3. **Lambert J. D.** Trans. Faraday Soc., 1936, 32, 452.
4. **Lambert J. D.** Ibid., 1936, 32, 1584.
5. **Arthur J. R.** Ibid., 1951, 47, 164.
6. **Arthur J. R., Bowring J. R.** J. Chim. Phys., 1950, 47, 540.
7. **Bowring J. R., Crone H. G.** Ibid., 1950, 47, 543.
8. **Strickland-Constable R. F.** Trans. Faraday Soc., 1938, 34, 1074.
9. **Madley D. G., Stricland-Constable R. F.** Ibid., 1953, 49, 9, 1312.
10. **Watts H.** Ibid., 1958, 54, 93.
11. **Pascal P., Krieg, Declerck, Perier, François.** Mem. Poudres, 1953, 35, 335.
12. **Андреев К. К., Глазкова А. П.** Докл. АН СССР, 1952, 86, 4, 801.
13. **Глазкова А. П., Казарова Ю. А., Суслов А. В.** Archiwum termodynamiki i spalania, 1978, 9, 4, 591.
14. **Глазкова А. П., Савельев А. В., Казарова Ю. А.** Arch. Comb. 1982, 2, 1, 67.
15. **Глазкова А. П., Казарова Ю. А.** Хим. физика, 1982, 4, 553.
16. **Глазкова А. П.** ФГВ, 1966, 1, 1, 59.
17. **Ромоданова Л. Д., Мальцев В. М., Похил П. Ф.** ФГВ, 1971, 7, 3, 355.
18. **Глазкова А. П.** Катализ горения взрывчатых веществ.— М.: Наука, 1976.
19. **Глазкова А. П., Андреев О. К.** // Горение и взрыв.— М.: Наука, 1972.
20. **Глазкова А. П., Терешкин И. А.** ЖФХ, 1961, 35, 7, 1622.
21. **Андреев К. К.** Термическое разложение и горение взрывчатых веществ.— М.: Оборонгиз, 1957.
22. **Глазкова А. П., Боболев В. К.** Докл. АН СССР, 1971, 197, 4, 883.
23. **Solymosi F., Braun Gy.** Acta chimica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1967, 52 (1), 1.
24. **Баум Ф. А.** Трубочные пороха и дистанционные составы.— М.: Оборонгиз, 1940.

*Поступила в редакцию 14/IX 1987*

---

УДК 662.4

# ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

*Е. П. Костогоров, А. Н. Панин, Э. А. Штессель*

*(Черноголовка)*

Многие технологические процессы в промышленности протекают при температуре окружающей среды, изменяющейся по определенному закону. В связи с этим практическое применение получила теория теплового взрыва в динамических условиях. В [1, 2] рассматривается тепловое самовоспламенение только при линейном нагреве, что сужает рамки использования этой теории для действующих промышленных аппаратов.

В данной работе проведен анализ теплового взрыва для модели бесконечного цилиндра при экспоненциальном изменении температуры на внешней границе.

Рассмотрим задачу о нагреве инертного бесконечного цилиндра радиусом $r$ с коэффициентами теплопроводности $\lambda$ и температуропроводности $a$, помещенного в среду с температурой $T_c$, которая меняется во времени по закону

$$T_c(t) = A(1 - \exp[-kt]) + T_0, \qquad (1)$$

где $A = T_{max} - T_0$; $T_{max}$ — температура при $t \to \infty$; $k$ — показатель экспоненты. Теплообмен осуществляется по закону Ньютона $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T - T_c)$. Решение этой задачи известно и имеет следующий вид [3]:

$$\vartheta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - \frac{J_0(\xi\sqrt{\mathrm{Pd}}) \exp(-\mathrm{Pd\,Fo})}{J_0(\sqrt{\mathrm{Pd}}) - \frac{\sqrt{\mathrm{Pd}}}{\mathrm{Bi}} J_1(\sqrt{\mathrm{Pd}})} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\mu_n, \xi) C_n \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo})}{\mu_n J_1(\mu_n)(1 - \mu_n^2/\mathrm{Pd})}, \qquad (2)$$

