

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФУНДИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ ВБЛИЗИ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СТЕНКИ

И. И. Литвинов

(Москва)

На основе кинетического уравнения Больцмана получено и решено численно точное интегральное диффузионное уравнение для распределения частиц, справедливое во всей области перехода от макроскопического описания к кинетическому. Показано, что, несмотря на сильное искажение угловой части функции распределения, ход плотности у стенки мало изменяется по сравнению с диффузионным.

Для описания поведения частиц в нейтральном газе и плазме, характерный размер L которых существенно превышает длину свободного пробега λ , обычно применяются макроскопические уравнения диффузионного типа [1]. Однако в пристеночных слоях с толщиной порядка λ (λ -слой Кнудсена [2]), где проявляется дискретная структура среды, эти уравнения непригодны. Строго говоря, здесь необходимо кинетическое описание. Аналогичные вопросы перехода от макроскопического описания во внутренней области к кинетическому на границах возникают также и в теории переноса излучения в газах [3,4].

Кинетический подход в пределах λ -слоя обычно применяется для написания фиктивных макроскопических граничных условий на стенке, например, для уравнения диффузии, решение которого вне λ -слоя с той или иной точностью совпадало бы с истинным решением.

Простейшим граничным условием для плазмы у стенки является условие Шоттки [5] $n_w = 0$, использованное при описании амбиполярной диффузии. Аналогичное условие было применено Тонксом [6] для описания диффузии плазмы в магнитном поле. Более точное граничное условие с учетом конечного отношения λ/L было выведено де Гроотом [7] и затем с рядом уточнений применялось В. А. Фабрикантом [8] в задачах о переносе излучения в плазме и В. Л. Грановским [9] для описания диффузии ионов в положительном столбе в присутствии электрических полей.

Однако эти граничные условия, полученные в диффузионном приближении, не являются точными из-за сильного нарушения в окрестности λ -слоя известных критериев диффузионного описания. Поэтому, прежде чем обсуждать применимость этих результатов при наличии электрических и магнитных полей, следует получить ответ на основной вопрос о точности этих граничных условий при простой диффузии частиц. С этой целью ниже сначала качественно обсуждается картина явлений в окрестности λ -слоя, затем на основе кинетического уравнения Больцмана выводится и решается численно точное интегральное диффузионное уравнение для плотности частиц и их функции распределения, справедливое во всей области перехода. Далее проводится сопоставление обоих решений.

1. Граничные условия и распределение плотности в диффузионном приближении. Рассмотрим простейший случай плоской стационарной диффузии частиц на неподвижном однородном фоне рассеивающих центров при наличии в точке $x = 0$ поглощающей границы. При постоянстве потока ($j(x) = -I$) распределение плотности в диффузионном приближении имеет вид

$$n(x) = \frac{I}{D} x + n_w \quad (1.1)$$

Граничное условие для n_w вытекает из равенства потока через границу λ -слоя и потока частиц на стенку j_w [8].

Потоки частиц обычно вычисляются по методу свободного пробега [1]. Его обоснование на базе кинетического уравнения Больцмана дается в следующем разделе.

В общем случае линейного или пространственного блуждания частиц направленные потоки имеют вид

$$j_{\pm} = \pm j_0 + \frac{1}{2} j_D \quad (j_D = -Ddn/dx) \quad (1.2)$$

в котором хаотические потоки j_0 соответственно равны $\frac{1}{2}nv$ или $\frac{1}{4}nv$, а коэффициенты диффузии $D = \lambda v$ или $\frac{1}{3} \lambda v$.

Легко убедиться, что в указанном приближении потоки $j_{\pm}(x)$ равны хаотическим потокам в сечениях, удаленных от x на диффузионную длину пробега λ_D (соответственно λ или $\frac{2}{3} \lambda$ [9]).

