ЛИТЕРАТУРА

1. **Панин В. Е., Лихачев В. А., Гриняев Ю. В.** Структурные уровни деформации твердых тел.— Новосибирск: Наука, 1985.
2. **Панин В. Е., Зуев Л. Б., Данилов В. И., Мних Н. М.** Особенности поля смещений при пластической деформации крупнозернистого кремнистого железа // Физика металлов и металловедение.— 1988.— Т. 66, вып. 5.
3. **Неверов В. В., Буров В. Н., Коротков А. И.** Особенности диффузионных процессов в пластически деформируемой смеси цинка и меди // Физика металлов и металловедение.— 1978.— Т. 46, вып. 5.
4. **Буров В. Н., Житников П. П., Неверов В. В., Суппес В. Г.** Природа взрывов сжимаемых тонких слоев // ПМТФ.— 1986.— № 4.
5. **Качанов Л. Н.** Основы теории пластичности.— М.: Наука, 1969.
6. **Неверов В. В., Житников П. П.** Поворотные движения материала при сдвиговой пластической деформации тонких слоев // Изв. вузов СССР. Физика.— 1989.— Вып. 2.
7. **Хакен Г.** Синергетика.— М.: Мир, 1980.
8. **Dolgin B. P., Vanek M. A., McGory T., Ham D. J.** Mechanical alloying of Ni, Co and Fe with Ti. Formation of amorphous phase // J. Non-Crystalline Solids.— 1986.— V. 87.— N 3.

г. Новокузнецк *Поступила 18/IV 1989 г., в окончательном варианте — 20/VII 1989 г.*

УДК 624.078.416:539.4

С. Е. Михайлов, И. В. Наместникова

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ С ОДНОМЕРНЫМИ УПРУГИМИ ПОДКРЕПЛЕНИЯМИ

Задачи, связанные с передачей нагрузки от упругого стержня к упругой плоскости, рассматривались многими авторами. В большинстве исследований предполагалось, что стрингер представляет собой тонкий прямолинейный стержень, передающий только продольные усилия, а контакт стержня с плоскостью осуществляется по линии. В [1, 2] анализировались различные варианты контакта листа с прямолинейным растягиваемым стрингером, рассматриваемым как внутренний стрингер конечной длины либо как бесконечный краевой стрингер. В [3] решались задачи о подкреплении отверстия в пластине тонким стержнем постоянного сечения, обладающим изгибной и продольной жесткостями. В [4] при изучении оболочек, подкрепленных тонкими криволинейными стержнями, учитывался эксцентриситет соединения срединной поверхности оболочки и стержня. Другие модели одномерного упругого элемента, соединенного с упругой средой, не учитывающие его изгибную жесткость, анализировались в [5, 6]. Решения ряда задач с круговыми подкрепляющими элементами получены в [7].

В данной работе исследуется изотропная конечная или бесконечная линейно-упругая пластина, подкрепленная по части или всей границе и вдоль некоторых внутренних линий упругими криволинейными стержнями, обладающими переменными продольной и изгибной жесткостями, переменными кривизной и толщиной, эксцентриситетом соединения с пластиной и имеющими произвольную форму поперечного сечения, симметричную относительно срединной плоскости пластины. С использованием теории упругих стержней в случае плоского напряженного состояния получены граничные условия на линии контакта пластины с внутренними или краевыми упругими стержнями для моделей подкреплений, обобщающих [1, 2]. Доказаны теоремы существования и единственности для соответствующих краевых задач, изучена сингулярность напряжений в углах и концах стержней. Полученные соотношения полностью переносятся и на задачу плоской деформации для упругого цилиндра, подкрепленного однородными вдоль образующей цилиндрическими оболочками. Некоторые из описанных здесь результатов представлены в [8].

