

ТЕПЛОТДАЧА В КАНАЛАХ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ
НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ

В. И. Попов

(Новосибирск)

Рассматривается случай квазиизотермической теплоотдачи при ламинарном движении неньютоновских сред со скольжением в круглых и плоских каналах. В основу расчета положено совместное решение уравнений энергии, движения и реологического соотношения со специфическими граничными условиями, учитывающими скачок скорости и температуры на поверхности теплообмена.

Эксперименты показывают, что пристенное скольжение в обычных условиях может наблюдаться у структурно-вязких [1, 2], вязко-упругих [3, 4], вязко-пластичных [5, 6] и т. п. сред. Движение со скольжением может наблюдаться также у обычных, ньютоновских жидкостей при их движении в очень тонких капиллярах [7]. Имеются сведения [8], что при движении крови в капиллярах и артериолах фактический секундный расход через капилляр может превышать расход, подсчитанный по формуле Пуазейля (без учета скольжения) в 2—4 раза.

Скачок скорости и температуры на поверхности теплообмена может возникнуть вследствие кристаллизации, структурирования полимерных цепей или наличия упругих волн, поглощающих некоторое количество движения и тепла, а также в результате отлипания жидкости от поверхности.

Уравнение для энергии установившегося непрерывного осесимметричного ламинарного потока при числах Пекле $P > 10$ имеет вид

$$w \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) \quad (1)$$

Здесь w — скорость потока, t — температура потока, a — коэффициент теплопроводности.

Так как неньютоновские среды, проявляющие эффект пристенного скольжения, характеризуются значительными числами Прандтля $\sigma = \nu a^{-1} \gg 1$ (динамические возмущения распространяются интенсивнее тепловых), то можно считать процесс теплообмена сосредоточенным в узкой пристенной области $y = R - r$, а тепловой пограничный слой жидкости — плоским.

Пренебрегая в выражении (1) величиной y по сравнению с радиусом трубы R и вводя для удобства безразмерные переменные

$$v \equiv \frac{t - t_0}{t_w - t_0}, \quad X \equiv \frac{x}{D}, \quad Y \equiv \frac{y}{D}, \quad P \equiv \frac{D \langle w \rangle}{a}, \quad \omega(Y) \equiv \frac{w}{\langle w \rangle}$$

уравнение (1) в тепловом пограничном слое представим в виде

$$P \omega(Y) \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \quad (2)$$

Здесь t_0 — температура жидкости на границе теплового пограничного слоя, равная температуре жидкости на входе в канал, а $\langle w \rangle$ — средняя скорость потока.

Уравнение (2) является приближенным для трубы, но точным для плоского канала.

Введя переменную

$$\eta = F(Y) X^{-1/3} \quad (3)$$

можно привести уравнение (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$v'(\eta) [4/3 P\omega(Y) F(Y) X^{-1/3} + F''(Y) X^{-1/3}] + v''(\eta) [F'(Y)]^2 X^{-2/3} = 0 \quad (4)$$

Здесь $F(Y) \sim P\omega(Y)$ — пока неопределенная функция координаты y .

В общем случае $F(Y)$ находится из уравнения движения с использованием реологического соотношения для рассматриваемой жидкости.

Вязко-упругие жидкости, по-видимому, являются наиболее общим классом неньютоновских сред. Их реологическое поведение, в той или иной форме, должно отражать особенности движения, которые присущи структурно-вязким, вязко-пластичным и т. п. средам. Эффект пристенного скольжения у вязко-упругих сред проявляется весьма ощутимо, на что указывают прямые измерения проскальзывания расплава полимера у стенки, выполненные с использованием графитовых капилляров [9]. Известно также [10], что скорость скольжения вязко-упругих сред может составлять $\sim 80\%$ сдвиговой скорости.

Рассмотрим вид функции $\omega(Y)$ в случае, когда вязко-упругие свойства среды определены соотношениями [11]

$$\pm w' [\tau + f(\tau)]^{-1} \equiv \varphi = \varphi_0 + \theta [\tau + f(\tau)] \quad (5)$$

$$f(\tau) \equiv p_{xx} - p_{rr} = -\gamma_e \tau_* \ln(1 - \tau/\tau_*) \quad (6)$$

Здесь $w' \equiv dw/dn$ — градиент скорости по направлению n ; τ — напряжение сдвига; θ — коэффициент неустойчивости эластичной структуры; φ_0 — текучесть при $\tau \rightarrow 0$; γ_e — безразмерный коэффициент, являющийся мерой возникновения первой разности нормальных напряжений; τ_* — критическое значение касательного напряжения сдвига (напряжение насыщения).