где $C_n = \frac{\mathrm{Bi}^2}{\mu_n^2 + \mathrm{Bi}^2}$; $\mu_n$ — корни уравнения $\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}}$; $\vartheta(\xi, \mathrm{Fo}) = \frac{T - T_0}{T_{max} - T_0}$; $\xi = x/r$; $\mathrm{Pd} = kr^2/a$, $\mathrm{Fo} = at/r^2$, $\mathrm{Bi} = \alpha r/\lambda$ — числа Предводителева, Фурье и Био; $J_0$, $J_1$ — функции Бесселя первого рода пулевого и первого порядка. Решение (2) будет использовано в дальнейшем.

Из решения видно, что при достаточно больших временах температурный перепад между центром вещества и окружающей средой изменяется по закону

$$\Delta T = T(x, t) - T_c(t) = A\exp(-kt)\left[1 - \frac{J_0(\xi\sqrt{\mathrm{Pd}})}{J_0(\sqrt{\mathrm{Pd}}) - \frac{\sqrt{\mathrm{Pd}}}{\mathrm{Bi}}J_1(\sqrt{\mathrm{Pd}})}\right].$$

Система уравнений, описывающая тепловой взрыв при экспоненциальном росте температуры окружающей среды во времени состоит из уравнений теплопроводности и химической кинетики

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = Qk_0\exp(-E/RT)\varphi(\eta) + \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{n}{x}\frac{\partial T}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = k_0\exp(-E/RT)\varphi(\eta)$$

с начальными

$$t = 0:\ T - T_c = T_0,\ \ \eta = 0$$

и граничными

$$x = 0:\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

$$x = r:\ -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T - T_c)$$

условиями. Изменение температуры окружающей среды характеризует выражение

$$T_c(T_0, t) = A(1 - \exp[-kt]) + T_0,$$

где $Q$ — тепловой эффект реакции; $k_0$ — предэкспонент; $E$ — энергия активации; $\eta$ — глубина превращения.

При переходе к безразмерным переменным в качестве масштабной используется критическая температура воспламенения $T_*$ в статических условиях. Тогда получим

$$\Omega\frac{\partial\Theta}{\partial\Theta_c}\left[1 - \frac{RT_*^2}{EA}(\Theta_c - \Theta_0)\right] = \exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right)\varphi(\eta) + \frac{1}{\mathrm{Fk}^*(\mathrm{Bi})}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2} + \frac{n}{\xi}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right),$$

$$\Omega\frac{\partial\eta}{\partial\Theta_c}\left[1 - \frac{RT_*^2}{EA}(\Theta_c - \Theta_0)\right] = \gamma\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right)\varphi(\eta),$$

$$\tau = 0 : \Theta = \Theta_c = \Theta_0,\quad \eta = 0, \tag{3}$$

$$\xi = 0 : \frac{\partial\Theta}{\partial\xi} = 0,$$

$$\xi = 1 : \frac{\partial\Theta}{\partial\xi} = -\mathrm{Bi}(\Theta - \Theta_c).$$

Искомые переменные — температура $\Theta = \frac{E}{RT_*^2}(T - T_*)$ и $\eta$, независимые переменные — температура среды $\Theta_c = \frac{E}{RT_*^2}(T_c - T_*)$ и $\xi = x/r$. Безразмерные параметры: $\Omega = \frac{c\rho kA}{Qk_0\exp(-E/RT_*)}$ — скорость нагрева, $\Theta_0 = \frac{E}{RT_*^2}(T_0 - T_*)$ — начальная температура, $Bi$, $\gamma = \frac{c\rho RT_*^2}{QE}$, $\beta = \frac{RT_*}{E}$ — обычные параметры теории теплового взрыва;

$$\mathrm{Fk}^*(\mathrm{Bi}) = \mathrm{Fk}_n^*\frac{\mathrm{Bi}}{2}\left(\sqrt{\mathrm{Bi}^2+4} - \mathrm{Bi}\right)\exp\frac{\sqrt{\mathrm{Bi}^2+4} - \mathrm{Bi} - 2}{\mathrm{Bi}},$$

где $\mathrm{Fk}_n^*$ — критическое значение критерия Франк-Каменецкого для классической задачи о тепловом взрыве при $\mathrm{Bi}\to\infty$ для реакции нулевого порядка $(\mathrm{Fk}_1^* = 2)$. В данной задаче $\mathrm{Fk}^*$ — не параметр, поскольку, зная геометрию и условия теплообмена, можно рассчитать его числовое значение.

