

УДК 519.63

О монотонности схемы CABARET, аппроксимирующей многомерный скалярный закон сохранения*

В.В. Остапенко, Т.В. Протопопова

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090

E-mails: ostapenko_vv@ngs.ru (Остапенко В.В.), tatiana@hydro.nsc.ru (Протопопова Т.В.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 13, 2020.

Остапенко В.В., Протопопова Т.В. О монотонности схемы CABARET, аппроксимирующей многомерный скалярный закон сохранения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 4. — С. 431–440.

Проведен анализ монотонности двухслойной по времени схемы CABARET, аппроксимирующей многомерный скалярный закон сохранения. Предложена модификация этой схемы, которая в линейном приближении сохраняет монотонность пространственно одномерных разностных решений и, как следствие, обеспечивает подавление нефизических осцилляций при расчете многомерных разрывных решений. Приведены результаты тестовых расчетов, иллюстрирующие преимущества модифицированной схемы.

DOI: 10.15372/SJNM20200406

Ключевые слова: разностная схема CABARET, многомерный скалярный закон сохранения, свойство монотонности.

Ostapenko V.V., Protopopova T.V. On monotonicity of CABARET scheme approximating the multidimensional scalar conservation law // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 4. — P. 431–440.

The monotonicity of the two-layer with respect to time CABARET scheme approximating the multidimensional scalar conservation law is analyzed. There is proposed a modification of this scheme. This modification of the CABARET scheme retains the monotonicity of the one-dimensional difference solutions in the linear approximation, and, as a result, it provides an increased smoothness during the calculation of the multidimensional discontinuous solutions. The results of test calculations are given. They illustrate the advantages of the modified scheme.

Keywords: CABARET difference scheme, multidimensional scalar conservation law, monotonicity property.

1.

Для численного решения гиперболических уравнений была предложена трехслойная по времени и двухточечная по пространству схема Urwind Leapfrog [1], которая имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях и является явной и условно устойчивой при числах Куранта $r \in (0, 1]$. Детальный анализ этой схемы был проведен в работах [2, 3], в которых с учетом кососимметричности своего пространственного шаблона она была названа схемой CABARET. Основные достоинства этой схемы связаны с тем, что она задана на компактном пространственном шаблоне и является обратимой по

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10033-П).

времени и точной при двух различных числах Куранта $r = 0.5; 1$, что наделяет ее уникальными диссипативными и дисперсионными свойствами [3]. Для численного решения уравнений одномерной газовой динамики был разработан балансно-характеристический вариант схемы CABARET [4], который с учетом коррекции потоковых переменных (необходимой для монотонизации разностного решения на ударных волнах) показал высокую точность при расчете классического теста Blast Wave [5]. Было показано, что разработанная в [4] схема при определенных ограничениях на численные начальные данные является монотонной [6] и сильно монотонной [7] при числах Куранта $r \in (0, 0.5]$.

В настоящее время широко применяется двухслойная по времени форма записи схемы CABARET [8], в частности, для численного моделирования пространственно многомерных газодинамических течений [9], мезомасштабных течений в океане [10] и волновых течений мелкой воды над неровным дном [11]. Монотонность этой схемы при аппроксимации линейного уравнения переноса в одномерном случае изучалась в [12], а в двумерном — в [13]. Условия монотонности двухслойной по времени схемы CABARET, аппроксимирующей квазилинейный скалярный закон сохранения, исследовались в [14] и [15].

В этой работе проведен анализ монотонности двухслойной по времени схемы CABARET, аппроксимирующей многомерный квазилинейный скалярный закон сохранения. Показано, что поскольку при стандартной коррекции потоковых переменных схема CABARET не сохраняет монотонности пространственно одномерных разностных решений [12–15], то это приводит к появлению на первых временных шагах схемных осцилляций при расчете пространственно многомерных разрывных решений. Предложена модификация многомерной схемы CABARET, которая в линейном приближении сохраняет монотонность пространственно одномерных разностных решений и, как следствие, обеспечивает подавление нефизических осцилляций при расчете многомерных разрывных решений. Приведены результаты тестовых расчетов, иллюстрирующие преимущества модифицированной схемы.

2.

Рассмотрим задачу Коши для m -мерного скалярного закона сохранения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i(v)}{\partial x_i} = 0, \quad v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}), \quad (1)$$

с монотонно возрастающими функциями потоков $f_i(v)$:

$$a_i(v) = f'_i(v) > 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

и ограниченной начальной функцией $v_0(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Обобщенное решение этой задачи $v(\mathbf{x}, t)$ существует при всех $t > 0$ и является ограниченным.

