125	17-я снизу	... напряжений.	... напряжений в мегапаскалях.
127	7-я сверху	... напряжений...	... напряжений в мегапаскалях...