Физический смысл параметра $\Omega$ становится ясным после преобразований с учетом выражений для $\mathrm{Fk}_n^*$, $a$, Pd:

$$\Omega = \frac{c\rho k A}{Q k_0 \exp(-E/RT_*)} - \frac{\mathrm{Pd}}{\mathrm{Fk}_n^* B},$$

$B = RT_*^2/AE$, т. е. $\Omega$ представляет собой отношение характерного времени релаксации системы к характерному темпу нагрева.

Для решения системы (3) при различных значениях Bi воспользуемся методом осреднения [4]. Сделав замену $z = \Theta - \Theta_c$, учитывая, что $\overline{z\Delta} = -\lambda_0 \bar{z}$, использовав правило осреднения суперпозиций $\overline{\varphi(\eta)\exp z} \simeq \simeq \varphi(\bar{\eta})\exp \bar{z}$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, усредненных по координате (знак осреднения опускаем):

$$\Omega\left(\frac{\partial z}{\partial \Theta_c} + 1\right) X = \exp(z + \Theta_c)\,\varphi(\eta) - \frac{\lambda_0}{\mathrm{Fk}^*} z,$$

$$\Omega \frac{\partial \eta}{\partial \Theta_c} X = \gamma \exp(z + \Theta_c)\,\varphi(\eta), \tag{4}$$

$$\tau = 0\colon\ z = 0,\ \eta = 0.$$

Здесь $\bar{z} = \int\limits_0^1 (\Theta - \Theta_c)\, v_0(\xi)\, d\xi$; $X = 1 - B(\Theta_c - \Theta_0)$; $\lambda_0$ — первое собственное значение краевой задачи $\Delta v + \lambda v = 0$; $dv/d\xi + \mathrm{Bi}\, v|_s = 0$. Значения $\lambda_0$, соответствующие различным величинам Bi в диапазоне 0,1—$\infty$, приведены в [4].

Средняя температура тела при инертном нагреве как функция времени рассчитывается из (2) по формуле

$$\Theta = \frac{1}{B}\left[1 - \frac{2J_1(\sqrt{\mathrm{Pd}})\exp(-\mathrm{Pd\,Fo})}{\sqrt{\mathrm{Pd}}\,J_0(\sqrt{\mathrm{Pd}}) - \frac{\mathrm{Pd}}{\mathrm{Bi}} J_1(\sqrt{\mathrm{Pd}})}\right] + \Theta_0. \tag{5}$$

Рассмотрим характеристики теплового взрыва при экспоненциальном нагреве на примере реакции первого порядка $\varphi(\eta) = 1 - \eta$. Переходя к безразмерным переменным в (1) и сравнивая с равенством (5), получаем условие $d\Theta/d\Theta_c = n$, где $n = \dfrac{2J_1(\sqrt{\mathrm{Pd}})}{\sqrt{\mathrm{Pd}}\,J_0(\sqrt{\mathrm{Pd}}) - \mathrm{Pd}\,J_1(\sqrt{\mathrm{Pd}})/\mathrm{Bi}}$. С учетом этого условия при $\Theta_0 \approx -1/\beta$ (4) примет вид

$$n\Omega X = \exp\Theta\,(1 - \eta) - \frac{\lambda_0}{\mathrm{Fk}^*}(\Theta - \Theta_c), \tag{6}$$

$$n\Omega X \frac{d\eta}{d\Theta} = \gamma \exp\Theta\,(1 - \eta), \tag{7}$$

$$\Theta = \Theta_c = -1/\beta,\ \eta = 0.$$

Эта система проще исходной, так как уравнение теплового баланса стало алгебраическим, а кинетическое уравнение независимо интегрируемым.