1. Одномерные криволинейные подкрепления. Пусть x_i — декартова система координат, плоскость (x_1, x_2) которой совпадает с плоскостью центральной оси стержня L_0 (линией центров тяжести его поперечных сечений), являющейся плоской кусочно-гладкой кривой без самопересечений, и пусть x_i^0 — координаты точек L_0. Параметризуем центральную ось с помощью длины дуги τ, поперечное сечение стержня обозначим через $\Omega(\tau)$, границу поперечного сечения — $\partial\Omega(\tau)$, его площадь — $A(\tau)$. Далее, если не оговорено иное, будем считать индексы у индексированных параметров меняющимися от 1 до 2 и по повторяющимся индексам подразумевать суммирование в этих пределах. Введем вектор касательной к центральной оси $k_i^0 = \dot{x}_i^0(\tau)$ и нормаль к ней $n_i^0(\tau) = e_{ij}k_j^0(\tau)$, где e_{ij} — альтернирующий символ: $e_{12} = -e_{21} = 1$, $e_{11} = e_{22} = 0$; точка сверху обозначает производную по τ. Положим, что одна из главных осей инерции поперечного сечения стержня лежит в плоскости (x_1, x_2).

Пусть на стержень действуют объемные усилия $\widehat{f}_i(x)$; к боковой поверхности стержня приложены внешняя поверхностная нагрузка $\widehat{T}_i(x)$; $F_i(\tau)$ — главный вектор усилий в поперечном сечении стержня τ_0, действующих на его часть с координатами $\tau < \tau_0$ со стороны части $\tau > \tau_0$; $M(\tau_0)$ — момент этих усилий относительно центра тяжести поперечного сечения (момент, действующий против часовой стрелки, считается положительным); $v_i^0(\tau)$ — перемещение центральной оси стержня. Назовем узлами $\tau_R^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1 \div N_R$) линии L_0 ее угловые точки, где будем считать заданными условия жесткого соединения частей стержня, а также точки, где заданы сосредоточенные (на проходящих через эти точки сечениях) силы и моменты.

Пусть на концах стержня τ_1, τ_2 ($\tau_2 > \tau_1$) заданы граничные условия

$$F_i(\tau_1) = -F_i^{(1)},\ M(\tau_1) = -M^{(1)},\ F_i(\tau_2) = F_i^{(2)},\ M(\tau_2) = M^{(2)}. \tag{1.1}$$

Если стержень замкнут, выберем точку τ_1 так, чтобы там не было сосредоточенных сил или моментов, тогда краевые условия (1.1) заменятся в ней условиями непрерывности сил, моментов, перемещений и поворотов:

$$F_i(\tau)\big|_{\tau_1}^{\tau_2} = M(\tau)\big|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0,\ \ \tau_2 = \tau_1 + l; \tag{1.2}$$

$$v_i^0(\tau)\big|_{\tau_1}^{\tau_2} = \dot{v}_i^0(\tau)\, n_i^0(\tau)\big|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0. \tag{1.3}$$

В узлах $\tau_R^{(\alpha)}$ имеем

(1.4)

$$F_i(\tau_R^{(\alpha)} + 0) - F_i(\tau_R^{(\alpha)} - 0) = -F_{Ri}^{(\alpha)},\ M(\tau_R^{(\alpha)} + 0) - M(\tau_R^{(\alpha)} - 0) = -M_R^{(\alpha)},$$

$$v_i^0(\tau_R^{(\alpha)} + 0) - v_i^0(\tau_R^{(\alpha)} - 0) = 0,$$

$$\dot{v}_i^0(\tau_R^{(\alpha)} + 0)\, n_i^0(\tau_R^{(\alpha)} + 0) - \dot{v}_i^0(\tau_R^{(\alpha)} - 0)\, n_i^0(\tau_R^{(\alpha)} - 0) = 0.$$

Здесь $F_i^{(j)}, F_{Ri}^{(\alpha)}$ — заданные силы; $M^{(j)}, M_R^{(\alpha)}$ — заданные изгибающие моменты; l — длина L_0; $j = 1, 2$.