При $\gamma_e = 0$ имеет место структурно-вязкий режим движения, а при $\theta = 0$ — движение с постоянной вязкостью.

Распределение касательных напряжений по сечению вязко-упругого потока в трубе, в предположении $p_{rr} - p_{\varphi\varphi} \approx 0$, определяется из условия равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x} (-p + p_{xx}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau), \quad \frac{\partial}{\partial r} (-p + p_{rr}) = 0 \quad (7)$$

Система уравнения (7) легко сводится к одному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} [-p(0, x) + p_{xx} - p_{rr}] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau)$$

Здесь $p(0, x)$ — давление на оси канала.

Из этого уравнения видно, что профиль касательных напряжений по сечению вязко-упругого потока линейный.

Для трубы

$$\tau = \tau_w \xi \quad (\xi = r/R) \quad (8)$$

где τ_w — касательное напряжение на стенке.

Запишем выражение для средней скорости потока в трубе в виде

$$1 = - \int_0^1 \xi^2 \frac{d\omega}{d\xi} d\xi \quad \left(\omega = \frac{w}{\langle w \rangle} \right) \quad (9)$$

Тогда с учетом (5) и (9) выражение для безразмерной скорости можно записать

$$\omega(\xi) = \left(\int_{\xi}^1 \psi T^* d\xi + 2\zeta_S D^{-1} \right) \left(\int_0^1 \xi^2 \psi T^* d\xi + 2\zeta_S D^{-1} \right)^{-1} \quad (10)$$

Здесь

$$T^* \equiv \xi [1 - \gamma_e (\Omega \xi)^{-1} \ln(1 - \Omega \xi)] [1 - \gamma_e \Omega^{-1} \ln(1 - \Omega)]^{-1}$$

$$\psi \equiv \frac{\Phi}{\Phi_w}, \quad \Omega \equiv \frac{\tau_w}{\tau_*} \ll 1$$

а Φ_w — текучесть жидкости вблизи стенки.

В выражении (10) использовано граничное условие, допускающее скольжение на стенке [12], в виде

$$w_S = \zeta_S \left(\frac{dw}{d\xi} \right)_{\xi=1}$$

где w_S — скорость скольжения, ζ_S — коэффициент скольжения.

Член $2\zeta_S D^{-1}$, учитывающий влияние скольжения, можно рассматривать как поправку к решению для непрерывного движения.

Подставляя в (10) соответствующие выражения из (5), (6), (8) и ограничиваясь малыми значениями параметра Ω , получим для круглой трубы

$$\omega(\xi) = 2 [1 - \xi^2 + 2/3 \varepsilon (1 - \xi^3) + 4\zeta_S D^{-1}] [1 + 0.8\varepsilon + 8\zeta_S D^{-1}]^{-1},$$

$$\varepsilon = \frac{\theta \tau_*}{\Phi_0} \Omega (1 + \gamma_e) \quad (11)$$

для плоского канала

$$\omega(\xi) = 1.5 [1 - \xi^2 + 2/3 \varepsilon (1 - \xi^3) + 4\zeta_S D^{-1}] [1 + 0.75\varepsilon + 6\zeta_S D^{-1}]^{-1} \quad (12)$$

Так как в тепловом пограничном слое $\xi = 1 - y/R$, $y \ll R$, то в выражениях (11) и (12) квадратичными членами можно пренебречь.

Тогда для круглой трубы имеем

$$\omega(Y) = (8Y(1 + \varepsilon) + 8\zeta_S D^{-1}) [1 + 0.8\varepsilon + 8\zeta_S D^{-1}]^{-1} \quad (13)$$

Следовательно

$$\frac{w_S}{\langle w \rangle} = \left(1 + \frac{0.8\varepsilon D}{8\zeta_S} + \frac{D}{8\zeta_S} \right)^{-1}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае скорость скольжения составляет малую долю средней скорости, если

$$0.125D(1 + 0.8\varepsilon) \gg \zeta_S$$

В соответствии с (13) $F(Y)$ удобно определить как

$$F(Y) = (Pm)^{1/3} (Y + S), \quad m = (1 + 0.8\varepsilon n^{-1} + 8S)^{-1}, \quad S = \zeta_S / Dn, \\ n = 1 + \varepsilon \quad (14)$$

Получим решение для случая $t_w = \text{const.}$ Подставляя (13) и (14) в (4), найдем

$$v''(\eta) + \frac{8}{9}\eta^2 v'(\eta) = 0 \quad (15)$$

Граничные условия для (15) имеют вид

$$\begin{aligned} \eta = S(Pm/X)^{1/3} \equiv Z, \quad v = v_S \quad \text{при } Y \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow \infty, \quad v = 1 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Первое граничное условие допускает скачок между температурой стенки и температурой вязко-упругой среды на поверхности стенки. Выражение для скачка температуры можно записать в виде, аналогичном условию скольжения для скорости

$$v_S = \frac{\varepsilon_T}{\delta} \frac{\partial v}{\partial Y} \Big|_{Y=0} \quad (16)$$

