ПМТФ, № 4, 1973

УДК 534.12

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ

В. А. Сарайкин

(Новосибирск)

Рассматривается плоская задача о нестационарных волнах в бесконечном изотропном слое. На границу слоя в момент времени $t = 0$ начинает действовать нормальная сила. Противоположная сторона слоя свободна от напряжений. Применением интегральных преобразований получено решение задачи в изображениях. Разложением решения в изображениях в ряд по степеням экспонент и обращением каждого члена полученного ряда аналитически определено точное решение задачи. Проведен расчет поля напряжений и скоростей в слое. Использование для расчетов аналитических зависимостей позволяет в отличие от расчета конечно-разностными методами достаточно точно определить волновую картину и исключить специфические эффекты, присущие разностным уравнениям. Примененный в работе алгоритм расчета позволяет вычислить решение задачи в любой точке слоя. Приведенные результаты расчетов дают представление о распределении напряжений и скоростей частиц по толщине и в продольном направлении.

Расчет нестационарных задач суммированием по волнам, как это проделано в данной работе, наряду с методами, изложенными в работах [1, 2], позволяет полнее представить волновые переходные процессы в слое.

Пусть слой занимает область, ограниченную плоскостями $y = 0$ и $y = 1$. Две другие оси (x и z) перпендикулярны оси y и расположены в плоскости слоя. За единицу измерения в задаче приняты: толщина слоя, скорость волны расширения (c_1), плотность среды. Единицей времени служит интервал времени, в течение которого волна расширения проходит расстояние, равное толщине слоя.

В граничных условиях задается распределение вектора напряжений на лицевой стороне слоя $y = 0$; на тыльной стороне слоя $y = 1$ напряжения отсутствуют

$$\sigma_y = -\frac{1}{\pi}\frac{\delta}{\delta^2 + x^2}\delta_0(t), \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (y = 0)$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (y = 1) \tag{1}$$

Здесь через $\delta_0(t)$ обозначена единичная функция Хевисайда, а δ — вещественный параметр нагрузки.

Начальные условия задачи нулевые.

Напряжения и смещения не зависят от координаты z и связаны линейными соотношениями

$$\sigma_x = \frac{\partial u}{\partial x} + (1 - 2c_2^2)\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{xy} = c_2^2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{2}$$

$$\sigma_y = (1 - 2c_2^2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

где ε_{if} — деформации в слое.

Продольное u и поперечное v смещения в слое должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - c_2^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + c_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

$$c_2^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1 - c_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

В принятых единицах измерения $c_2 = \sqrt{\mu}$ — скорость волны сдвига; $\lambda + 2\mu = 1$; λ, μ — упругие постоянные среды, t — время.

При решении задачи применяются преобразования Лапласа по t и Фурье вдоль оси x

$$u^L(p) = \int\limits_0^\infty u(t)\exp(-pt)\,dt, \qquad u^F(q) = \int\limits_{-\infty}^\infty u(x)\exp(iqx)\,dx$$

Применив интегральные преобразования к уравнениям движения (3), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решая систему и определяя значения постоянных в общем решении из преобразованных граничных условий (1), находим изображения напряжений и скоростей в изотропном слое