Пусть $\xi = (x_i - x_i^0(\tau))\, n_i^0(\tau)$ — проекция радиуса-вектора, соединяющего центр тяжести поперечного сечения с произвольной точкой сечения, на нормаль $n_i^0(\tau)$. Используя гипотезу плоских сечений, представим перемещение точки стержня, не лежащей на центральной оси, с координатами $x_i(\tau, \xi) = x_i(\tau, 0) + \xi n_i^0(\tau)$ [9]:

$$v_i(\tau, \xi) := x_i'(\tau, \xi) - x_i(\tau, \xi) = v_i^0(\tau) - \xi k_i^0 n_j^0 \dot{v}_j^0(\tau), \tag{1.5}$$

$$v_i^0(\tau) := v_i(\tau, 0),\ x_i^0(\tau) := x_i(\tau, 0)$$

(x_i и x_i' — координаты точки до и после деформации). При выводе (1.5) учтено, что в условиях малости углов поворота

$$n_i^{0\prime} = e_{ij}\frac{dx_j^{0\prime}\, d\tau}{d\tau\, d\tau'} \approx e_{i\beta}(k_\beta^0 + \dot{v}_\beta^0)(1 - k_j^0 \dot{v}_j^0) \approx n_i^0 - k_i^0 \dot{v}_j^0(\tau)\, n_j^0(\tau).$$

Пренебрегая поперечными напряжениями в стержне, полагая $|\xi| \ll 1$ и используя закон Гука, после интегрирования по Ω выразим действующие в поперечном сечении стержня продольную силу $F_i(\tau)\, k_i^0(\tau)$ и изгибающий момент $M(\tau)$ относительно центра тяжести через перемещение центральной оси:

$$(1.6)\qquad F_i(\tau)\,k_i^0(\tau) = (G + \chi^2 G_1)\,\dot v_i^0 k_i^0 + \chi G_1 \left(n_i^0 \dot v_i^0\right)^{\cdot},$$

$$M(\tau) = -G_1\left[\chi \dot v_i^0 k_i^0 + \left(n_i^0 \dot v_i^0\right)^{\cdot}\right],$$

$$G(\tau) = E^{(r)}(\tau)A(\tau),\ G_1(\tau) = E^{(r)}(\tau)J(\tau),\qquad J(\tau) = \int\limits_{\Omega(\tau)} \xi^2 (1 + \chi(\tau)\,\xi)^{-1}\, d\Omega.$$

Здесь $\chi(\tau) = k_i^0 \dot n_i^0$ — кривизна центральной оси стержня ($\chi > 0$, если центр касательной окружности лежит слева от стержня при положительном обходе); $E^{(r)}$ — модуль Юнга материала стержня; G и G_1 — продольная и изгибная жесткости стержня.

Уравнения равновесия стержня в принятых обозначениях запишутся в виде [4, 9]

$$(1.7)\qquad \dot F_i(\tau) = -p_i(\tau),\ \dot M(\tau) - F_i(\tau)\,n_i^0(\tau) = -m(\tau);$$

$$(1.8)\qquad p_i(\tau) = \iint\limits_{\Omega(\tau)} \widehat{f}_i \vartheta(\tau,\xi)\, d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega(\tau)} \widehat{T}_i \vartheta(\tau,\xi)\, d\Gamma,$$

$$m(\tau) = \iint\limits_{\Omega(\tau)} \widehat{f}_i k_i^0 \xi \vartheta(\tau,\xi)\, d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega(\tau)} \widehat{T}_i k_i^0 \xi \vartheta(\tau,\xi)\, d\Gamma,$$

$$\vartheta(\tau,\ \xi) := \{[1 + \chi(\tau)\xi(\tau)]^2 + \dot\xi^2(\tau)\}^{1/2},$$

где $p_i(\tau)$ и $m(\tau)$ — распределенные по центральной оси стержня погонные усилия и момент, возникающие при переносе объемной нагрузки $\widehat{f}_i$ и поверхностной нагрузки $\widehat{T}_i$, действующих на стержень, на линию L_0. Соотношения (1.6), (1.7) вместе с граничными условиями (1.1)—(1.4) дают полную систему уравнений для плоских криволинейных стержней. Далее рассматриваются стержни, у которых продольная и изгибная жесткости $0 < G,\ G_1 \leqslant \infty$, а кривизна $|\chi| < \infty$.

