ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 6

УДК 532.51

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНКИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА*

О. Ю. Цвелодуб

Институт теплофизики СО РАН,
630090 Новосибирск

Рассмотрим течение пленки вязкой жидкости по внешней поверхности цилиндра радиуса R. При любых расходах жидкости уравнения Навье — Стокса имеют решения с толщиной пленки $h_0 = \mathrm{const}$. Хорошо известно, что такой режим течения неустойчив к бесконечно малым возмущениям даже при очень малых числах Рейнольдса Re. Возмущения на поверхности цилиндрической пленки исследовались в нескольких работах (но, как правило, аксиально-симметричные).

Нелинейное взаимодействие между волнами различных мод может приводить к формированию установившихся стационарно бегущих режимов. Здесь рассматриваются такие нелинейные пространственные волны. Частный класс пространственных режимов (спиральные волны) исследовался в работе [1]. Там же подробно представлен вывод соответствующего модельного уравнения. Поэтому опишем его кратко.

Рассмотрим случай больших цилиндров, для которых справедливо соотношение $\delta = h_0/R \ll 1$.

При малых расходах решение можно искать в виде рядов по малому параметру $h_0/L \ll 1$ (L — характерная длина возмущения). Тогда все величины удается представить в виде полиномов от поперечной координаты с коэффициентами, зависящими только от толщины пленки h и ее производных. Используя затем кинематическое условие на свободной поверхности, можно получить одно уравнение для толщины пленки h. Если ограничиться учетом членов до порядка ε^2 включительно, оно имеет вид [1]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}} h^2 h_x + \varepsilon^2 \Big\{ S \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}} \frac{h^3}{3} h_x + \frac{\mathrm{Re}^2}{\mathrm{Fr}} \Big[\frac{5}{6} h_t h_x h^3 - \frac{5}{2} h_{xt} h^4\Big] -$$

$$- \frac{\mathrm{Re}^3}{\mathrm{Fr}^2} \Big[\frac{9}{20} h_x^2 h^5 - \frac{3}{40} h^6 h_{xx}\Big] + \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}} \mathrm{We}\, \varepsilon^2 [(S^2 h_x^2 + h_x \Delta h_x) h^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}(S^2 h^3 \Delta h + h^3 \Delta^2 h) + S^2 h^2 h_\varphi \Delta h_\varphi + S^4 h_\varphi^2 h^2] \Big\} = 0, \qquad (1)$$

где индекс у h означает дифференцирование по соответствующей переменной; $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial X^2} + S^2 \dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$; $\varepsilon = h_0/L$; $S = L/R$; $\mathrm{Re} = h_0 V_0/\nu$ — число Рейнольдса; $\mathrm{Fr} = V_0^2/g h_0$ — число Фруда; $\mathrm{We} = \sigma/\rho\, g\, h_0^2$ — число Вебера; ν — коэффициент кинематической вязкости; g — ускорение свободного

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00767-а).

падения; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости; V_0 — характерная скорость при безволновом режиме течения пленки с толщиной h_0.

Как показано в [1], определяя в качестве характерного продольного масштаба длины L длину волны нейтральных аксиально-симметричных возмущений, а в качестве характерной скорости V_0 — скорость на свободной поверхности при безволновом режиме течения, для параметра S имеем соотношение

$$S \equiv L/R = 1/(1 + 0{,}8\,\mathrm{Re}/\mathrm{We}\,\delta^2)^{1/2} < 1.$$

При выводе уравнения (1) из полной системы уравнений Навье — Стокса использовались следующие допущения:

$$h_0/R \ll 1, \qquad \varepsilon = h_0/L \ll 1,$$

$$\mathrm{Re} = V_0 h_0/\nu \leqslant 1, \quad \mathrm{We} = \sigma/\rho g h_0^2 \gg 1, \quad \mathrm{We}\,\varepsilon^2 \sim 1.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением слабонелинейных возмущений и функцию h будем представлять в виде

$$h = 1 + \varepsilon h_1.$$

Используя метод разных временных масштабов и оставляя в (1) только главные порядки, после некоторых преобразований получим [1]

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H\frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + S^4\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + S^2\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)^2 H = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) записано в системе, движущейся со скоростью бесконечно малых нейтральных аксиально-симметричных возмущений. Впервые это уравнение было получено, по-видимому, в [2]. Правда, там при его преобразованиях применялись другие комбинации характерных величин, и в итоге в уравнении присутствует вместо S другой изменяемый параметр (и стоит он в другом месте).