Здесь $\varepsilon_T \equiv \lambda/\alpha_S$ — величина температурного скачка. Решением (15) является

$$v = \left[\int_z^\eta \exp\left(-\frac{8}{9}\eta^3\right) d\eta + v_S \int_z^\infty \exp\left(-\frac{8}{9}\eta^3\right) d\eta \right] \left[\int_z^\infty \exp\left(-\frac{8}{9}\eta^3\right) d\eta \right]^{-1} \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), имеем

$$v_S = L \left[L + \int_z^\infty \exp\left(-\frac{8}{9}\eta^3\right) d\eta \right]^{-1}, \quad L \equiv \varepsilon_T D^{-1} \left(\frac{Pm}{X}\right)^{1/3} \exp\left(-\frac{8}{9}Z^3\right) \quad (18)$$

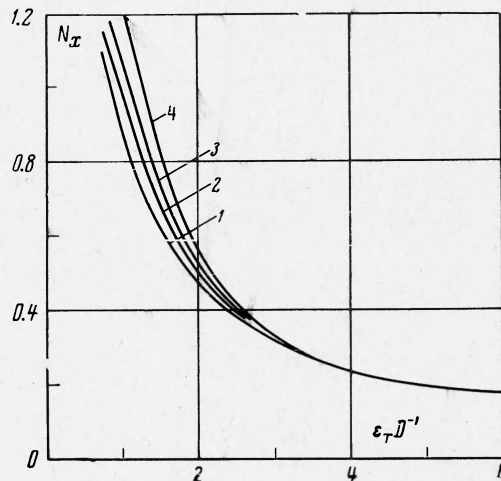
Выражение (18) можно преобразовать к виду

$$v_S = \left[1 + \left[\nu c \gamma \exp\left(-\frac{8}{9}Z^3\right) \right]^{-1} \alpha_S \int_z^\infty \exp\left(-\frac{8}{9}\eta^3\right) d\eta \right]^{-1}$$

из которого видно, что при очень больших числах Прандтля с температурный скачок будет незначительной частью перепада температуры $t_w - t_0$ и его можно не учитывать. В (18) ν , c и γ — соответственно кинематическая вязкость, теплоемкость и удельный вес жидкости.

Локальное значение критерия Нуссельта равно

$$N_x = \frac{\partial v}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = \left\{ \frac{\varepsilon_T}{D} + \frac{1 - \Gamma(1/3, Z^3) / \Gamma(1/3)}{1.077 (Pm/X)^{1/3} \exp(-8/9 Z^3)} \right\}^{-1} \quad (19)$$



На фигуре приведены результаты расчетов по этой формуле для случая $PmX^{-1} = 10$ (кривые 1—4 соответствуют значениям $S = 0, 0.2, 0.6, 0.8$). Видно, что скольжение может оказывать заметное влияние на теплоотдачу лишь в области малых значений $\varepsilon_T D^{-1}$, т. е. когда число Прандтля очень велико.

Для случая $t_w = \text{const}$ толщина теплового пограничного слоя имеет вид

$$\delta_T = \varepsilon_T + 0.925 \left[1 - \frac{\Gamma(1/3, Z^3)}{\Gamma(1/3)} \right] \left[\left(\frac{Pm}{xD^2} \right)^{1/3} \exp \left(-\frac{8}{9} Z^3 \right) \right]^{-1} \quad (20)$$

Видно, что граничное условие на стенке существенно влияет на толщину теплового пограничного слоя.

Получим решение для случая $q_w = \text{const}$. Продифференцировав уравнение (2) по Y и введя отношение плотностей теплового потока по формуле

$$q = \frac{\partial t}{\partial Y} \left(\frac{\partial t}{\partial Y} \right)_{Y=0}^{-1}$$

имеем

$$8Pm \frac{\partial q}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{Y+S} \frac{\partial q}{\partial Y} \right) \quad (21)$$

Введением переменной (3) выражение (21) преобразуется к виду

$$q''(\eta) + \frac{8\eta^3 - 3}{3\eta} q'(\eta) = 0$$

решение которого при граничных условиях

$$Y \rightarrow 0, \quad \eta = Z, \quad q = 1; \quad Y \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad q = 0$$

имеет вид

$$q = \int_{\eta}^{\infty} \eta \exp \left(-\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta \left[\int_Z^{\infty} \eta \exp \left(-\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta \right]^{-1}$$

Следовательно

$$\theta^* = \left(\frac{X}{mP} \right)^{1/3} \left[\int_Z^{\infty} \eta \exp \left(-\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta \right]^{-1} \left[\eta \int_{\eta}^{\infty} \eta \exp \left(-\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta - \frac{3}{8} \exp \left(-\frac{8}{9} \eta^3 \right) \right] + C$$

Здесь $\theta^* \equiv \lambda(t - t_0) / q_w D$ — безразмерная температура.