Аппроксимируем задачу (1) двухслойной по времени схемой CABARET [8], заданной на равномерной по пространству прямоугольной сетке

$$\{\mathbf{x}_j, t_n\} : \mathbf{x}_j = \mathbf{j}\mathbf{h}, \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad (3)$$

в которой $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ — мультииндекс, $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ — постоянный вектор пространственных шагов схемы, $\mathbf{j}\mathbf{h} = (j_1 h_1, j_2 h_2, \dots, j_m h_m)$, τ_n — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости:

$$\tau_n = r \min_i h_i / \max_{\mathbf{k}} |\mathbf{a}(U_{\mathbf{k}}^n)|, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2}, \quad (4)$$

$r \in (0, 1)$ — число Куранта, $U_{\mathbf{k}}^n = u(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}, t_n)$ — консервативная сеточная переменная, заданная в полужелтых пространственных узлах

$$\mathbf{x}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}\mathbf{h} = ((j_1 + 1/2)h_1, (j_2 + 1/2)h_2, \dots, (j_m + 1/2)h_m),$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{j} + \mathbf{e} \cdot 1/2$, $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)$. В этой схеме наряду с консервативными переменными $U_{\mathbf{k}}^n$ используются также потоковые переменные $(u_{\mathbf{k}}^n)_{\pm}^{\pm} = T_i^{\pm 1/2} \circ U_{\mathbf{k}}^n$, где T_i^{α} — оператор сдвига на α шагов h_i по пространственной переменной x_i , действие которого на каждую функцию $u(\mathbf{x}, t)$ определяется равенством

$$T_i^{\alpha} \circ u(\mathbf{x}, t) = u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \alpha h_i, x_{i+1}, \dots, x_m).$$

При реализации схемы CABARET на первом этапе по известным на n -м временном слое величинам $U_{\mathbf{k}}^n$ и $(u_{\mathbf{k}}^n)_{\pm}^{\pm}$ из разностных уравнений

$$\frac{U_{\mathbf{k}}^{n+1/2} - U_{\mathbf{k}}^n}{\tau_n/2} + \sum_{i=1}^m \frac{f_i((u_{\mathbf{k}}^n)_i^+) - f_i((u_{\mathbf{k}}^n)_i^-)}{h_i} = 0 \quad (5)$$

находятся значения консервативных переменных $U_{\mathbf{k}}^{n+1/2}$ на полужелтом временном слое $n + 1/2$. На втором этапе с учетом условий (2) путем линейной экстраполяции по формулам

$$(\bar{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+ = 2U_{\mathbf{k}}^{n+1/2} - (u_{\mathbf{k}}^n)_i^-, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

определяются предварительные значения потоков на $(n + 1)$ -м временном слое.

На третьем этапе при помощи стандартной функции ограничителя

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M, \\ m, & u \leq m, \\ M, & u \geq M \end{cases} \quad (7)$$

происходит корректировка потоков (6):

$$(u_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+ = F\left((\bar{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+, (m_{\mathbf{k}}^n)_i, (M_{\mathbf{k}}^n)_i\right), \quad (8)$$

$$(m_{\mathbf{k}}^n)_i = \min\left((u_{\mathbf{k}}^n)_i^-, U_{\mathbf{k}}^n, (u_{\mathbf{k}}^n)_i^+\right) + \tau_n (g_{\mathbf{k}}^n)_i, \quad (9)$$

$$(M_{\mathbf{k}}^n)_i = \max\left((u_{\mathbf{k}}^n)_i^-, U_{\mathbf{k}}^n, (u_{\mathbf{k}}^n)_i^+\right) + \tau_n (g_{\mathbf{k}}^n)_i, \quad (10)$$

$$(g_{\mathbf{k}}^n)_i = - \sum_{l \neq i} \frac{f_l((u_{\mathbf{k}}^n)_l^+) - f_l((u_{\mathbf{k}}^n)_l^-)}{h_l}. \quad (11)$$

Сеточные функции (11) получаются путем аппроксимации источниковых членов, возникающих при записи уравнения (1) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f_i(v)}{\partial x_i} = - \sum_{l \neq i} \frac{\partial f_l(v)}{\partial x_l}.$$

На четвертом (завершающем) этапе из разностных уравнений

$$\frac{U_{\mathbf{k}}^{n+1} - U_{\mathbf{k}}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \sum_{i=1}^m \frac{f_i\left((u_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+\right) - f_i\left((u_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^-\right)}{h_i} = 0 \quad (12)$$

находятся значения консервативных переменных $U_{\mathbf{k}}^{n+1}$ на $(n+1)$ -м временном слое.