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{LF} = \frac{1}{2} b_2^2 iq\exp(-\delta|q|)\left[(n_2^2+q^2)\Omega_1 - 2n_1n_2\Omega_2\right]\\
&\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{LF} = \frac{1}{2} b_2^2 n_1\exp(-\delta|q|)\frac{d}{dy}\left[(n_2^2+q^2)\frac{\Omega_1}{n_1} - 2q^2\frac{\Omega_2}{n_2}\right]\\
&\sigma_x^{LF} = \frac{1}{2p}\exp(-\delta|q|)\left[(n_2^2+q^2)(b_2^2q^2 - \right.\\
&\left.-(b_2^2-2)n_1^2)\Omega_1 - 4n_1n_2q^2\Omega_2\right]\\
(4)\quad &\sigma_y^{LF} = -\frac{1}{2p}\exp(-\delta|q|)\left[(n_2^2+q^2)^2\Omega_1 - 4n_1n_2q^2\Omega_2\right]\\
&\sigma_{xy}^{LF} = \frac{iq}{p} n_1(n_2^2+q^2)\exp(-\delta|q|)\frac{d}{dy}\left(\frac{\Omega_1}{n_1} - \frac{\Omega_2}{n_2}\right)\\
&n_1 = \sqrt{q^2+p^2}, \quad n_2 = \sqrt{q^2+b_2^2p^2}, \quad n_{1,2} > 0\\
&\text{при}\ \ p>0, \ \ \mathrm{Imq} = 0\\
&\Omega_l = \frac{1}{L_1}\operatorname{sh}\frac{n_j}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{n_l}{2} - n_ly\right) + \frac{1}{L_2}\operatorname{ch}\frac{n_j}{2}\operatorname{sh}\left(\frac{n_l}{2} - n_ly\right)\\
&(b_2 = 1/c_2, \quad l = 1, 2; \quad l + j = 3)
\end{aligned}$$

Через L_1 и L_2 обозначены знаменатели симметричной и антисимметричной частей решения

$$L_l = (n_2^2+q^2)^2\operatorname{ch}\frac{n_l}{2}\operatorname{sh}\frac{n_j}{2} - 4n_1n_2q^2\operatorname{sh}\frac{n_l}{2}\operatorname{ch}\frac{n_j}{2} \qquad (l = 1, 2; \quad l + j = 3)$$

Решение (4) описывает все волны, возникающие в результате многократных отражений от границ. Можно представить данное решение в виде ряда по группам волн, претерпевшим одинаковое количество отражений. Для этого представим решение (4) в виде разложений в ряд по степеням экспонент (см., например, [3])

$$\begin{aligned}
&R_1L_l^{-1} = 4\exp\left(-\frac{n_1}{2} - \frac{n_2}{2}\right)\sum_{n=0}^\infty \left[\exp(-n_1 - n_2) + (-1)^l \times\right.\\
&\left.\times\,\gamma(\exp(-n_1) - \exp(-n_2))\right]^n = 4\exp\left(-\frac{n_1}{2} - \frac{n_2}{2}\right)\times\\
&\times\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^n\sum_{m=0}^k(-1)^{(2-l)k} a_{mnk}\exp\left[(m-n)n_1 + (k-m-n)n_2\right]\\
&\gamma = \frac{R_2}{R_1}, \qquad R_l = (n_2^2+q^2)^2 + (-1)^l4n_1n_2q^2, \qquad a_{mnk} =\\
&= \frac{(-1)^m\gamma^k n!}{m!\,(n-k)!\,(k-m)!} \qquad (l = 1, 2)
\end{aligned}$$

Эти разложения позволяют записать Ω_l в решении в виде суммы экспонент. Каждая экспонента определяет вклад в решение соответствующей ей отраженной волны

$$R_1\Omega_l = [\exp(-n_l y) - \exp(-n_1 - n_2 + n_l y)]\,\Sigma_1 + [\exp(-n_l + n_l y) - \exp(-n_j - n_l y)]\,\Sigma_2$$

$$\Sigma_l = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}[(-1)^k + (-1)^{l+1}]\,a_{mnk}\exp[(m-n)n_1 + (k-m-n)n_2] \qquad (l = 1, 2;\ l + j = 3) \tag{5}$$

Подставим разложения (5) в решение задачи (4). Экспоненциальные множители при каждом слагаемом в решении указывают на запаздывание оригинала для данного слагаемого. Таким образом, при заданном времени t следует удерживать конечное число слагаемых в решении. Подробно о суммировании волн написано ниже.