Таким образом, исследование возмущений на пленке, стекающей по поверхности вертикального цилиндра, в рамках используемых ограничений сводится к анализу решений уравнения (2).

В случае аксиально-симметричных решений ($H = H(\tau, X)$) это уравнение переходит в хорошо известное, которое часто называют уравнением Курамото — Сивашинского:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H\frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial X^4} = 0.$$

Если в (2) пренебречь нелинейным членом, то из линеаризованного уравнения следует, что тривиальное решение $H = 0$ неустойчиво к возмущениям вида

$$\exp\left(\mathrm{i}\alpha(X - c\tau) + \mathrm{i}n\varphi\right) \qquad (3)$$

с компонентами волнового вектора (α, n), удовлетворяющими неравенству

$$\alpha^2 + S^4 n^2 - (\alpha^2 + S^2 n^2)^2 > 0, \qquad (4)$$

где n, α — натуральное и вещественное числа; $c = c_r + \mathrm{i}c_i$ — комплексная фазовая скорость возмущений.

Область существования затухающих возмущений ($c_i < 0$) определяется вместо (4) неравенством противоположного знака (<). Соответственно волновые числа нейтральных возмущений должны удовлетворять уравнению

$$\alpha^2 + S^4 n^2 - (\alpha^2 + S^2 n^2)^2 = 0. \tag{5}$$

Разрешая уравнение (5) относительно α^2, получим

$$\alpha_{1,2}^2 = \{1 - 2S^2 n^2 \pm (1 - 4S^2 n^2(1 - S^2))^{1/2}\}/2. \tag{6}$$

Как видно из (6), нейтральные возмущения с данным азимутальным числом $n (n \geqslant 1)$ существуют при значениях S, удовлетворяющих неравенству

$$S \leqslant S_*(n) = \{[n - (n^2 - 1)^{1/2}]/2n\}^{1/2}. \tag{7}$$

Для приведенных в (7) значений S и n область неустойчивых волновых чисел α лежит внутри интервала (α_1, α_2). Ситуацию, когда этот интервал конечен, будем называть общей. Специальному случаю соответствует ситуация, когда корни становятся близки друг к другу, что происходит при $S \to S_*(n)$. В этих случаях экспоненциальный рост возмущений типа (3) будет остановлен в результате действия нелинейных эффектов, и могут сформироваться нелинейные пространственные установившиеся режимы.

При $S > S_*(n)$ все возмущения вида (3) устойчивы. Следовательно, для этих значений параметров S и n пространственные режимы конечной амплитуды не могут возникнуть из тривиального режима $H = 0$ в результате нелинейной эволюции бесконечно малых возмущений; хотя не исключено, что соответствующие режимы могут сформироваться после потери устойчивости аксиально-симметричными волнами конечной амплитуды и в результате их дальнейшей нелинейной эволюции.

Будем искать для (1) решения вида

$$H(\xi, \varphi), \quad \xi = X - c\tau. \tag{8}$$

Для решений (8) справедливо следующее условие симметрии:

$$H(\xi, \varphi) = H(\xi, -\varphi). \tag{9}$$

В согласии с линейной теорией устойчивости пространственные периодические решения типа (9), имеющие бесконечно малую амплитуду, ответвляются на плоскости (α, n) от тривиального решения в нейтральных точках, даваемых соотношением (5). Они могут быть представлены как

$$H = \Gamma \exp \mathrm{i}\alpha X\{\exp \mathrm{i}\, n\varphi + \exp[-\mathrm{i}\, n\varphi]\} + \text{к. с.}, \tag{10}$$

где к. с. — комплексно-сопряженное выражение.