Согласно [8,9] за границу λ -слоя можно принять сечение $x = \lambda_D$. Тогда, считая поток через это сечение равным диффузионному, а поток на стенку j_w — направленному и пренебрегая изменением dn/dx на длине λ_D , имеем на стенке

$$n_w = \lambda_D dn/dx \quad (1.3)$$

Но так как согласно предыдущему $j_w = -j_0(\lambda_D)$, упомянутое сшивание потоков имеет смысл равенства потоков j_0 и j_D на диффузионной границе $x = \lambda_D$, для которой

$$n_{\Gamma} = 2\lambda_D dn/dx \quad (1.4)$$

Хотя (1.3) и (1.4) в линейном приближении равноценны, как будет видно в дальнейшем, (1.4) ближе соответствует истине, так как оно берется на границе раздела двух зон, на определенном удалении от стенки.

С учетом (1.3), (1.4) распределение (1.1) приобретает вид

$$n^{\circ}(x) = 1 + \frac{x}{\lambda_D} \quad \left(n^{\circ} = \frac{n}{n_w} \right) \quad (1.5)$$

Таким образом, в окрестности λ -слоя характерный масштаб для плотности порядка λ , причем диффузионный поток уже не мал по сравнению с хаотическим. Величина вносимой при этом погрешности может быть определена лишь после сопоставления распределения (1.5) с точным кинетическим решением.

2. Кинетическое уравнение для распределения частиц в переходном слое. Как известно [2], уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = J_{st} \quad (2.1)$$

где

$$J_{st} = \iiint (f'f_1' - ff_1) g \sigma(g, \vartheta) d\omega dv_1 = J_1 - fJ_2$$

может быть представлено в эквивалентной интегральной форме. В плоском стационарном случае и в отсутствие внешних сил его решение имеет вид

$$f(x, v) = f(x_0, v) \exp \left\{ -\frac{1}{v_x} \int_{x_0}^x J_2(x', v) dx' \right\} + \frac{1}{v_x} \int_{x_0}^x J_1(x', v) \exp \left\{ -\frac{1}{v_x} \int_{x'}^x J_2(x'', v) dx'' \right\} dx' \quad (2.2)$$

Здесь начальное сечение x_0 для $v_x > 0$ берется слева от x , а для $v_x < 0$ — справа. Это выражение описывает тот очевидный факт, что число частиц в заданном скоростном элементе v, dv в точке x равно их числу по траектории в точке x_0 (с учетом их убыли из-за столкновений) плюс те

частицы, которые попали в него по пути и дошли до x без столкновений. Если выбрать сечение x_0 вдали от x , то тогда первое слагаемое в (2.2) пропадает. Следовательно, в этом случае вид начальной функции распределения $f(x_0, v)$ из-за сильного затухания по длине не имеет значения.

Для дальнейшего конкретизируем вид интеграла столкновений. Так как согласно предыдущему рассеивающие центры считаются неподвижными, интеграл столкновений существенно упрощается

$$J_{st} = n_0 \int_0^x [f(v') - f(v)] v \sigma(v, \vartheta) dv \quad (2.3)$$

где n_0 — плотность рассеивающих центров.

Интеграл J_2 в (2.3) находится сразу

$$J_2 = n_0 v \sigma_0(v) = 1/\tau(v) \quad (2.4)$$

где $\sigma_0(v)$ — полное сечение отклонения.

Тогда решение (2.2) приобретает вид

$$f(x, v) = \frac{1}{v_x} \int_{x_0}^x J_1(x', v) \exp\left(-\frac{x-x'}{v_x \tau}\right) dx' \quad (2.5)$$

Умножая затем обе части (2.5) на v_x и интегрируя по v , найдем поток, проходящий через сечение x

$$j(x) = \int_{v_x}^x \int_{v_x}^x J_1(x', v) \exp\left(-\frac{x-x'}{v_x \tau}\right) dx' dv \quad (2.6)$$