Рассмотрим произвольное слагаемое в решении (4)

$$\sigma^{LF}(p, q, y) = \frac{1}{p}\Phi(p, q)\exp[-\alpha n_1(p, q) - \beta n_2(p, q) - \delta|q|] = \sigma_0^{LF}(p, q)\exp(-\delta\,|\,q\,|) \tag{6}$$

$$n_{1,2}(p, p\,\xi) = p n_{1,2}(1, \xi), \quad \Phi(p, p\xi) = \Phi(1, \xi)$$

Здесь $n_{1,2}$ — однородные функции первого порядка, а Φ — нулевого. Изображения такого вида присущи более простым динамическим задачам: плоская задача об источнике возмущений в безграничной среде, плоская задача Лемба для полупространства. В данном случае решение задачи с характерными размерами (толщина слоя и параметр нагрузки δ) благодаря разложениям (5) удается представить в виде суммы подобных LF-изображений.

При обращении (6) используем путь, предложенный в [4] (стр. 80—85, 194—201) и примененный при решении задачи Лемба для изотропного полупространства.

Представим оригинал искомой в (6) функции в виде

$$\sigma = \sigma_+(s_+) + \sigma_-(s_-), \qquad s_\pm = \delta \pm ix \tag{7}$$

Функции σ_+ и σ_- являются аналитическими функциями $s_\pm$ в правых полуплоскостях $\mathrm{Re}\, s_\pm > 0$

$$\sigma_\pm(s_\pm) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \sigma_0{}^F(\pm q)\exp(-s_\pm q)\,dq \tag{8}$$

Так как σ_+ и σ_- — аналитические функции, то они полностью определяются своими значениями на вещественных полуосях $\mathrm{Re}\, s_\pm = \delta > 0$. Учитывая представление функции σ в (7), из (8) определяем

$$\sigma^L = \sigma_+{}^L + \sigma_-{}^L = 2\,\mathrm{Re}\,\sigma_+{}^L = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\infty \sigma_0^{LF}(p, q)\exp(-s_+ q)\,dq \tag{9}$$

Положив $q = p\xi$ при $s_+ > 0$, $p > 0$, получаем L-изображение искомой функции

(10)
$$\sigma^L(p, s_+, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \Phi(1, \xi) \exp[-p(\alpha m_1 + \beta m_2 + s_+\xi)]\, d\xi$$
$$m_1 = \sqrt{1 + \xi^2}, \qquad m_2 = \sqrt{b_2{}^2 + \xi^2}$$
$$m_{1,2} > 0 \quad \text{при } \operatorname{Re}\xi > 0, \quad \operatorname{Im}\xi = 0$$

Положительные значения p, лежащие правее абсциссы сходимости, полностью определяют изображение — аналитическую функцию p.

Обозачим

(11) $$\alpha m_1(\xi) + \beta m_2(\xi) + s_+\xi = t + \alpha + b_2\beta \quad (s_+ > 0)$$

Положительное решение уравнения (11) единственно относительно t, так как слева стоит положительная ($s_+ > 0$) монотонно возрастающая функция

$$(d\xi/dt)^{-1} = \alpha m'_1(\xi) + \beta m_2'(\xi) + s_+ > 0 \qquad (\xi > 0)$$
$$m_{1,2}(\xi) \to \infty \quad \text{при } \xi \to \infty$$

Сделав замену переменных (11), приводим L-изображение функции σ в выражении (10) к виду

(12) $$\sigma^L(p, s_+, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\Phi(1, \xi(t, s_+, y))}{\alpha m_1' + \beta m_2' + s_+} \exp[-p(t + \alpha + b_2\beta)]\, dt$$
$$(s_+ > 0)$$

В правой части (12) стоит преобразование Лапласа функции

(13)
$$\sigma(t, s_+, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{\Phi(1, \xi(t - \alpha - b_2\beta, s_+, y))}{\alpha m_1' + \beta m_2' + s_+} \right]$$
$$(s_+ = \delta + ix)$$

которая, таким образом, является искомым оригиналом. При $\delta = 0$ получаем выражение общего члена решения для сосредоточенной нагрузки.