Решения для малых, но конечных амплитуд существуют в окрестности нейтральных точек (6). Действительно, рассмотрим слабонелинейные движения, возмущающие свободную поверхность только слегка. Наша цель — построить периодические решения уравнения (2), которые изменяются во времени медленно, как $O(\varepsilon^{-m})$ (значение параметра m определим позже).

Решения представляются в виде ряда по малому параметру:

$$H = \varepsilon H_0 + \varepsilon^2 H_1 + \varepsilon^3 H_2 + \ldots \tag{11}$$

Здесь в качестве параметра ε может служить порядок амплитуды первой гармоники (10).

Введем набор быстрых и медленных переменных

$$x_n = \varepsilon^n X, \quad t_n = \varepsilon^n \tau, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда операции дифференцирования в (2) имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \ldots, \\
\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots, \\
\frac{\partial^2}{\partial X^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_0} + \varepsilon^2 \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_0}\Big) + \ldots, \\
\Big(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Big)^2 = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Big)^2 + 4\varepsilon \Big(\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_0^3} + S^2 \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_0 \partial \varphi^2}\Big) + \\
+ \varepsilon^2 \Big(6\frac{\partial^4}{\partial x_0^2 \partial x_1^2} + 4\frac{\partial^4}{\partial x_2 \partial x_0^3} + 2S^2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial \varphi^2} + 4S^2 \frac{\partial^4}{\partial x_2 \partial x_0 \partial \varphi^2}\Big) + \ldots
\end{gathered} \tag{12}$$

Так как уравнение (2) записано в системе отсчета, движущейся со скоростью бесконечно малых возмущений, будем рассматривать решения, для которых функции H_n в (11) зависят от x_0 периодически с пространственным периодом $2\pi/\alpha$ и не зависят от t_0.

Подставляя ряд (11) в (2) и собирая с учетом (12) члены при одинаковых степенях ε, в результате имеем бесконечную систему линейных неоднородных уравнений, соответствующих разным порядкам ε.

Первому порядку в этой системе отвечает уравнение

$$\frac{\partial H_0}{\partial t_0} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_0^2} + S^4 \frac{\partial^2 H_0}{\partial \varphi^2} + \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Big)^2 H_0 = 0. \tag{13}$$

Как уже отмечалось, в общем случае для заданных компонент волнового вектора (α, n) его решения представляются различными суммами, составленными из слагаемых вида (3). Подставляя в (13) нужное нам решение типа (10), для Γ получим

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t_0} - \alpha c_i \Gamma = 0, \tag{14}$$

где $\alpha c_i = \alpha^2 + S^4 n^2 - (\alpha^2 + S^2 n^2)^2$; c_i — мнимая часть комплексной фазовой скорости c.

Чтобы можно было считать Γ не зависящим от t_0, второе слагаемое в (14) должно быть достаточно мало. Будем полагать, что выполнено соотношение

$$\alpha c_i \Gamma \approx \varepsilon^2. \tag{15}$$

Поэтому второе слагаемое в (14) должно быть перенесено в уравнение третьего порядка. Соотношение (15) будет справедливо, если волновые числа близки к нейтральным значениям (6).

Второму порядку по ε соответствует уравнение

$$\frac{\partial H_0}{\partial t_1} + 4H_0 \frac{\partial H_0}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_0^2} + S^4 \frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi^2} + 2\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_0 \partial x_1} + \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Big)^2 H_1 + $$
$$+ 4\Big(\frac{\partial^4}{\partial x_0^3 \partial x_1} + S^2 \frac{\partial^4}{\partial x_0 \partial x_1 \partial \varphi^2}\Big) H_0 = 0. \tag{16}$$

Условие отсутствия секулярных членов в (16) дает

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t_1} + 2\,\mathrm{i}\,\alpha[1 - 2(\alpha^2 + S^2 n^2)]\,\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} = 0. \tag{17}$$