3.

Было показано [14, 15], что в пространственно одномерном случае ($m = 1$) коррекция потоков (8)–(11) не гарантирует монотонности схемы CABARET, т. е. при любых числах Куранта $r \in (0, 1)$ существуют такие одномерные решения этой схемы, которые будучи монотонными по пространственной переменной на начальном временном слое $n = 0$ теряют свою монотонность при переходе на следующий временной слой $n = 1$. Из тестовых расчетов следует, что при $r \in (0, 0.5]$ возникающие схемные осцилляции затухают через несколько временных шагов, в то время как при $r \in (0.5, 1)$ их амплитуда с течением времени изменяется незначительно.

Аналогичная ситуация имеет место при расчете по стандартной схеме CABARET (5)–(12) пространственно многомерных разрывных решений. Для иллюстрации этого на рисунке 1 на два момента времени ($n = 1; 3$) приведены результаты численного расчета задачи Коши (1) для двумерного ($m = 2$) нелинейного уравнения переноса с кубическими функциями потоков $f_1 = f_2 = v^3/3$ и со следующими разрывными кусочно-постоянными начальными данными:

$$v_0(\mathbf{x}) = v_0(x_1, x_2) = \begin{cases} 2, & \mathbf{x} \in K, \\ 1, & \mathbf{x} \notin K, \end{cases} \quad (13)$$

где $K = \{(x_1, x_2) : 1 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 2\}$. Расчеты проводились на сетке (3) с пространственными шагами $h_1 = h_2 = h = 0.1$, числом Куранта $r = 0.5$ и сеточными начальными данными:

$$U_{\mathbf{k}}^0 = \begin{cases} 2, & \mathbf{x}_{\mathbf{k}} \in K, \\ 1, & \mathbf{x}_{\mathbf{k}} \notin K, \end{cases} \quad (u_{\mathbf{k}}^0)_i^{\pm} = \frac{T_i^{\pm 1} + T_i^0}{2} \circ U_{\mathbf{k}}^0, \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Из рис. 1 следует, что на первых временных шагах консервативные переменные $U_{\mathbf{k}}^n$, где $\mathbf{k} = (j_1 + 1/2, j_2 + 1/2)$, имеют заметные схемные осцилляции на фронте ударной волны, которые с течением времени постепенно затухают.

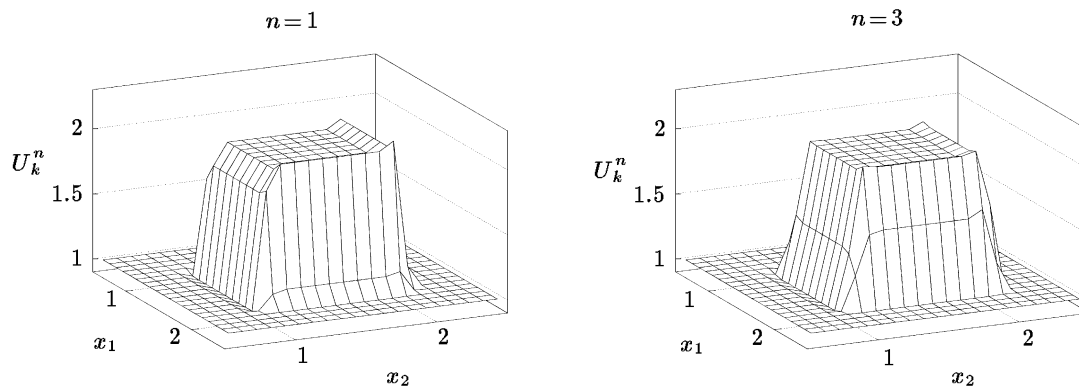


Рис. 1. Консервативные переменные $U_{\mathbf{k}}^n$, полученные по стандартной схеме CABARET

4.