При решении задачи на ЭЦВМ суммировались выражения (13). Конкретный вид $\Phi(1, \xi)$ для каждого слагаемого находился из (4), (5). Значения ξ определялись численно из уравнения (11), которое при $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $s_+ = \delta + ix \neq 0$ является уравнением четвертой степени с комплексными коэффициентами. Степень уравнения понижается, если либо α, либо β равно нулю. Если $s_+ = 0$ (нагрузка на поверхности слоя сосредоточена и волновой процесс рассматривается на оси симметрии $x = 0$), то уравнение (11) приводится к биквадратному. Хотя в этом случае ξ довольно просто выражается через t и y, привести здесь явный вид решения не представляется возможным из-за громоздкости.

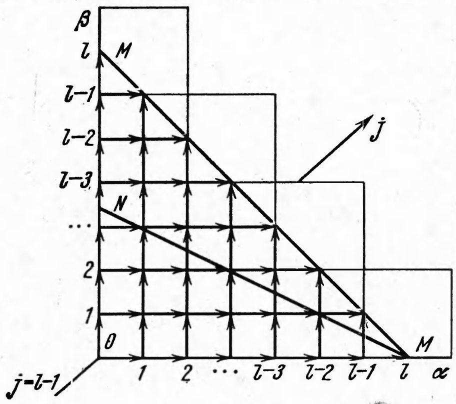
Решение для касательного воздействия на лицевую поверхность слоя получается аналогично. Если заменить в граничных условиях $\delta_0(t)$ на импульс $\delta_1(t)$, то также будут выражаться u- и v-смещения в слое.

Опишем алгоритм суммирования волн, примененный в задаче при расчете. В разложениях Ω_l в формулах (5) множителями при Σ_1 и Σ_2 стоят величины

$$A_1 = \exp(-n_1 - n_2 + n_1 y), \quad A_3 = \exp(-n_1 + n_1 y)$$
$$A_2 = \exp(-n_1 - n_2 + n_2 y), \quad A_4 = \exp(-n_2 + n_2 y)$$
$$B_1 = \exp(-n_1 y), \quad B_3 = \exp(-n_2 - n_1 y)$$
$$B_2 = \exp(-n_2 y), \quad B_4 = \exp(-n_1 - n_2 y)$$

Слагаемые с коффициентами A_i описывают волны, идущие от тыльной стороны слоя $y = 1$ к лицевой $y = 0$; с коэффициентами B_i — волны, отраженные от лицевой и идущие к тыльной стороне слоя. Радикалы n_1 и n_2 в показателях экспонент указывают на вид волны, а множители перед ними (см. (5)) — на длину пробега волны по толщине слоя.

Обозначим, как это было сделано выше (см. (6)), через $\alpha(m, n)$ множитель в показателе экспоненты при n_1, а через $\beta(m, n, k)$ — множитель при n_2. Пусть j определяет число отражений, которые претерпела волна расширения, идущая первой от источника возмущений на границе $y = 0$. Если t_0 — время от начала процесса, то $0 \leqslant j \leqslant E(t_0) + 1$ (E — целая часть числа). Собирая в Σ_1 и Σ_2 волны, прошедшие по толщине слоя j раз ($\alpha + \beta = j$), определяем комбинации m, n, k, которые описывают все волны, образовавшиеся после j-го отражения. Таким образом выделяются все волны, прошедшие одинаковое расстояние по толщине слоя. Тот факт, что они идут с разными скоростями (c_1 и c_2) и, следовательно, отражения сдвиговых волн запаздывают во времени, будет учтен потом.



Фиг. 1

Получаем, что для Σ_1 и Σ_2 с множителями A_1, A_2, B_1, B_2 при j четном m, n, k меняются в пределах $j/2 \leqslant n \leqslant j$, $k = 2n - j$, $0 \leqslant m \leqslant k$, а при j нечетном — $(j + 1)/2 \leqslant n \leqslant j$, $k = 2n - j$, $0 \leqslant m \leqslant k$.