Интегрируя (7) с учетом (6), получаем трансцендентное уравнение, из которого определяются все характеристики процесса:

$$\exp\left[\Theta - \frac{\gamma}{n\Omega X}\exp\Theta\right] = \frac{\lambda_0}{\mathrm{Fk}^*}(\Theta - \Theta_c) + n\Omega X. \tag{8}$$

Качественный анализ решения (8) известен из литературы [5]. Ограничимся рассмотрением случая, когда имеются критические условия.

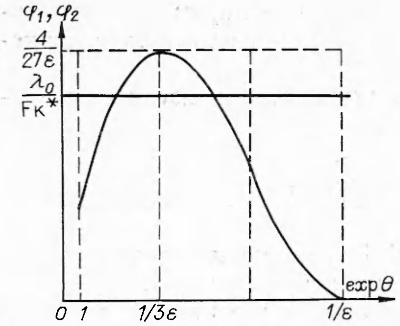


*Рис. 1.* Графическое решение уравнения (15).

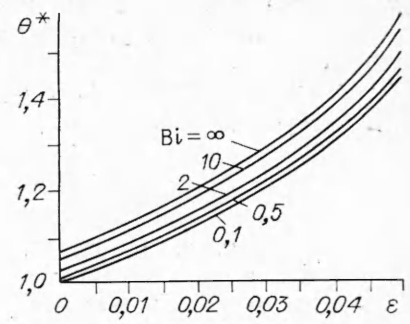


*Рис. 2.* Зависимость критической температуры воспламенения от параметра ε для различных значений Bi.

Критическую температуру воспламенения находим из трансцендентного уравнения. Дифференцируя (8) по Θ и полагая, что в критических условиях[1] $X = 1 + B\Theta_0(1 - \Theta_c^*/\Theta_0) \approx 1 + B\Theta_0$, получим

$$\exp[\Theta - \varepsilon \exp \Theta](1 - \varepsilon \exp \Theta) = \lambda_0/\mathrm{Fk}^*, \tag{9}$$

где $\varepsilon = \gamma/n\Omega(1 + B\Theta_0)$.

Равенство (9) справедливо только при выполнении условий $\varepsilon \ll 1$ и $B < |1/\Theta_0|$. Разлагая в (9) экспоненту в ряд по малости $\varepsilon \exp \Theta$ и ограничиваясь первым членом разложения, получаем трансцендентное уравнение для приближенного нахождения критической температуры воспламенения. Это уравнение описывается двумя функциями (рис. 1): $\varphi_1$ — кубической параболой с областью определения $[1;\ 1/\varepsilon]$ и $\varphi_2$ — прямой, параллельной оси абсцисс и отстоящей от нее на расстояние $\lambda_0/\mathrm{Fk}^*$. Очевидно, что критические условия воспламенения имеются всегда при $\lambda_0/\mathrm{Fk}^* \leqslant 4/27\varepsilon$, т. е. при $\Omega \geqslant 27\lambda_0\gamma/4\mathrm{Fk}^* n(1 + B\Theta_0)$.

Критические температуры воспламенения и окружающей среды находятся из выражений

$$\Theta^* = \ln \frac{1 - \sqrt{1 - 8\varepsilon\lambda_0/\mathrm{Fk}^*}}{4\varepsilon}, \tag{10}$$

$$\Theta_c^* = \ln \frac{1 - \sqrt{1 - 8\varepsilon\lambda_0/\mathrm{Fk}^*}}{4\varepsilon} - \frac{4\lambda_0\varepsilon - \mathrm{Fk}^*\gamma\left(3 + \sqrt{1 - 3\varepsilon\lambda_0/\mathrm{Fk}^*}\right)}{\lambda_0\varepsilon\left(3 + \sqrt{1 - 8\varepsilon\lambda_0/\mathrm{Fk}^*}\right)}.$$

Численное решение (9) приводит к однозначной зависимости $\Theta^*(\varepsilon)$ (рис. 2) при заданном значении Bi. При $\varepsilon < 0{,}03$ (10) по сравнению с номограммой дает ошибку в определении $\Theta^*$ не более чем на 3 %; при $\varepsilon > 0{,}05$ решений (9) не существует.