Для аппроксимации многомерного линейного уравнения переноса была предложена [13] модификация двухслойной по времени схемы CABARET, сохраняющая монотонность относительно всех пространственно одномерных разностных решений. На случай квазилинейного скалярного закона сохранения (1) мы обобщим эту модификацию следующим образом. На первом этапе по разностным уравнениям (5) вычисляются значения консервативной переменной $U_{\mathbf{k}}^{n+1/2}$. На втором этапе из уравнения (6) определяются предварительные значения потоковой переменной $(\bar{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+$, которые на третьем этапе корректируются по формуле

$$(\hat{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+ = F\left((\bar{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+, (m_{\mathbf{k}}^n)_i, (M_{\mathbf{k}}^n)_i\right), \quad (15)$$

где функция F и величины $(m_{\mathbf{k}}^n)_i$, $(M_{\mathbf{k}}^n)_i$ задаются соотношениями (7), (9) и (10).

Если выполнены неравенства

$$T_i^{-1} \circ U_{\mathbf{k}}^n \leq U_{\mathbf{k}}^n \leq T_i^1 \circ U_{\mathbf{k}}^n, \quad (16)$$

означающие локальное монотонное возрастание функции $U_{\mathbf{k}}^n$ в i -м пространственном направлении, то при помощи функции

$$F_1(u, M) = \begin{cases} u, & u \leq M, \\ M, & u \geq M, \end{cases} \quad (17)$$

ограничивающей сверху, проводится дополнительная коррекция потока $(\tilde{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+$ по формуле

$$(\hat{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+ = F_1\left((\tilde{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+, (\psi_{\mathbf{k}}^n)_i + \tau_n (g_{\mathbf{k}}^n)_i\right), \quad (18)$$

где

$$(\psi_{\mathbf{k}}^n)_i = \frac{2(U_{\mathbf{k}}^n - (1 - (r_{\mathbf{k}}^n)_i)(u_{\mathbf{k}}^n)_i^-)}{(r_{\mathbf{k}}^n)_i} - (u_{\mathbf{k}}^n)_i^+, \quad (r_{\mathbf{k}}^n)_i = \frac{\tau_n a_i (U_{\mathbf{k}}^{n+1/2})}{h_i}. \quad (19)$$

Если выполнены неравенства

$$T_i^{-1} \circ U_{\mathbf{k}}^n \geq U_{\mathbf{k}}^n \geq T_i^1 \circ U_{\mathbf{k}}^n, \quad (20)$$

означающие локальное монотонное убывание функции $U_{\mathbf{k}}^n$ в i -м пространственном направлении, то при помощи функции

$$F_2(u, m) = \begin{cases} u, & u \geq m, \\ m, & u \leq m, \end{cases} \quad (21)$$

ограничивающей снизу, проводится дополнительная коррекция потока $(\tilde{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+$ по формуле

$$(\hat{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+ = F_2\left((\tilde{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+, (\psi_{\mathbf{k}}^n)_i + \tau_n (g_{\mathbf{k}}^n)_i\right). \quad (22)$$

Если ни одно из двух условий (16) или (18) не выполнено, то коррекция потока $(\tilde{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+$ не проводится, т. е. полагается, что $(\hat{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+ = (\tilde{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+$.

На четвертом этапе из разностных уравнений

$$\frac{U_{\mathbf{k}}^{n+1} - U_{\mathbf{k}}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \sum_{i=1}^m \frac{f_i \left((\widehat{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+ \right) - f_i \left((\widehat{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^- \right)}{h_i} = 0 \quad (23)$$

находятся значения консервативных переменных $U_{\mathbf{k}}^{n+1}$ на $(n+1)$ -м временном слое. На пятом этапе проводится завершающая коррекция потоковых переменных

$$(u_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+ = F \left((\widehat{u}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i^+, (\widetilde{m}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i, (\widetilde{M}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i \right), \quad (24)$$

где

$$(\widetilde{m}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i = \min (U_{\mathbf{k}}^{n+1}, T_i^1 \circ U_{\mathbf{k}}^{n+1}), \quad (\widetilde{M}_{\mathbf{k}}^{n+1})_i = \max (U_{\mathbf{k}}^{n+1}, T_i^1 \circ U_{\mathbf{k}}^{n+1}). \quad (25)$$

5.

С учетом результатов работ [12, 13] для модифицированной схемы CABARET справедлива

Теорема. В линейном приближении многомерная схема CABARET (5)–(11), (15)–(25) является монотонной относительно всех своих пространственно одномерных решений, т. е. таких разностных решений $\{U_{\mathbf{k}}^n, (u_{\mathbf{k}}^n)_i^+\}$, которые зависят от изменения только одной компоненты мультииндекса \mathbf{k} .