Будем считать, что совокупность функций $\{v_i^0(\tau), F_i(\tau), M(\tau)\}$ на линии L_0 принадлежит классу $H^{(r)}(L_0)$, если функции $v_i^0(\tau)$, $\dot v_i^0(\tau)\,n_i^0(\tau)$, $F_i(\tau)$, $M(\tau)$ абсолютно непрерывны во всех точках L_0, за исключением, быть может, узловых, удовлетворяют уравнениям (1.6) почти везде на L_0, а в узлах имеют конечные левые и правые пределы.

Пусть совокупности $\{v_i^0, F_i, M\}$, $\{v_i^{*0}, F_i^*, M^*\} \in H^{(r)}$. Введем обозначения:

$$(1.9)\quad 2\langle v^0, v^{*0}\rangle^{(r)} := \int\limits_{L_0} \{G \dot v_i^0 k_i^0 \dot v_j^{*0} k_j^0 + G_1 [\chi \dot v_i^0 k_i^0 + (n_i^0 \dot v_i^0)^{\cdot}]\,[\chi \dot v_j^{*0} k_j^0 +$$

$$+ (n_j^0 \dot v_j^{*0})^{\cdot}]\}\, d\tau = \int\limits_{L_0} \left\{\frac{1}{G}\,(F_i k_i^0 + \chi M)\,(F_j^* k_j^0 + \chi M^*) + \frac{1}{G_1}\,M M^*\right\} d\tau.$$

Тогда, полагая $P_i = -\dot F_i$, $m = -\dot M + F_i n_i^0$, получаем с помощью интегрирования по частям формулу Грина для стержня

$$(1.10)\qquad 2\langle v^0, v^{*0}\rangle^{(r)} = \int\limits_{L_0} (p_i v_i^{*0} - m \dot v_i^{*0} n_i^0)\, d\tau +$$

$$+ \left[F_i(\tau)\,v_i^{*0}(\tau) - M(\tau)\,\dot v_i^{*0}(\tau)\,n_i^0(\tau^0)\right]_{\tau_1}^{\tau_2} -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{N_R} \left[F_i(\tau)\,v_i^{*0}(\tau) - M(\tau)\,\dot v_i^0(\tau)\,n_i^0(\tau)\right]_{\tau_R^{(\alpha)}-0}^{\tau_R^{(\alpha)}+0},$$

где сумма берется по всем узловым точкам $\tau_R^{(\alpha)}$ и слагаемые для концов τ_1, τ_2 пропадают, если стержень замкнут. Учитывая, что вследствие (1.9) упругая энергия стержня $\langle v^0, v^0\rangle^{(r)} \geqslant 0$, нетрудно доказать теорему единственности для стержней: в классе $\bar{H}^{(r)}$ решение задачи (1.6), (1.7), (1.1)—(1.4) единственно с точностью до жесткого смещения с поворотом $v^0_{Ci}(\tau) = C_i + C_3 e_{ij} x^0_j(\tau)$.

Полагая в (1.9) $v_i^{*0} = C_i$ или $v_i^{*0} = e_{ij} x^0_j$, имеем также, что для существования решения задачи (1.6), (1.7), (1.1)—(1.4) в $H^{(r)}$ необходимо, чтобы суммы усилий и моментов, приложенных к стержню, равнялись нулю:

$$\int\limits_{L_0} p_i(\tau)\,d\tau + F_i^{(1)} + F_i^{(2)} + \sum_{\alpha=1}^{N_R} F_{Ri}^{(\alpha)} = 0; \tag{1.11}$$

$$\int\limits_{L_0} \left[p_i(\tau)\, e_{ij} x^0_j(\tau) - m(\tau)\right] d\tau + F_i^{(1)} e_{ij} x^0_j(\tau) + F_i^{(2)} e_{ij} x^0_j(\tau_2) - \tag{1.12}$$

$$- M^{(1)} - M^{(2)} + \sum_{\alpha=1}^{N_R} \left[F_{Ri}^{(\alpha)} e_{ij} x^0_j\left(\tau_R^{(\alpha)}\right) - M_R^{(\alpha)}\right] = 0.$$

Для замкнутого стержня в этих соотношениях вследствие (1.2) пропадают концевые члены $F_i^{(j)}$, $M^{(j)}$, $j = 1,\ 2$.