Постоянная интегрирования находится из условия (16). После вычислений найдем

$$\theta^* = \left(\frac{X}{mP} \right)^{1/3} \left[\int_Z^{\infty} \eta \exp \left(-\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta \right]^{-1} \left[\eta \int_{\eta}^{\infty} \eta \exp \left(-\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta - \frac{3}{8} \exp \left(-\frac{8}{9} \eta^3 \right) + \left(\frac{\varepsilon_T}{D} - S \right) \int_Z^{\infty} \eta \exp \left(-\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta + \frac{3}{8} \exp \left(-\frac{8}{9} Z^3 \right) \right] \quad (22)$$

Определяя местное значение критерия Нуссельта

$$N_x = \frac{q_w D}{(t_w - t_0) \lambda}$$

из (22) получим

$$N_x = \left\{ \frac{\varepsilon_T}{D} - S + \frac{\exp(-8/9 Z^3)}{1.29 (mP/X)^{1/3} [1 - \Gamma(2/3, Z^3) / \Gamma(2/3)]} \right\}^{-1} \quad (23)$$

Аналогичные выражения получаются для плоского канала с той лишь разницей, что вместо коэффициентов 1.077 ($t_w = \text{const}$) и 1.29 ($q_w = \text{const}$) следует использовать соответственно 0.978 и 1.175. При этом параметр m определяется соотношением

$$m = n(1 + 0.75\epsilon + 6\zeta_s D^{-1})^{-1}$$

В заключение следует отметить, что при отсутствии скачка скоростей и температур на поверхности теплообмена, а также $\gamma_e = 0$ выражения для теплоотдачи переходят в известные соотношения для структурно-вязких [13], а при $m \rightarrow 1$ ($\theta \approx 0$) для обычных ньютоновских жидкостей [14].

Поступила 9 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Уилкинсон У. Л. Неньтоновские жидкости. М., «Мир», 1964.
2. Жданов Ю. А., Дубовицкий В. Ф. Исследование течения расплавов полимеров в цилиндрических каналах. В сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3. Минск, «Наука и техника», 1968.
3. Иванова Л. И., Виноградов Г. В. Экспериментальное исследование эластической турбулентности и пристенного скольжения эластомеров в широком интервале температур. Механика полимеров, 1968, № 2.
4. Galt I., Maxwell B. Velocity profiles for polyethylene melts. Modern Plastics, 1964, vol. 42, No. 4.
5. Ким А. Х., Сугак М. Б. Использование эффекта пристенного скольжения при решении задач о движении неньтоновской жидкости в каналах конической геометрии. В сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3. Минск, «Наука и техника», 1968.
6. Козеев М. П. Экспериментальное исследование явлений пристенного скольжения при движении некоторых вязко-пластичных систем в конических насадках. В сб. «26-я Научно-техническая конференция Белорусского политехнического института». Материалы секции теорет. и прикл. механ., Минск, 1970.
7. Дерягин Б. В., Федякин М. М. Скольжение жидкости в капиллярах. Докл. АН СССР, 1968 т. 182, № 6.
8. Перельман И. М. О пристенном скольжении крови в капиллярах. Коллоидн. ж., 1965, т. 27, вып. 3.
9. Huseby T. W. Hypothesis on a certain flow instability in polymer melts. Trans. Soc. Rheol., 1966, vol. 10, No. 1.
10. Lupton I. M., Register I. W. Melt flow of polyethylene at high rates. Polymer Engng and Sci., 1965, vol. 5, No. 4.
11. Кутателадзе С. С., Хабахпашева Е. М., Попов В. И., Груздева И. М., Перепелца Б. В. Гидравлические сопротивления и теплоотдача при стабилизированном течении неньтоновских жидкостей. Инж.-физ. ж., 1970, т. 18, № 6.
12. Померанцев А. А. Курс лекций по теории тепло-массообмена. М., «Высшая школа», 1965.
13. Попов В. И., Хабахпашева Е. М. Расчет теплообмена при ламинарном течении в трубах жидкостей со структурной вязкостью. ПМТФ, 1966, № 3.
14. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967.