Для формулировки идеи доказательства предположим, что пространственно одномерное разностное решение зависит от пространственной переменной x_i . С учетом этого такое одномерное решение можно записать в виде $\{U_i^n, u_{i+1/2}^n\}$. В линейном приближении модифицированной схемы CABARET из монотонности этого решения на n -м временном слое следует его монотонность на $(n+1)$ -м временном слое. Для доказательства этого результата достаточно показать [12] сохранение монотонности разностного решения относительно индекса i при следующих переходах:

$$\{U_i^n, u_{i+1/2}^n\} \Rightarrow \{U_i^n, u_{i+1/2}^{n+1/2}\} \Rightarrow \{U_i^{n+1}, u_{i+1/2}^{n+1/2}\} \Rightarrow \{U_i^{n+1}, u_{i+1/2}^{n+1}\}. \quad (26)$$

Сохранение монотонности при первых двух переходах в (26) следует из первой (15) и второй (18), (22) коррекции потоков, а при третьем переходе в (26) — из третьей коррекции (24).

6.

Для иллюстрации преимущества модифицированной схемы CABARET по сравнению со стандартной на рис. 2 при тех же параметрах, что на рис. 1, приведены результаты численного расчета, полученные с использованием модифицированной схемы. Из этого рисунка следует, что, в отличие от стандартной, в модифицированной схеме на первых временных шагах отсутствуют осцилляции разностного решения на фронте ударной волны. На рис. 3 графики сеточной функции $U_{\mathbf{k}}^n$ приведены на временных слоях $n = 30; 60$, когда осцилляции разностного решения в стандартной схеме полностью сглаживаются и численные решения, получаемые по стандартной и модифицированной схемам, визуально становятся идентичными.

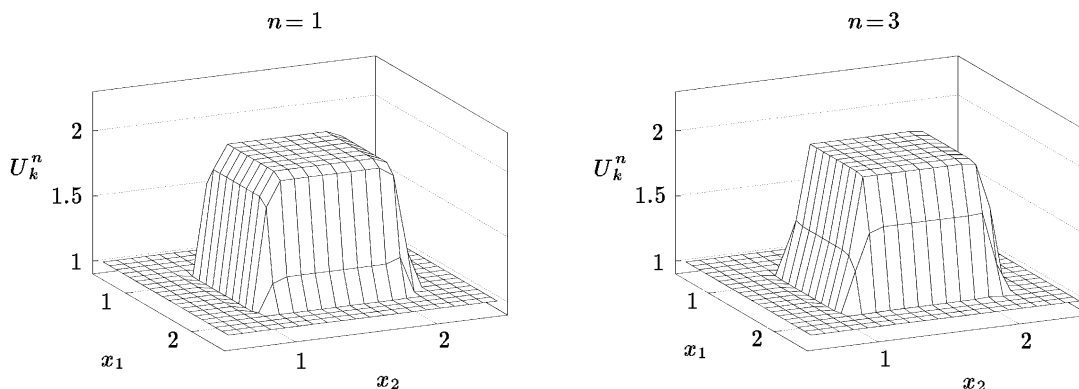


Рис. 2. Консервативные переменные U_k^n , полученные по модифицированной схеме CABARET, на первых временных шагах

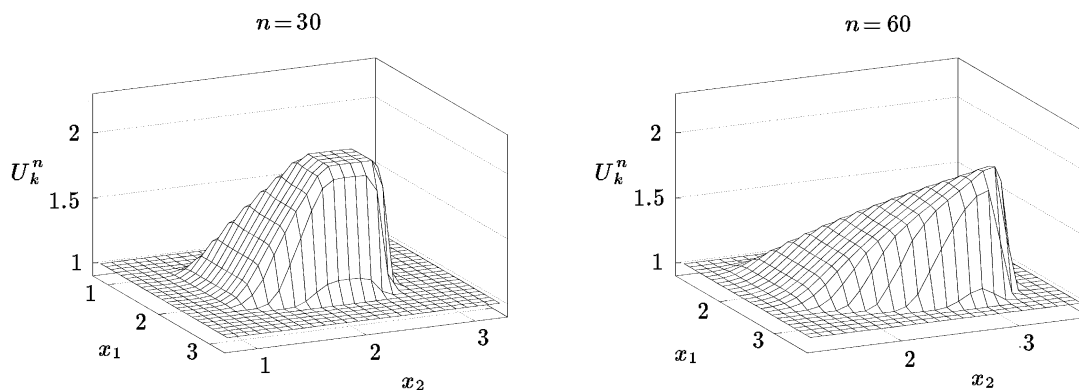


Рис. 3. Консервативные переменные U_k^n , полученные по схеме CABARET, на временных слоях $n = 30; 60$