С учетом справедливости (17) для H_1 из (16) имеем

$$\begin{aligned} H_1 &= \Gamma_1 \exp 2\,\mathrm{i}\,\alpha\, x_0 \{\exp 2\,\mathrm{i}\, n\,\varphi + \exp[-2\,\mathrm{i}\, n\,\varphi]\} + \text{к. с.}, \\ \Gamma_1 &= -\{\mathrm{i}\,\alpha/[4(\alpha^2 + S^2 n^2)^2 - \alpha^2 - S^4 n^2]\}\Gamma^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Для существования периодических решений конечной амплитуды со слабой модуляцией на временах порядка $O(\varepsilon^{-2})$ необходимо потребовать, чтобы Γ не зависело от t_1:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t_1} = 0. \tag{19}$$

Чтобы требование (19) было выполнимо для нетривиального решения Γ, должно быть справедливо следующее соотношение между порядками:

$$2\alpha[1 - 2(\alpha^2 + S^2 n^2)]\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} \leqslant O(\varepsilon). \tag{20}$$

Когда нейтральные точки (n, α_1) и (n, α_2), определяемые в (6), разделены конечным интервалом, коэффициент при производной в неравенстве (20) конечен, и оно может быть выполнено, только если Γ не зависит и от x_1. В этом случае , полагая, что $\Gamma = \Gamma(t_2, x_2)$, получим для приближения третьего порядка по ε уравнение

$$\begin{aligned} &\underline{\frac{\partial H_0}{\partial t_2}} + \underline{4\Big(H_0\frac{\partial H_1}{\partial x_0} + H_1\frac{\partial H_0}{\partial x_0}\Big)} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_0^2} + S^4\,\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi^2} + \underline{2\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_0 \partial x_2}} + \\ &+\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + S^2\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Big)^2 H_2 + \underline{4\Big(\frac{\partial^4}{\partial x_0^3 \partial x_2} + S^2\frac{\partial^4}{\partial x_0 \partial x_2 \partial \varphi^2}\Big)H_0} - \underline{\varepsilon^{-2} K H_0} = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

где последнее слагаемое, записанное в операторном виде, представляет собой члены, перенесенные из первого приближения. При действии оператора K на первое слагаемое в (10) перед амплитудой Γ появляется множитель $-\alpha c_i$. В уравнении (21) подчеркнуты секулярные члены (для произведения $H_0 H_1$ таковыми будут только некоторые слагаемые). Требование равенства их нулю для существования ограниченного решения H_2 приводит к уравнению на первую гармонику Γ:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t_2} + \mathrm{i} B\frac{\partial \Gamma}{\partial x_2} - \alpha c_i \varepsilon^{-2}\Gamma + A|\Gamma|^2\Gamma = 0. \tag{22}$$

Здесь

$$B = 2\alpha[1 - 2(\alpha^2 + S^2 n^2)]; \quad A = 4\alpha^2/[4(\alpha^2 + S^2 n^2)^2 - (\alpha^2 + S^4 n^2)];$$

$$\alpha c_i = (\alpha^2 + S^4 n^2) - (\alpha^2 + S^2 n^2)^2; \quad t_2 = \varepsilon^2 \tau; \quad x_2 = \varepsilon^2 X.$$

В специальном случае, когда нейтральные точки (n, α_1) и (n, α_2), определяемые в (6), близки друг к другу, коэффициент при производной в неравенстве (20) мал, и оно может быть выполнено, даже если Γ и зависит от x_1. Ясно, что теперь второе слагаемое в (17) переносится в уравнение следующего порядка по ε.

Полагая, что $\Gamma = \Gamma(t_2, x_1)$, получим для приближения третьего порядка по ε уравнение

$$\underline{\frac{\partial H_0}{\partial t_2}} + 4\Big(H_0\frac{\partial H_0}{\partial x_1} + \underline{H_0\frac{\partial H_1}{\partial x_0} + H_1\frac{\partial H_0}{\partial x_0}}\Big) + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_0^2} + S^4\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi^2} + 2\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_0 \partial x_1} + \underline{\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2}} +$$

$$+ \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + S^2\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Big)^2 H_2 + 4\Big(\frac{\partial^4}{\partial x_0^3 \partial x_1} + S^2\frac{\partial^4}{\partial x_0 \partial x_1 \partial \varphi^2}\Big)H_1 +$$

$$+ \underline{\Big(6\frac{\partial^4}{\partial x_0^2 \partial x_1^2} + 2S^2\frac{\partial^4}{\partial x_0^2 \partial \varphi^2}\Big)H_0} - \underline{\varepsilon^{-2} K H_0} + \underline{\varepsilon^{-1} K_1 H_0} = 0, \qquad (23)$$

