По методу Ланцоша найдены следующие значения коэффициентов: $A = 12.3$ *ат*, $B = 23$ *ат*, $\alpha = 9.2 \cdot 10^{-6}$ *сек*$^{-1}$, $\beta = 5.09 \cdot 10^{-4}$ *сек*$^{-1}$. Правильность определений подтверждается сравнением фактических значений Δp_1 (*ат*) со значениями Δp_2 (*ат*), вычисленными по формуле (3.1) при указанных величинах коэффициентов

$t =$	0	12.5	25	50	75	100
$\Delta p_1 =$	67	37	27.2	16.8	14.2	12.6
$\Delta p_2 =$	35.7	27.92	22.88	16.95	14.14	12.71
$t =$	125	150	175	200	225	250
$\Delta p_1 =$	11.9	11.2	11.1	11.0	10.7	10.6
$\Delta p_2 =$	11.97	11.57	11.27	11.07	10.77	10.61

Совпадение фактических данных с расчетными для $t \geqslant 50$ *мин* вполне удовлетворительное. Следовательно, в данном случае вторая фаза фильтрации начинается примерно с этого времени.

Из системы (3.3) находим $\theta = 0.344$, $\varepsilon = 0.085$, $\tau = 6.6 \cdot 10^{-4}$ *сек.*

Из формул (3.4), (3.5) имеем

$$kh / \mu = 29.6 \text{ дарси·см/спз}, \quad r_k^2 = 2 \cdot 10^5 \varkappa \text{ сек.}$$

В заключение отметим, что формулу вида (3.1) впервые предложил использовать для обработки кривых восстановления давления скважин пористо-трещиноватого коллектора Поллард [3], который, однако, не смог дать своей рекомендации строгого обоснования, ввиду чего физический смысл коэффициентов A, B, α и β не был им расшифрован.

Поступила 23 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
2. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
3. Pollard P. Evaluation of acid treatments from pressure build-up analysis. J. Petrol. Technol., 1959, No. 1.
4. Warren J. E., Root P. J. The behaviors of naturally fractured reservoirs. Soc. Petrol. Engrs. J., 1963, vol. 3, No. 3.
5. Odeh A. S. Unsteadg-state behavior of naturally fractured reservoirs. Soc. Petrol. Engrs. J., 1965, vol. 5, No. 1.
6. Авакян Э. А. Некоторые приближенные решения задачи фильтрации в трещиновато-пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
7. Чарный И. А. Определение некоторых параметров пластов при помощи кривых восстановления забойного давления. Нефт. хоз-во, 1955, № 3.
8. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
9. Редькин И. И., Новиков А. А., Кондратьев А. С., Минкин С. Г. Опыт промышленной закачки сточных вод в продуктивные пласты карбона и девона месторождений Самарской Луки. Нефтепромысловое дело, 1967, № 10.

ОБ УТЕЧКЕ ЖИДКОСТИ ИЗ НЕОДНОРОДНОГО ПО ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРИСТОГО ПЛАСТА ЧЕРЕЗ СЛАБОПРОНИЦАЕМУЮ ПЕРЕМЫЧКУ

В. Д. Алферов

(Томск)

Рассматривается утечка жидкости при напорной фильтрации в неоднородном по проницаемости пористом пласте, отделенном от вышележащего слабопроницаемой перемычкой; горизонтальная составляющая скорости фильтрации в перемычке пренебрегается (схема В. Н. Щелкачева и М. А. Гусейн-заде). Проницаемость пористого пласта аппроксимируется ограниченной непрерывной функцией

$$k = k(z) \tag{0.1}$$

вертикальной координаты z.

В плоской и осесимметричной постановках построено аналитическое решение задачи в виде рядов по регулярным функциям, которые для конкретно заданной проницаемости легко табулируются. Приведен численный пример для двух случаев задания проницаемости $k(z)$.

1. Пусть жидкость через прямолинейную галерею нагнетательных скважин закачивается в изотропный пористый пласт с указанной неоднородностью. Будем предполагать давление над перемычкой постоянным, подошву пласта непроницаемой, а напорную фильтрацию установившейся, подчиняющейся линейному закону Дарси. Тогда задача будет описываться уравнением [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(z)\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(z)\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0 \qquad (1.1)$$

и следующими граничными условиями:

$$p=p^*,\ x=0; \qquad p=p^\circ, \quad x=L; \qquad \frac{\partial p}{\partial z}=0, \quad z=0 \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{k_1}{hk(H)}(p-p_0)=0, \qquad z=H$$

Введены обозначения: p — пластовое давление, p^* — давление вдоль нагнетательной галереи, p° — давление на границе $x=L$ зоны влияния галереи, k_1 — проницаемость перемычки, h — мощность перемычки, H — мощность пласта, p_0 — давление над перемычкой.