Для более детального сравнения двух рассматриваемых схем CABARET на рис. 4 (точками для стандартной схемы и кружками для модифицированной схемы) на временных слоях $n = 1; 3; 7; 30; 60; 120$ приведены графики одномерной сеточной функции $V_{j+1/2}^n = U_{j+1/2, j+1/2}^n$, получаемой в ортогональном сечении функции U_k^n , проходящем через ось

$$\xi = \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2\}.$$

Сплошной линией на рис. 4 показано “точное” решение, которое моделируется расчетом по модифицированной схеме на более мелкой сетке с пространственным шагом $h = 0.01$. Графики для временных слоев $n = 1; 3; 7$ иллюстрируют процесс затухания в стандартной схеме осцилляции на фронте ударной волны относительно монотонизированного решения, получаемого по модифицированной схеме. На временных слоях $n = 30; 60; 120$, когда осцилляция разностного решения в стандартной схеме сглаживается, численные решения, получаемые по обеим схемам, заметно отличаются только на фронте ударной волны.

Отставание на рис. 4 численного фронта ударной волны от “точного” (слабо заметное при $n = 60$ и более отчетливое при $n = 120$) объясняется размазыванием в разностном решении вертикальных граней разрывного точного решения, которое с течением времени увеличивается. Для подтверждения этого на рис. 5 при $n = 30; 60; 120$ кружками показаны изолинии $U_k^n = 1.4$ разностного решения относительно соответствующих изолиний “точного” решения, изображенных сплошными замкнутыми линиями.

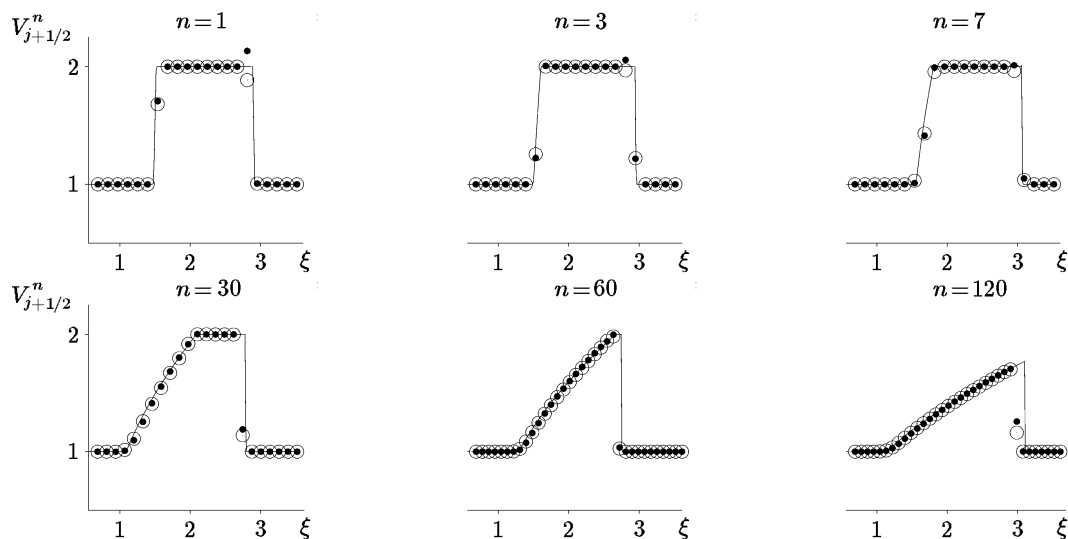


Рис. 4. Сравнение численных результатов, полученных по стандартной (точки) и модифицированной (кружки) схемам SABARET с точным решением (сплошная линия)