Таким образом, в работе проведен расчет характеристик теплового взрыва при экспоненциальном нестационарном процессе нагрева бесконечного цилиндра. Найдены аналитические выражения и построена номограмма для определения критических температур воспламенения и окружающей среды при скоростях, превышающих критическую скорость нагрева. Установлено, что при больших скоростях нагрева ($\varepsilon \to 0$) системы, реагирующей по реакции первого порядка, можно пользоваться выражениями для нахождения критических условий в реакции нулевого порядка, так как выгорание вещества практически не сказывается на величине $\Theta^*$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Струнина А. Г.** Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Черноголовка, 1967.
2. **Барзыкин В. В.** ФГВ, 1973, 9, 1, 37.
3. **Лыков А. В.** Тепломассообмен: Справочник.— М.: Энергия, 1972.


[1] Возможность такого допущения легко увидеть, записав отношение $\Theta_c^*/\Theta_0$ в размерном виде.

4. **Вольперт А. И., Худяев С. И.** Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики.— М.: Наука, 1975.
5. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Наука, 1967.

*Поступила в редакцию 20/VII 1987*

УДК 536.4

# НЕСТАЦИОНАРНОЕ ИСПАРЕНИЕ ЖИДКОГО КИСЛОРОДА В АТМОСФЕРУ

*Н. И. Зверев, Н. Н. Смирнов, Л. А. Дехтяренко, Н. А. Щепотьев, Д. М. Якубович*

*(Москва)*

Аварийный пролив и испарение жидкого кислорода приводят к возможности взрыва при загорании материалов. Реальная опасность загорания или взрыва определяется случайным неблагоприятным сочетанием многих факторов: импульсы давления, трение, гидроудары, электрические разряды, накопление легковоспламеняющихся веществ и т. п.— и не может быть исключена полностью, особенно в аварийных ситуациях.

В настоящее время процессу испарения при аварийных проливах криопродуктов посвящены работы [1—3], в которых рассматривается задача стационарного испарения жидкого водорода с различных горизонтальных поверхностей (сталь, бетон, гравий) при условии постоянства газовой смеси. Однако аварийные проливы криопродуктов характеризуются нестационарностью процесса испарения. Предположение о постоянной плотности смеси воздуха с парами криогенной жидкости, обоснованное для паров с малой молекулярной массой (испарение жидкого водорода), в случае испарения кислорода противоречит качественной картине явления в области больших градиентов температур вблизи поверхности испарения. Поэтому актуальна задача о нестационарном формировании смеси паров криогенной жидкости с воздухом с учетом переменной плотности, решению которой посвящена настоящая работа.

Представляющие практический интерес размеры и характерные времена протекания процессов при испарении большого количества криогенной жидкости в атмосферу таковы, что зависимостью давления от высоты и времени можно пренебречь. Граничные условия в газе и жидкости можно перенести на бесконечность. Рассмотрим систему координат, в которой вертикальная ось $y$ связана с поверхностью испарения ($y=0$), полупространство $y>0$ занято газом, а полупространство $y<0$ — криогенной жидкостью.

Уравнения, описывающие распределение параметровой газовой фазы, имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}=0,\ p=\mathrm{const},\\ \frac{\partial\rho Y_i}{\partial t}+\frac{\partial\rho v Y_i}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D\frac{\partial Y_i}{\partial y}\right),\ i=1,\ldots,n-1,\\ c_p\left(\frac{\partial\rho T}{\partial t}+\frac{\partial\rho v T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right),\\ p=\rho RT\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{m_i}.\end{gathered}\tag{1}$$

Систему (1) решим совместно с уравнением энергии для жидкости, которое в выбранной системе координат имеет вид

$$\rho_f\frac{\partial T_f}{\partial t}+v_f\rho_f\frac{\partial T_f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda_f}{c_{pf}}\frac{\partial T_f}{\partial y}\right),\tag{2}$$