Уравнение (1.1) представим в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+N(z)\frac{\partial p}{\partial z}=0, \qquad N(z)=\frac{d}{dz}\ln k(z) \qquad (1.3)$$

и решение последнего будем искать при помощи ряда [2]

$$p=p^*-\frac{p^*-p^\circ}{L}x+\sum_{m=0}^{\infty}G_m(x,z)g_m(z) \qquad (1.4)$$

где на функции $G_m(x, z)$ наложены ограничения вида

$$\frac{\partial^2 G_m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G_m}{\partial z^2}=0 \quad (m=0,1,2,\ldots), \qquad \frac{\partial G_m}{\partial z}=G_{m-1} \quad (m=1,2,\ldots) \qquad (1.5)$$

С учетом этих условий ряд (1.4) будет решением уравнения (1.3), если для функций $g_m(z)$ будут выполняться следующие дифференциальные рекуррентные соотношения:

$$2g'_0+Ng_0=0, \qquad 2g_m'+Ng_m=-(g''_{m-1}+Ng_{m-1}') \quad (m=1,2,\ldots) \qquad (1.6)$$

При нахождении $g_m(z)$ ограничимся частными решениями системы (1.6), т. е. выберем класс частных решений уравнения (1.3), зависящий лишь от одной гармонической функции $G_0(x, z)$; все последующие функции $G_m(x, z)$ выражаются через предыдущие и в конечном результате через $G_0(x, z)$.

Решая уравнения (1.6), находим

$$g_0=k^{-1/2}(z), \qquad g_m=-\frac{1}{2\sqrt{k(z)}}\int k^{-1/2}(z)(k(z)g_{m-1}')'\,dz \quad (m=1,2,\ldots) \qquad (1.7)$$

Интегралы (1.7) можно затабулировать для конкретно заданной проницаемости пористого пласта.

Учитывая, что функции $G_m(x, z)$ должны удовлетворять нулевым граничным условиям на вертикальных границах области фильтрации, гармоническую функцию $G_0(x, z)$ возьмем в виде

$$G_0(x,z)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n e^{\lambda_n z}+b_n e^{-\lambda_n z})\sin\lambda_n x, \qquad \lambda_n=n\pi/L \qquad (1.8)$$

Из рекуррентного соотношения (1.5) для $G_m(x, z)$ получим

$$G_m(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{\lambda_n z} + (-1)^m b_n e^{-\lambda_n z}) \lambda_n^{-m} \sin \lambda_n x \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{1.9}$$

Введем обозначения

$$\alpha_n(z) = e^{\lambda_n z} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_n^{-m} g_m(z), \qquad \beta_n(z) = e^{-\lambda_n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \lambda_n^{-m} g_m(z) \tag{1.10}$$

В этих обозначениях ряд (1.4) можно записать в виде

$$p = p^* - \frac{p^* - p^\circ}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n(z) + b_n \beta_n(z)) \sin \lambda_n x \tag{1.11}$$

Подчиняя решение (1.11) граничным условиям на кровле и подошве пласта, получаем следующую систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_n и b_n:

$$\begin{gathered} a_n \alpha_n'(0) + b_n \beta_n'(0) = 0 \\ a_n \alpha_n'(H) + b_n \beta_n'(H) + \alpha (a_n \alpha_n(H) + b_n \beta_n(H)) = c_n \end{gathered} \tag{1.12}$$

$$c_n = \frac{2\alpha}{\lambda_n L} [(p^* - p_0) + (-1)^{n-1}(p^\circ - p_0)], \qquad \alpha = \frac{k_1}{hk(H)} \tag{1.13}$$

Из системы уравнений (1.12) находим

$$a_n = \frac{\beta_n'(0) c_n}{\alpha_n'(0)(\beta_n'(H) - \alpha\beta_n(H)) - \beta_n'(0)(\alpha_n'(H) + \alpha\alpha_n(H))}, \qquad b_n = \frac{\alpha_n'(0) c_n a_n}{\beta_n'(0)} \tag{1.14}$$

Дебит нагнетательной галереи, расход на контуре $x = L$ и относительную утечку, приходящиеся на единицу ширины пласта, можно определить теперь равенствами

$$Q_0 = \int_0^H k(z) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0} dz, \qquad Q_L = \int_0^H k(z) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=L} dz, \qquad \eta = \frac{Q_0 - Q_L}{Q_0} \tag{1.15}$$

Для двух частных случаев задания проницаемости в виде функций

$$k^{(1)}(z) = k_0 (1 + 0.2z)^2, \quad k^{(2)}(z) = k_0 (5 - 0.2z)^2$$

проведен численный расчет по следующим исходным данным:

$$k_0 = 30\ \text{мд}, \ k_1 = 0.001\ \text{мд}, \ h = 10\ \text{м}, \ H = 20\ \text{м}, \ L = 5000\ \text{м}$$

$$p^* = 180\ \text{атм}, \quad p^\circ = p_0 = 100\ \text{атм}$$

Для относительной утечки в первом и во втором случаях соответственно расчеты показали $\eta^{(1)} = 0.073$ и $\eta^{(2)} = 0.251$, причем в случае точного среднего значения проницаемости (оно одинаково в обоих случаях) $\eta = 0.144$.