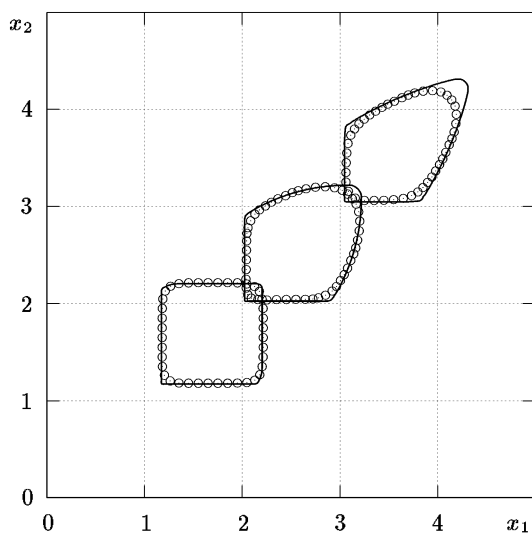


Рис. 5. Сравнение изолиний $U = 1.4$ точного решения (сплошные замкнутые линии) с численным решением $U_k^n = 1.4$ (кружки), полученным по модифицированной схеме SABARET

7.

В заключение отметим, что предложенная модификация схемы SABARET естественным образом обобщается на квазилинейные гиперболические системы законов сохранения, описывающие многомерные задачи гидравлики и газовой динамики.

Литература

1. Iserles A. Generalized leapfrog methods // IMA J. Numer. Anal. — 1986. — Vol. 6, № 3. — P. 381–392.
2. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Мат. моделирование. — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 86–100.

3. **Головизнин В.М., Самарский А.А.** Некоторые свойства разностной схемы “Кабаре” // *Мат. моделирование.* — 1998. — Т. 10, № 1. — С. 101–116.
4. **Головизнин В.М.** Балансно-характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики // *ДАН.* — 2005. — Т. 403, № 4. — С. 459–464. Перевод: Goloviznin V.M. Balanced characteristic method for systems of hyperbolic conservation laws // *Doklady Mathematics.* — 2005. — Vol. 72, № 1. — P. 619–623.
5. **Woodward P., Colella P.** The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *J. Comp. Phys.* — 1984. — Vol. 54, № 1. — P. 115–173.
6. **Остапенко В.В.** О монотонности балансно-характеристической схемы // *Мат. моделирование.* — 2009. — Т. 21, № 7. — С. 29–42.
7. **Остапенко В.В.** О сильной монотонности схемы кабаре // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.* — 2012. — Т. 52, № 3. — С. 447–460. Перевод: Ostapenko V.V. On the strong monotonicity of the CABARET scheme // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2012. — Vol. 52, № 3. — P. 387–399.
8. **Karabasov S.A., Goloviznin V.M.** Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // *J. Comput. Phys.* — 2009. — Vol. 228, № 19. — P. 7426–7451.
9. **Karabasov S.A., Goloviznin V.M.** New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // *AIAA J.* — 2007. — Vol. 45, № 12. — P. 2861–2871.
10. **Karabasov S.A., Berloff P.S., Goloviznin V.M.** Cabaret in the ocean gyres // *Ocean Modelling.* — 2009. — Vol. 30, № 2. — P. 155–168.
11. **Головизнин В.М., Исаков В.А.** Применение балансно-характеристической схемы для решения уравнений мелкой воды над неровным дном // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.* — 2017. — Т. 57, № 7. — С. 62–80. Перевод: Goloviznin V.M., Isakov V.A. Balance-characteristic scheme as applied to the shallow water equations over a rough bottom // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2017. — Vol. 57, № 7. — P. 1140–1157.
12. **Ковыркина О.А., Остапенко В.В.** О монотонности двухслойной по времени схемы Кабаре // *Мат. моделирование.* — 2012. — Т. 24, № 9. — С. 97–112.
13. **Ковыркина О.А., Остапенко В.В.** О монотонности схемы КАБАРЕ в многомерном случае // *ДАН.* — 2015. — Т. 462, № 4. — С. 385–390. Перевод: Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V. On the monotonicity of the CABARET scheme in the multidimensional case // *Doklady Mathematics.* — 2015. — Vol. 91, № 3. — P. 323–328.
14. **Зюзина Н.А., Остапенко В.В.** О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // *ДАН.* — 2016. — Т. 466, № 5. — С. 513–517. Перевод: Zyuzina N.A., Ostapenko V.V. On the monotonicity of the CABARET scheme approximating a scalar conservation law with a convex flux // *Doklady Mathematics.* — 2016. — Vol. 93, № 1. — P. 69–73.
15. **Остапенко В.В., Черевко А.А.** Применение схемы КАБАРЕ для расчета разрывных решений скалярного закона сохранения с невыпуклым потоком // *ДАН.* — 2017. — Т. 476, № 5. — С. 518–522. Перевод: Ostapenko V.V., Cherevko A.A. Application of the CABARET scheme for calculation of discontinuous solutions of the scalar conservation law with nonconvex flux // *Doklady Physics.* — 2017. — Vol. 62, № 10. — P. 470–474.