где последним слагаемым представлены члены, перенесенные из второго приближения. При действии оператора K_1 на первое слагаемое в (10) амплитуда Γ трансформируется во второе слагаемое в уравнении (17). В этом случае требование существования ограниченного решения H_2 у уравнения (23) сводится к уравнению на первую гармонику Γ:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t_2} + \mathrm{i} B \varepsilon^{-1}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} - \alpha c_i \varepsilon^{-2}\Gamma - P\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_1^2} + A|\Gamma|^2\Gamma = 0. \qquad (24)$$

Здесь $P = 6\alpha^2 + 2S^2 n^2 - 1$; остальные коэффициенты совпадают с приведенными в (22).

После преобразования

$$\Gamma = \Gamma' \exp(\mathrm{i}\mu x_1), \quad \mu = \varepsilon^{-1} B/2P$$

уравнение (24) приводится к виду (штрих у Γ' опускаем)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t_2} - \alpha c_i' \varepsilon^{-2}\Gamma - P\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_1^2} + A|\Gamma|^2\Gamma = 0, \qquad (25)$$

где $\alpha c_i' = \alpha c_i + B^2/4P$. Уравнение (25) является известным уравнением Гинзбурга — Ландау.

Уравнения (22), (24) имеют одинаковые пространственно однородные решения, описывающие нелинейную стадию изменения амплитуды для возмущений, нарастающих на линейной стадии экспоненциально:

$$\varepsilon^2 |\Gamma(t_2)|^2 = \frac{\alpha c_i \exp[2\alpha c_i \varepsilon^{-2}(t_2 - t_{20})]}{1 + A \exp[2\alpha c_i \varepsilon^{-2}(t_2 - t_{20})]}. \qquad (26)$$

Здесь t_{20} — произвольная временная константа, отражающая произвол в задании начальной фазы возмущения.

При $t_2 \to \infty$ приходим к установившемуся значению амплитуды:

$$\varepsilon |\Gamma_\infty| = (\alpha c_i / A)^{1/2}. \qquad (27)$$

Таким образом, для уравнения (2) получены в виде асимптотического ряда (11) стационарные пространственно-периодические решения конечной амплитуды. Его первые члены даются выражениями (10), (18), следующий член ряда (11) H_2 легко определяется из (22) (или в специальном случае — из (24)), но здесь не приводится.

Так как коэффициент A для рассматриваемых возмущений всегда больше нуля, то ясно, что в результате эволюции формируются волны конечной амплитуды из тех линейных возмущений, для которых $c_i > 0$, т. е. слабонелинейные волновые режимы формируются в области линейной неустойчивости тривиального режима, другими словами, в данном случае реализуется мягкий тип потери устойчивости.

Рассмотрим устойчивость найденных решений (27) к возмущениям «боковых частот» ширины $k\varepsilon^j$ ($j = 2$ для уравнения (22), $j = 1$ для уравнения (24)). Здесь описание возмущений идет в пространстве обычных переменных x, t. Из сравнения уравнений (22) и (24) ясно, что в специальном случае (когда α_1 и α_2 близки друг к другу) исходное периодическое решение модулируется более коротковолновыми возмущениями ($j = 1$), чем в общем случае ($j = 2$).