Легко видеть, что (2.6) совпадает с выражением, полученным на основе метода свободных пробегов [1], причем

$$J_1(x', v) = \frac{\chi(x', v)}{\tau}$$

В общем случае функция распределения рассеянных частиц $\chi(x', v)$ зависит от их распределения перед столкновением $f(x', v)$ и конкретного вида сечения рассеяния $\sigma(\vartheta)$. Однако для сечения упругих шаров, когда частицы рассеиваются равномерно по сфере $|v| = \text{const}$, функция $\chi(x', v)$ становится изотропной и определяется средним числом частиц по сфере. Следовательно

$$J_1(x', v) = \frac{1}{4\pi\tau} \int_0^{\pi} f(x', v) d\vartheta \quad (2.7)$$

Считая далее распределение по v моноэнергетическим и интегрируя (2.5) по v , получаем интегральное уравнение для плотности частиц этой группы

$$n(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{x_0}^x \int_{\Omega} n(x') \exp\left(-\frac{x-x'}{\lambda \cos \theta}\right) \frac{dx' d\Omega}{\lambda \cos \theta} \quad (2.8)$$

где θ — угол между скоростью v и осью X .

Определив $n(x)$, можно затем найти их угловую функцию распределения

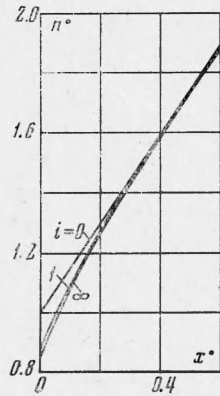
$$f(\Omega) = \frac{1}{n} \frac{dn}{d\Omega}$$

Если λ не зависит от ν , уравнению (2.8) удовлетворяет также и полная плотность частиц.

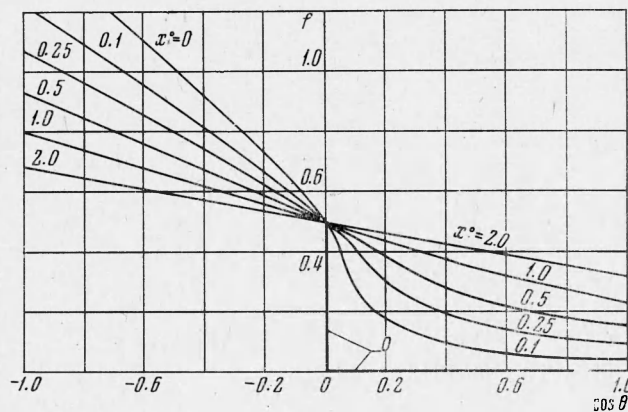
Интегрируя затем (2.8) по Ω и переходя к безразмерным длинам $x^\circ = x/\lambda$ и $z = |x - x'|/\lambda$, приводим это уравнение к виду

$$n(x^\circ) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{x^\circ} n(x^\circ - z) E_1(z) dz + \int_0^\infty n(x^\circ + z) E_1(z) dz \right] \quad (2.9)$$

где ядро $E_1(z)$ — интегральная экспонента [4,10].



Фиг. 1



Фиг. 2

Аналогично для угловой части функции распределения с учетом (2.8) и (2.9) имеем

$$f(x^\circ, \theta) = \frac{1}{2n(x^\circ)} \int_0^{(x^\circ \sec \theta, \infty)} n(x^\circ - t \cos \theta) e^{-t} dt \quad (2.10)$$

в котором $t = z |\sec \theta|$. Здесь первый верхний предел берется для $0 \leq \theta < 1/2\pi$, а второй — для $1/2\pi \leq \theta < \pi$.

3. Численное решение полученных уравнений и обсуждение результатов. Как следует из вида (2.9), решение этого уравнения может отличаться на постоянный множитель, пропорциональный потоку на стенку I . На больших расстояниях от стенки $x^\circ \gg 1$ решение должно переходить в линейную функцию, причем истинный градиент при $x^\circ \gg 1$ из-за быстро убывающего множителя $E_1(z)$ устанавливается очень медленно. Поэтому для решения (2.9) методом итераций большое значение имеет правильный выбор нулевого приближения.