Соотношения (1.6) и (1.7) можно проинтегрировать, тогда

$$v^0_i = v^0_{0i} + C_i + C_3 e_{ij} x^0_j(\tau),\ v^0_{0i}(\tau; p) = \tag{1.13}$$

$$= \int\limits_{\tau_1}^{\tau} \left\{ [g(\eta) N(\eta) + a(\eta) M(\eta)]\, k^0_i(\eta) - n^0_i(\eta) \int\limits_{\tau_1}^{\eta} [a(\eta^0) N(\eta^0) + b(\eta^0) M(\eta^0)] \right\} d\eta;$$

$$N(\eta^0; p):\ = F_i(\eta^0; p)\, k^\nu_i(\eta^0),\ F_i(\eta^0; p) = -\int\limits_{\tau_1}^{\eta^0} p_i(t)\,dt + F_i(\tau_1; p) - \tag{1.14}$$

$$- \sum_{\tau_R^{(\alpha)} \leqslant \eta^0} F_{Ri}^{(\alpha)},\ M(\eta^0; p):\ = -\int\limits_{\tau_1}^{\eta^0} n_i^{(0)}\left(\tau^\vee\right) d\tau^\vee \int\limits_{\tau_1}^{\tau^\vee} p_i(t)\,dt - \int\limits_{\tau_1}^{\eta^0} m(t)\,dt +$$

$$+ F_i(\tau_1; p)\, y^1_i(\eta^0) + M(\tau_1; p) - \sum_{\tau_R^{(\alpha)} \leqslant \eta^0} \left\{\left[y^1_i(\eta^0) - y^1_i\left(\tau_R^{(\alpha)}\right)\right] F_{Ri}^{(\alpha)} + M_R^{(\alpha)}\right\}.$$

Здесь и далее $y^1_i(\eta^0) = e_{ij}\left[x^0_j(\eta^0) - x^0_j(\tau_1)\right]$; $a(\eta^0) = \chi(\eta^0)/G(\eta^0)$; $b(\eta^0) = 1/G_1(\eta^0) + \chi^2(\eta^0)/G(\eta^0)$; $g(\eta^0) = 1/G(\eta^0)$; символом p без индексов обозначается совокупность внешних для стержня нагрузок $\{p_i, m, F_{Ri}^{(\alpha)}, M_R^{(\alpha)}\}$. Фигурирующие в (1.13) постоянные C_α ($\alpha = 1 \div 3$) произвольны в силу теоремы единственности. При получении (1.14) учитывались условия на скачки (1.4).

Для удовлетворения на концах разомкнутого стержня первой пары условий (1.1) необходимо также положить $F_i(\tau_1; p) = -F_i^{(1)}$, $M(\tau_1; p) = -M^{(1)}$. Вторая пара условий (1.1), как легко видеть, сводится к условиям разрешимости (1.11), (1.12) задачи для стержня в исходной постановке (1.6), (1.7), (1.1)—(1.4).

Соотношения (1.13), (1.14) можно переписать в виде

(1.15)

$$v^0_{0i}(\tau)(\tau; p) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau} \left\{\left[\Pi^1_{ij} p_j + \Pi_i^{(1m)} m\right](\tau_0) + \Pi^1_{ij}(\tau_0, \tau_1)\, F_j^{(1)} + \Pi_i^{(1m)}(\tau_0, \tau_1)\, M^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=1}^{N_R} \left[\Pi^1_{ij}\left(\tau_0, \tau_R^{(\alpha)}\right) F_{Rj}^{(\alpha)} + \Pi_i^{(1m)}\left(\tau_0, \tau_R^{(\alpha)}\right) M_R^{(\alpha)}\right] H\left(\tau_0 - \tau_R^{(\alpha)}\right)\right\} d\tau_0,$$