Когда справедливо уравнение (22), будет рассматриваться решение ($\delta \ll 1$)

$$\Gamma = \Gamma_\infty + \delta\Gamma_1(t_2)\exp(\mathrm{i}\, kx_2) + \delta\Gamma_2(t_2)\exp(-\mathrm{i}\, kx_2). \tag{28}$$

Подставим (28) в (22), ограничиваясь линейными возмущениями. Тогда, приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\begin{bmatrix}\Gamma_2\\ \overline{\Gamma_3}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Gamma_2\\ \overline{\Gamma_3}\end{bmatrix} = 0, \tag{29}$$

где

$$A_{11} = \alpha c_i\varepsilon^{-2} - BK; \quad A_{12} = A\Gamma_\infty^2; \quad A_{21} = A\overline{\Gamma}_\infty^2; \quad A_{21} = \alpha c_i\varepsilon^{-2} + BK;$$

черта означает операцию комплексного сопряжения. В силу линейности системы (29) ее решение имеет вид

$$\begin{bmatrix}\Gamma_2\\ \overline{\Gamma_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_2\\ c_3\end{bmatrix}\exp(\gamma t_2) \tag{30}$$

(c_2 и c_3 — постоянные, которые не определяются в рамках линейного анализа). Подставляя (30) в (29), приходим к задаче на собственное значение γ. Из требования существования нетривиального решения (30) имеем

$$\gamma_{1,2} = -\alpha c_i\varepsilon^{-2} \pm (\alpha^2 c_i^2\varepsilon^{-4} + B^2k^2)^{1/2}. \tag{31}$$

Из (30) ясно, что условие устойчивости решения (27) к возмущениям (28) требует выполнения неравенства $\gamma < 0$. Как следует из (31), это условие невыполнимо для любых значений k. Таким образом, полученные решения неустойчивы к любым возмущениям «боковых частот» с шириной модуляции порядка $O(\varepsilon^2)$.

В специальном случае, когда имеет место уравнение (24), исследование устойчивости к возмущениям ширины $k\varepsilon$ приводит к следующим соотношениям для γ:

$$\gamma_{1.2} = -Pk^2 - \alpha c_i\varepsilon^{-2} \pm (\alpha^2 c_i^2\varepsilon^{-4} + B^2k^2)^{1/2}.$$

Здесь, так же как и в (31), для γ_1 всегда справедливо неравенство $\gamma_1 < 0$, т. е. возмущение, отвечающее этому собственному значению, устойчиво. Второе собственное значение γ_2, в отличие от (31), теперь тоже может быть меньше нуля, т. е. решение (27) в этом случае может быть устойчиво к возмущениям с некоторыми волновыми числами. Легко понять, что устойчивы более «коротковолновые» возмущения, для которых может выполняться неравенство

$$k^2 \geqslant k_*^2 = (B^2 - 2P\alpha c_i)\varepsilon^{-2}/P^2. \tag{32}$$

Ясно, что соотношение (32) будет выполнено, если $(B^2 - 2P\alpha c_i) > 0$. Тогда для возмущений с малыми k имеем $\gamma_2 > 0$.

Анализ показывает, что в этом специальном случае для всех волновых чисел из интервала неустойчивости тривиального решения

$\alpha_2 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ существует критическое k_*. Причем оно минимально для решения с волновым числом из середины области линейной неустойчивости ($\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$) и монотонно растет, когда α приближается к границам области неустойчивости.

Таким образом, показано, что уравнение (2) имеет пространственно-периодические установившиеся решения и что эти решения как в общем, так и в специальном случае неустойчивы к возмущениям «боковых частот» с достаточно малыми k. Другими словами, периодическая волна с волновым числом α неустойчива к возмущениям с близкими волновыми числами $\alpha \pm k\varepsilon^{j}$. В специальном случае, когда решение (27) становится устойчивым к возмущениям с $|k| \geqslant |k_*|$, следует ожидать рождения более сложных волновых режимов, которые могут быть получены на базе уравнения (24). В общем случае также можно ожидать появления таких более сложных режимов, но, по-видимому, это будет при таких значениях k, когда уравнение (22) уже неприменимо, и нужно будет рассматривать более сложную постановку.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цвелодуб О. Ю.** Спиральные волны на поверхности пленки, стекающей по поверхности вертикального цилиндра // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 56–63.
2. **Shlang T., Sivashinsky G. I.** Irregular flow of a liquid film down a vertical column // J. Phys. 1982. V. 43. P. 459–466.

Поступила в редакцию 1/XII 1994 г.