*Поступила в редакцию 10 июня 2019 г.
После исправления 2 февраля 2020 г.
Принята к печати 16 июля 2020 г.*

Литература в транслитерации

1. **Iserles A.** Generalized leapfrog methods // IMA J. Numer. Anal. — 1986. — Vol. 6, № 3. — P. 381–392.
2. **Goloviznin V.M., Samarskii A.A.** Raznostnaya аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Mat. modelirovanie. — 1998. — Т. 10, № 1. — S. 86–100.
3. **Goloviznin V.M., Samarskii A.A.** Nekotorye svoystva raznostnoi skhemy “Kabare” // Mat. modelirovanie. — 1998. — Т. 10, № 1. — S. 101–116.
4. **Goloviznin V.M.** Balansno-kharakteristicheskii metod chislennogo resheniya uravnenii gazovoi dinamiki // DAN. — 2005. — Т. 403, № 4. — S. 459–464. Pervod: Goloviznin V.M. Balanced characteristic method for systems of hyperbolic conservation laws // Doklady Mathematics. — 2005. — Vol. 72, № 1. — P. 619–623.
5. **Woodward P., Colella P.** The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. — 1984. — Vol. 54, № 1. — P. 115–173.
6. **Ostapenko V.V.** O monotonnosti balansno-kharakteristicheskoi skhemy // Mat. modelirovanie. — 2009. — Т. 21, № 7. — S. 29–42.
7. **Ostapenko V.V.** O sil'noi monotonnosti skhemy kabare // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2012. — Т. 52, № 3. — S. 447–460. Pervod: Ostapenko V.V. On the strong monotonicity of the CABARET scheme // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 52, № 3. — P. 387–399.
8. **Karabasov S.A., Goloviznin V.M.** Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. — 2009. — Vol. 228, № 19. — P. 7426–7451.
9. **Karabasov S.A., Goloviznin V.M.** New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // AIAA J. — 2007. — Vol. 45, № 12. — P. 2861–2871.
10. **Karabasov S.A., Berloff P.S., Goloviznin V.M.** Cabaret in the ocean gyres // Ocean Modelling. — 2009. — Vol. 30, № 2. — P. 155–168.
11. **Goloviznin V.M., Isakov V.A.** Primenenie balansno-kharakteristicheskoi skhemy dlya resheniya uravnenii melkoi vody nad nerovnym dnom // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2017. — Т. 57, № 7. — S. 62–80. Pervod: Goloviznin V.M., Isakov V.A. Balance-characteristic scheme as applied to the shallow water equations over a rough bottom // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 57, № 7. — P. 1140–1157.
12. **Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V.** O monotonnosti dvukhsloinoi po vremeni skhemy Kabare // Mat. modelirovanie. — 2012. — Т. 24, № 9. — S. 97–112.
13. **Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V.** O monotonnosti skhemy KABARE v mnogomernom sluchae // DAN. — 2015. — Т. 462, № 4. — S. 385–390. Pervod: Kovyrkina O.A., Ostapenko V.V. On the monotonicity of the CABARET scheme in the multidimensional case // Doklady Mathematics. — 2015. — Vol. 91, № 3. — P. 323–328.
14. **Zyuzina N.A., Ostapenko V.V.** O monotonnosti skhemy KABARE, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // DAN. — 2016. — Т. 466, № 5. — S. 513–517. Pervod: Zyuzina N.A., Ostapenko V.V. On the monotonicity of the CABARET scheme approximating a scalar conservation law with a convex flux // Doklady Mathematics. — 2016. — Vol. 93, № 1. — P. 69–73.
15. **Ostapenko V.V., Cherevko A.A.** Primenenie skhemy KABARE dlya rascheta razryvnykh reshenii skalyarnogo zakona sokhraneniya s nevypuklym potokom // DAN. — 2017. — Т. 476, № 5. — S. 518–522. Pervod: Ostapenko V.V., Cherevko A.A. Application of the CABARET scheme for calculation of discontinuous solutions of the scalar conservation law with nonconvex flux // Doklady Physics. — 2017. — Vol. 62, № 10. — P. 470–474.