Для волн, описываемых выражениями с множителями A_3, A_4, B_3, B_4 в суммировании следует сделать сдвиг, а именно, если j четно, то для $j \geqslant 2$ находим $j/2 \leqslant n \leqslant j - 1$, $k = 2n - j + 1$, $0 \leqslant m \leqslant k$. Если же j нечетно и $j \geqslant 3$, то $(j - 1)/2 \leqslant n \leqslant j - 1$, $k = 2n - j + 1$, $0 \leqslant m \leqslant k$.

При расчете задачи число отраженных от поверхностей слоя волн определялось следующим образом. На фиг. 1 стрелками указаны направления, вдоль которых следует продвигаться, чтобы достичь прямой MM. Вдоль осей отложено расстояние $OM = j + 1 = l$, пройденное первой волной расширения к моменту $j + 1$-го отражения. Узлы сетки определяют значения α и β, при которых происходили отражения. Все возможные пути до прямой MM, равные OM, определяют все комбинации волн (значения α и β), которые образовались после j-го отражения. Просуммировав эти волны (см. приведенные выше зависимости m, n, k от j), определим вклад данного j-го отражения в решение задачи. Чтобы найти полное решение задачи, суммы, полученные для различных j, надо просуммировать по j.

Чтобы учесть запаздывание сдвиговых волн, отложим на оси β отрезок $ON = c_2 t_0$. Прямая MN на фиг. 1 (ее уравнение $\alpha + b_2\beta = t_0$) будет отсекать только те волны, которые успели прийти в данную точку слоя, т. е., начиная с $j = E(c_2 t_0)$, следует учитывать волны, для которых выполняется неравенство $t_p + t_s = \alpha + b_2\beta \leqslant t_0$. Здесь через t_p и t_s обозначены времена, затраченные волнами расширения и сдвига на пробег по толщине слоя расстояний α и β соответственно.

При расчете задачи значения ξ определялись из уравнения (11). Для $s_+ > 0$ $(x = 0)$ решением уравнения являются положительные ξ. Распространяя решение задачи на значения $x > 0$, следует аналитически продолжить решение уравнения на область комплексных. Значения $x < 0$ можно не рассматривать из-за симметрии задачи относительно оси y. Из анализа решений уравнения (11) можно определить знаки действительной и мнимой частей ξ. Показано, что при $x > 0$ в области, где имеются возмущения, $\mathrm{Re}\, \xi \geqslant 0$, а $\mathrm{Im}\, \xi \leqslant 0$. Таким образом, для положительных значений x корни уравнения (11) находятся в четвертом квадранте комплексной плоскости ξ.

При расчете волн в слое было принято $c_2 = 1/1.7$, что соответствует $\lambda = 0.89\ \mu$. Ниже приведены некоторые результаты расчетов поля напряжений и скоростей частиц в слое при нагрузке, близкой к сосредоточенной $(\delta = 0.01)$.

При действии распределенной вдоль оси x нагрузки в момент времени $t = 0$ возмущению подвергаются все точки поверхности, излучая волны расширения и сдвига. Огибающими этих волн являются прямолинейные фронты, распространяющиеся в направлении оси y со скоростью волн расширения и сдвига. Конечный скачок, который претерпевает решение при переходе через прямолинейные фронты, убывает с течением времени. Внутри этих областей значения напряжений и скоростей частиц непрерывны, но имеют конечные пики в точках, соответствующих фронтам волн при сосредоточенной нагрузке. Пики будут выражены тем резче, чем ближе нагрузка взята к сосредоточенной. Для сосредоточенной нагрузки значения скоростей частиц и напряжений в этих точках обращаются в бесконечность. В дальнейшем, поскольку нагрузка взята близкой к сосредоточенной, именно эти точки будем называть фронтовыми.