где $H(\tau)$ — функция Хевисайда; $\mathbf{\Pi}^1_{ij}, \mathbf{\Pi}_i^{(1m)}$ — операторы Вольтерра:

$$(1.16)\quad [\mathbf{\Pi}^1_{ij} p_j](\tau_0) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_0} \Pi^1_{ij}(\tau_0, t)\, p_j(t)\, dt,\ [\mathbf{\Pi}_i^{(1m)} m](\tau_0) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_0} \Pi_i^{(1m)}(\tau_0, t)\, m(t)\, dt,$$

$$\Pi^1_{ij}(\tau_0, t) = -k_i^0(\tau_0)\left[k_j^0(\tau_0)\, g(\tau_0) - a(\tau_0)\left(y_j^1(t) - y_j^1(\tau_0)\right)\right] +$$
$$+ n_i^0(\tau_0)\,[E_j(\tau_0) - E_j(t) - y_j(t)(B(\tau_0) - B(t))],$$
$$\Pi_i^{(1m)}(\tau_0, t) = -k_i^0(\tau_0)\, a(\tau_0) + n_i^0(\tau_0)(B(\tau_0) - B(t)).$$

Здесь функции E_i, B определяются через жесткости и геометрию стержня:

$$B(\tau) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau} b(\eta^0)\, d\eta^0,\ E_i(\tau) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau} \{a(\eta^0)\left[k_i^0(\eta^0) + \chi(\eta^0)\, y_i^1(\eta^0)\right] +$$
$$+ y_i^1(\eta^0)/G_1(\eta^0)\}\, d\eta^0.$$

Для замкнутого стержня после подстановки (1.14) в условия непрерывности сил и момента (1.2) придем, как и для разомкнутого, к условиям разрешимости (1.11), (1.12) (если выбросить там концевые члены). Если хотя бы на какой-либо части кривой L_0 жесткости $0 < (G(\tau), G_1(\tau)) < \infty$, то с учетом формулы Грина (1.10) можно показать, что не использовавшиеся до сих пор условия непрерывности перемещений и углов поворота (1.3) являются необходимыми и достаточными для определения трех неизвестных постоянных $F_i(\tau_1; p)$ и $M(\tau_1, p)$ в виде функционалов от p_i и m. Подставляя эти значения для постоянных в (1.15), получим

$$(1.17)\quad v_{0i}(\tau; p) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau} \Big\{[\mathbf{\Pi}_{ij} p_j + \mathbf{\Pi}_i^{(m)} m](\tau_0) + \sum_{\alpha=1}^{N_R} \Big[\left[\Pi^1_{ij}\left(\tau_0, \tau_R^{(\alpha)}\right) F_{Rj}^{(\alpha)} +\right.$$
$$\left. + \Pi_i^{(1m)}\left(\tau_0, \tau_R^{(\alpha)}\right) M_R^{(\alpha)}\right] H\left(\tau_0 - \tau_R^{(\alpha)}\right) + \Pi^0_{ij}\left(\tau_0, \tau_R^{(\alpha)}\right) F_{Rj}^{(\alpha)} +$$
$$+ \Pi_i^{(0m)}\left(\tau_0, \tau_R^{(\alpha)}\right) M_R^{(\alpha)}\Big]\Big\}\, d\tau_0,$$

где операторы $\mathbf{\Pi}_{ij}$, $\mathbf{\Pi}_i^{(m)}$ — суммы представленных в (1.16) операторов Вольтерра $\mathbf{\Pi}^1_{ij}, \mathbf{\Pi}_{ij}^{(1m)}$ и конечномерных (вырожденных) операторов:

$$(1.18)\quad [\mathbf{\Pi}_{ij} p_j](\tau_0) = [\Pi^1_{ij} p_j](\tau_0) + \int\limits_{L_0} \Pi^0_{ij}(\tau_0, t)\, p_j(t)\, dt,$$
$$[\mathbf{\Pi}_{ij}^{(m)} m](\tau_0) = [\mathbf{\Pi}_{ij}^{(1m)} m](\tau_0) + \int\limits_{L_0} \Pi_{ij}^{(0m)}(\tau_0, t)\, m(t)\, dt,$$