В качестве такого приближения, весьма точного при $x^\circ \gg 1$, можно взять диффузионное распределение (1.5)

$$n^\circ = 1 + 3/2 x^\circ \quad (3.1)$$

Интересно отметить, что для линейного блуждания, для которого получается уравнение типа (2.9) с ядром e^{-z} , нулевое приближение (1.5) в виде $n^\circ = 1 + x^\circ$, как не трудно убедиться прямой подстановкой, является точным решением.

Численное решение (2.9) для приближения (3.1) привело к быстрой сходимости итерационного процесса (фиг. 1). Так, уже для второй итерации плотность в нуле $n_2^\circ(0)$ превышает точное значение $n_\infty^\circ(0) = 0,855$ не более чем на 0.65%, а шестая итерация дает точность в нуле не хуже $\epsilon = 10^{-4}$, причем возмущение решения по x° для заданной точности распространяется не далее 4—5 единиц.

При $x^\circ \geq 0.5$ решение идет несколько выше приближения (3.1).

Судя по фиг. 1, отклонение диффузионного распределения от точного даже при $x = 0$ составляет не более 15%. Это приближение является практически точным вне

λ -слоя с краевым условием (1.4) на его границе. Решение же при линейном блуждании частиц является точным и внутри λ -слоя.

При помощи (2.10) затем по решению $n^\circ(x)$ была вычислена угловая функция распределения (фиг. 2). Сравним ее с распределением в диффузионном приближении. Считая оба предела в (2.10) бесконечными и переходя к размерным переменным, имеем в диффузионном приближении

$$f(x, \theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{dx} \cos \theta \right) \quad (3.2)$$

Последнее слагаемое в (3.2) является мерой отклонения распределения от равновесного. Сравнивая (3.2) с точным решением, замечаем, что для частиц, идущих к стенке ($\cos \theta < 0$), их различие в λ -слое несущественно, а для $\cos \theta > 0$ искажающее влияние стенки велико, особенно для малых расстояний до стенки ($x^\circ \sec \theta \lesssim 1$). Однако уже при $x^\circ = 1$ это различие незначительно, а при $x^\circ = 2$ оба распределения практически полностью совпадают.

Достаточно хорошая применимость диффузионного приближения в этом далеком от равновесного случае объясняется двумя причинами. Первая из них состоит в том, что здесь существенную роль играет вид функции $\chi(x', v)$, которая при выбранном законе рассеяния остается сферически симметричной при любой анизотропии функции распределения. При законе рассеяния, отклоняющемся от модели упругих шаров, точность этого приближения в λ -слое уменьшается.

Вторая причина заключается в следующем. Согласно (1.3) и (1.4) плотность формально должна была бы обращаться в нуль за стенкой на расстоянии λ_D . Размещение при $x = 0$ стенки, непрозрачной для частиц слева и поглощающей частицы справа, приводит к нарушению механизма формирования потоков j_{\pm} вблизи нее. Однако из-за малости плотности слева это возмущение, как показывают простые оценки, не должно превышать 15—20%, что и подтверждается численными результатами.

Автор благодарит М. Н. Когана за полезное обсуждение.

Поступила 5 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
4. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
5. Schottky W. Diffusionstheorie der positiven Säule. Phys. Z., 1924, Bd 25, Nr 23, S. 635.
6. Tonks L. Theory of magnetic effects in the plasma of an arc. Phys. Rev., 1939, vol. 56, No. 4, p. 360.
7. Groot W. de De randvoorwaarde «concentratie gelijk nul» bij diffusie-problemen. Physica, 1928, Bd 8, Nr 1, S. 23.
8. Фабрикант В. А. Возбуждение атомов в газовом разряде. Докл. АН СССР, 1939, т. 23, № 3, стр. 224.
9. Грановский В. Л. Диффузия ионов в разряде и начальная скорость деионизации газа. Докл. АН СССР, 1939, т. 23, № 9, стр. 880.
10. Пагурова В. И. Таблицы интегро-экспоненциальной функции. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1959.