На поверхности $y = 0$ σ_y и σ_{xy} подчинены граничным условиям (1), а $\pi\sigma_x = -99.99$ при $x = 0,\ y = 0, t = 1.9$. Затем, начиная с $x = 0.65$, значение σ_x становится положительным и имеет максимумы в точках рэлеевской и сдвиговой волн

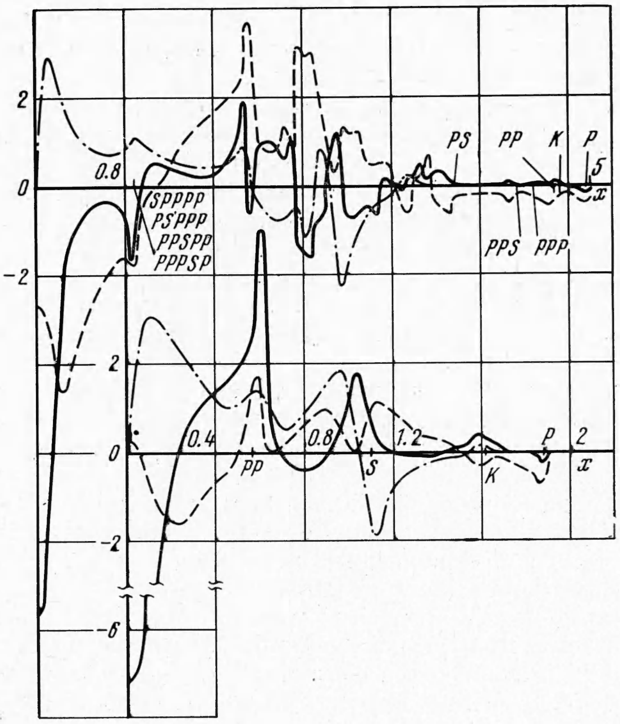
$$x = 1.9\, c_R t \sim 1.025, \quad \pi\sigma_x = 33.97; \quad x = 1.9\, c_2 \sim 1.11, \ \pi\sigma_x = 0.75$$

Перед фронтом волны сдвига при $x = 1.6$ σ_x вновь становится сжимающим и имеет минимум $\pi\sigma_x = -0.92$ в точке $x = 1.875$. Так как отраженные от границы $y = 1$ возмущения не успели дойти до границы $y = 0$, волновое поле на поверхности слоя совпадает с волновым полем на поверхности полупространства.

На нижних графиках фиг. 2 представлены напряжения внутри слоя при $y = 0.2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1.9$, $t = 1.9$, где $\pi\sigma_x$—пунктирная, $\pi\sigma_y$ — сплошная, $\pi\sigma_{xy}$ — штрихпунктирная линии. Чтобы определить, каким волнам соответствуют пики, геометрически были построены фронты. На графике символами p и s обозначены следы фронтов волн расширения и сдвига. Очередность символов указывает на вид падающей и отраженных волн. Символом k отмечен след прямолинейного фронта сдвиговой волны. Наличие пика у σ_x при $x = 0.9$ обусловлено, по-видимому, поверхностной рэлеевской волной. Этот пик, следующий непосредственно вслед за пиком на фронте сдвиговой волны, прослеживается при $y = 0.4$, $x = 0.85$. Значение напряжения σ_x в этой точке

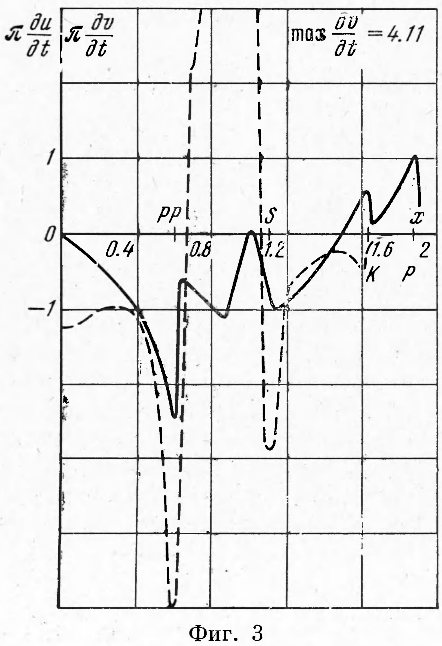
$$\pi\sigma_x = \pi\,(\sigma_x)_0 + \pi\,(\sigma_x)_{pp} = 0.181 + 0.589$$

Здесь выделен вклад, который вносит отраженная продольная волна.