2. При осесимметричном движении жидкости от центральной нагнетательной скважины пластовое давление будет определяться следующей краевой задачей:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + N(z)\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{2.1}$$

$$p = p^* \ (r = r_0), \qquad p = p^\circ \ (r = R), \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (z = 0)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{k_1}{hk(H)}(p - p_0) = 0 \ (z = H) \tag{2.2}$$

Здесь r_0, R — радиусы скважины и зоны влияния скважины; r, z — цилиндрические координаты.

Решение уравнения (2.1) представим в виде ряда

$$p = p^\circ + \frac{p^* - p^\circ}{\ln(r_0/R)} \ln\frac{r}{R} + \sum_{m=0}^{\infty} F_m(r, z) f_m(z) \tag{2.3}$$

где $F_m(r, z)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial^2 F_m}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_m}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_m}{\partial r}=0 \quad (m=0, 1, 2, \ldots), \qquad \frac{\partial F_m}{\partial z}=F_{m-1} \quad (m=1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

а для функций $f_m(z)$ справедлива рекуррентная зависимость (1.7).

Функцию $F_0(r, z)$ возьмем в виде

$$F_0(r, z)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n e^{\lambda_n z}+b_n e^{-\lambda_n z})\,U_n(\lambda_n r) \tag{2.5}$$

$$U_n(\lambda_n r)=J_0(\lambda_n r)\,Y_0(\lambda_n r_0)-J_0(\lambda_n r_0)\,Y_0(\lambda_n r) \tag{2.6}$$

где $J_0(\lambda_n r)$ и $Y_0(\lambda_n r)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно действительного аргумента, а λ_n будут корнями уравнения

$$J_0(\lambda_n R)\,Y_0(\lambda_n r_0)-J_0(\lambda_n r_0)\,Y_0(\lambda_n R)=0 \tag{2.7}$$

Пользуясь рекуррентным соотношением (2.4), для функций $F_m(r, z)$ получаем выражение

$$F_m(r, z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-m}(a_n e^{\lambda_n z}+(-1)^m b_n e^{-\lambda_n z})\,U_n(\lambda_n r) \tag{2.8}$$

Учитывая обозначения (1.10), решение (2.3) примет вид

$$p=p^\circ+\frac{p^*-p^\circ}{\ln(r_0/R)}\ln\frac{r}{R}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n(z)+b_n\beta_n(z))\,U_n(\lambda_n r) \tag{2.9}$$

Для определения коэффициентов a_n и b_n используем граничные условия на кровле и подошве пласта

$$a_n\alpha_n'(0)+b_n\beta_n'(0)=0 \tag{2.10}$$

$$a_n\alpha_n'(H)+b_n\beta_n'(H)+\alpha(a_n\alpha_n(H)+b_n\beta_n(H))=-c_n$$

где c_n — коэффициенты разложения функции

$$\psi(r)=\alpha\left(p^\circ-p^*+\frac{p^*-p^\circ}{\ln(r_0/R)}\ln\frac{r}{R}\right)$$

в ряд по ортогональным функциям $U_n(\lambda_n r)$.

Для дебита скважины, расхода на границе зоны влияния скважины и относительной утечки жидкости из пласта будем иметь

$$Q_0=2\pi r_0\int_0^H k(z)\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=r_0}dz, \qquad Q_R=2\pi R\int_0^H k(z)\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R}dz, \qquad \eta=\frac{Q_0-Q_R}{Q_0} \tag{2.11}$$

Численный расчет, проведенный при таких же значениях проницаемости, что и в плоской задаче, показал соответственно $\eta^{(1)}=0.08$, $\eta^{(2)}=0.294$ и $\eta=0.152$. За исходные данные были взяты $k_1=0.001$ *мд*, $h=10$ *м*, $H=20$ *м*, $r_0=0.15$ *м*, $R=1500$ *м*, $p^*=180$ *атм*, $p^\circ=p_0=100$ *атм*. Из рассмотренных примеров видно, что усреднение проницаемости по мощности пласта увеличивает относительную утечку через слабопроницаемую перемычку, если проницаемость $k(z)$ вблизи кровли пласта больше усредненного значения, и уменьшает утечку, когда проницаемость около кровли меньше проницаемости, усредненной по мощности пласта, причем относительная погрешность, получаемая при замене истинной проницаемости усредненной, может оказаться весьма значительной.

В заключение отметим, что из полученных решений при $k(z)=\text{const}$ следуют результаты [3] для однородного пласта.

Аналогично можно построить решение и в случае, когда проницаемость терпит разрыв непрерывности на N плоскостях $z=z_i$ $(i=1, 2, \ldots, N)$, а пористый пласт обладает постоянной анизотропией.

Поступила 23 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.— Л., Гостоптехиздат, 1949.
2. Бергман С. Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными. М., «Мир», 1964.
3. Гусейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородной среде. М., «Недра», 1965.