$$\Pi^0_{ij}(\tau_0, t) = -k_i^0(\tau_0)\left[-k_\alpha^0(\tau)\, \eta_{\alpha j}(t)\, g(\tau_0) - a(\tau_0)\left(\zeta_j(t) + y_\alpha^1(\tau_0)\, \eta_{\alpha j}(t)\right)\right] +$$
$$+ n_i^0(\tau_0)\,[-\eta_{\alpha j}(t)\, E_\alpha(\tau_0) - \zeta_j(t)\, B(\tau_0)],$$
$$\Pi_i^{(0m)}(\tau_0, t) = -k_i^0(\tau_0)\left[-k_\alpha^0(\tau_0)\, \eta_\alpha^{(m)}(t)\, g(\tau_0) - a(\tau_0)\left(\zeta^{(m)}(t) +\right.\right.$$
$$\left.\left. + y_\alpha^1(\tau_0)\, \eta_\alpha^{(m)}(t)\right)\right] + n_i^0(\tau_0)\left[-\eta_\alpha^{(m)}(t)\, E_\alpha(\tau_0) - \zeta^{(m)}(t)\, B(\tau_0)\right].$$

Функции $\eta_{\alpha j}$, ζ_j, $\eta_\alpha^{(m)}$, $\zeta^{(m)}$ явно определяются через кривизны и геометрию стержня:

(1.19)

$$B^0 = B(\tau_1 + l),\ E_i^0 = E_i(\tau_1 + l),\ \overset{\vee}{B}(\tau) = B^0 - B(\tau), \overset{\vee}{E}_i(\tau) = E_i^0 - E_i(\tau),$$
$$\zeta_j(\tau) = \left[\overset{\vee}{E}_j(\tau) - y_j^1(\tau)\, \overset{\vee}{B}(\tau) - E_i^0 \eta_{ij}(\tau)\right]/B^0,\ \eta_{ij}(\tau) = \left(\Omega^{-1}\right)_{ik} \omega_{kj}(\tau),$$
$$\left(\Omega^{-1}\right)_{ik} = (\delta_{ik}\Omega_{\alpha\alpha} - \Omega_{ik})/\Delta^\wedge,\ \Delta^\wedge = \Omega_{11}\Omega_{22} - \Omega_{12}\Omega_{21},\ \Omega_{ij} = I_{ij}^0 B^0 - E_i^0 E_j^0,$$
$$\omega_{ij}(\tau) = \left[\overset{\vee}{I}_{ij}(\tau) - y_j^1(\tau)\, \overset{\vee}{E}_i(\tau)\right] B^0 - \left[E_j(\tau) - y_j^1(\tau)\, \overset{\vee}{B}(\tau)\right] E_i^0,$$

$$I_{ij}(\tau) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau} \{g(\eta^0)\left[k_i^0(\eta^0) + \chi(\eta^0)\, y_i(\eta^0)\right]\left[k_j^0(\eta^0) + \chi(\eta^0)\, y_j^1(\eta^0)\right] +$$

$$+ [1/G_1(\eta^0)]\, y_j^1(\eta^0) y_j^1(\eta^0)\}\, d\eta^0,$$

$$I_{ij}^0 = I_{ij}(\tau_1 + l),\ I_{ij}^{\vee}(\tau) = I_{ij}^0 - I_{ij}(\tau),\ \eta_i^{(m)}(\tau) = (\Omega^{-1})_{ik}\omega_k^{(m)}(\tau),$$

$$\zeta^{(m)}(\tau) = \left[E_i^0\eta_i^{(m)}(\tau) - B^{\vee}(\tau)\right]/B^0,\ \omega_i^{(m)}(\tau) = E_i^{\vee}(\tau)\, B^0 - E_i^0 B^{\vee}(\tau).$$

В силу формулы Грина, как уже упоминалось, соотношения (1.19) дадут ограниченные ядра Π_{ij}^0, $\Pi_{ij}^{(0m)}$, если на какой-либо части кривой L_0 $0 < (G(\tau),\ G_1(\tau)) < \infty$. В случае, когда на всем стержне $G(\tau) = G_1(\tau) = \infty$, необходимо положить $v_{0i} = 0$. А когда в каждой точке L_0 либо продольная жесткость $G(\tau) = \infty$, либо изгибная $G_1(\tau) = \infty$, условия (1.3) могут уже не быть необходимыми и достаточными для определения усилий $F_i(\tau_1;\, p)$ и момента $M(\tau_1;\, p)$, однако перемещения v_i^0, тем не менее, будут определены и однозначны с точностью до постоянных C_i и функции v_{i0}^0 представимы в виде (1.17), где ядра Π_{ij}^0, $\Pi_{ij}^{(0m)}$ можно получить предельным переходом из (1.18), (1.19).