Фиг. 2

Расчет показал рост возмущений в точках прямолинейного фронта k при увеличении y. Напряжение σ_x на оси симметрии $x = 0$ при удалении от начала координат из сжимающего становится растягивающим и растет, а σ_y, убывая до нуля при $y = 1$, остается все время сжимающим. Касательное напряжение на оси $x = 0$ равно нулю.



Фиг. 3

На графиках фиг. 2 приведены также значения напряжений $\pi\sigma_x$, $\pi\sigma_y$, $\pi\sigma_{xy}$ в сечении $y = 0.2$, рассчитанные к моменту времени $t = 5$. Поскольку решение было определено суммированием по волнам, вклад в решение каждой отраженной волны легко определяется. В каждом слагаемом можно выделить пик в точке фронта данной волны. Таким образом были приближенно определены следы некоторых фронтов волн, указанные на графике. На приведенных графиках видно, что напряжение σ_y наиболее часто меняет знак, колеблясь около нуля. Напряжение σ_x в довольно большом промежутке $0.7 < x < 2.4$ является сжимающим. Касательное напряжение σ_{xy} меняет знак примерно столько раз, сколько имеется отраженных круговых фронтов сдвига. Касательное напряжение меняет знак также при переходе прямолинейного фронта сдвиговой волны k.

Графики на фиг. 3 представляют собой скорости частиц при $y = 0.2$ и $t = 1.9$ ($\partial u/\partial t$ — сплошная, $\partial v/dt$ — пунктирная линии). На примере волны pp можно проследить влияние отраженной волны на направление результирующей скорости частиц. Если до прихода отраженной волны в точках внутри s-волны $\partial u/\partial t \leqslant 0$ и $\partial v/\partial t > 0$, то отраженная волна расширения pp, в которой $\partial u/\partial t \leqslant 0$, $dv/dt < 0$ «разворачивает» результирующую скорость, при этом $\partial u/\partial t \leqslant 0$, $\partial v/\partial t < 0$. Пики при $x = 1.6$ определяют приход прямолинейного фронта сдвиговой волны. Результирующая скорость направлена к поверхности $y = 0$ и почти совпадает по направлению с прямолинейным фронтом волны сдвига.

Расчеты проводились на ЭЦВМ БЭСМ-6. При построении графиков на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1.9$ были взяты 77 точек. На расчет σ_x, σ_y, σ_{xy}, $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$ в одной точке слоя при $t = 1.9$ было затрачено ~ 0.16 *сек.*

Отметим применимость расчетной схемы, приведенной в работе, для определения решения осесимметричной задачи. Это следует из возможности перехода от преобразования Фурье к преобразованию Ханкеля [4,5]. Формально в (13) надо заменить x на $r \sin\theta$ (r — радиус из начала координат) и проинтегрировать по углу θ от 0 до π. Представление решения в виде ряда и исследование его на оси симметрии можно найти в [6,7].

Поступила 2 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигул У. К.* Применение трехмерной теории упругости к анализу волнового процесса изгиба полубесконечной плиты при кратковременно действующей краевой нагрузке. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
2. *Векслер Н. Д.*, *Мянниль А. И.*, *Нигул У. К.* Применение метода сеток в теории типа Тимошенко для исследования переходных процессов деформации плит конечных размеров. Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 12.
3. *Петрашень Г. И.* Распространение упругих волн в слоисто-изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями. Уч. зап. ЛГУ, 1952, вып. 26, № 162.
4. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л., «Судостроение», 1972.
5. *Соболев С. Л.* Некоторые вопросы теории распространения колебаний, гл. 12. В кн. «Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики». Л. — М., ОНТИ, Гостехиздат, 1937.
6. *Огурцов К. И.* Волны напряжений в упругой плите. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
7. *Никифоровский В. С.*, *Онисько Н. И.* К вопросу о тыльном отколе в упругой плите. Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых, 1967, № 6.