Приведенные в этом разделе уравнения и рассуждения переносятся и на однородные вдоль образующей цилиндрические оболочки, находящиеся в условиях плоской деформации, если положить в (1.6) и ниже $G(\tau) = E(\tau)2h(\tau)/(1 - \nu^2(\tau))$ — погонная продольная жесткость, $G_1(\tau) = E(\tau)[2h(\tau)]^3/[12(1 - \nu^2(\tau))]$ — погонная изгибная жесткость оболочки (E, ν и $2h$ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина оболочки). В качестве $p_i(\tau)$ и $m(\tau)$ будут фигурировать снесенные на срединную поверхность распределенные усилия и моменты

$$p_i(\tau) = \int\limits_{h_-}^{h_+} \vartheta(\tau, \xi)\, \widehat{f}_i(\tau, \xi)\, d\xi + \vartheta(\tau, h_+)\, \widehat{T}_{i+}(\tau) - \vartheta(\tau, h_-)\, \widehat{T}_{i-}(\tau),$$

$$m(\tau) = \int\limits_{h_-}^{h_+} \vartheta(\tau, \xi)\, \xi k_i^0(\tau)\, \widehat{f}_i(\tau, \xi)\, d\xi + \vartheta(\tau, h_+)\, h_+(\tau)\, \widehat{T}_{i+}(\tau)\, k_i^0(\tau) -$$

$$- \vartheta(\tau, h_-)\, h_-(\tau)\, \widehat{T}_i(\tau)\, k_i^0(\tau).$$

2. Краевые задачи для пластин с одномерными упругими подкреплениями. Рассмотрим конечную или бесконечную односвязную или неодносвязную однородную линейно-упругую пластину D постоянной толщины H_0, подкрепленную вдоль некоторой части L_{b-} границы ∂D краевыми стержнями (стрингерами) с осями L_b, а в вытянутых полостях с берегами $L_{w\pm}$ — также еще и внутренними стержнями с осями L_w. Суммарное число (связных частей) стрингеров равно N. Пусть $u_i(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ — средние по толщине перемещения и напряжения в пластине. Тогда для пластины, находящейся в плоском напряженном состоянии, справедливы уравнения Ламе

2.1) $$(\Lambda^* + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = 0$$

($\Lambda^* = 2\Lambda\mu/(\Lambda + 2\mu)$, Λ и μ — постоянные Ламе).

Выпишем граничные условия для этих уравнений, порождаемые стержневыми подкреплениями. Передача усилий со стрингера на пластину может быть описана различными способами [1, 2]. Для определенности считаем, что она происходит по линии пересечения срединной плоскости пластины с боковой поверхностью стержня (бесконечно тонкая пластина), отстоящей на расстоянии $h(\tau)$ от центральной оси стержня, т. е. по линии с координатой $x_i^0(\tau) + n_i^0(\tau)\, h(\tau)$. На линии контакта должны выполняться условия непрерывности перемещений. Для краевого стержня имеем

$$u_i(s_-)|_{\partial D} = v_i(\tau,\ h_-(\tau)),\quad s_- \in L_{b-}.$$

Аналогично для внутреннего стержня

$$u_i(S_\pm)|_{\partial D} = v_i(\tau,\ h_\pm(\tau)),\ s_\pm \in L_{w\pm}.$$

Здесь $s_\pm$ — параметризация линий контакта стержня и пластины, связанная с параметризацией τ срединной линии стержней L_b, L_w (и совпадающая с ней с точностью до знака для стержней нулевой толщины); знак $+$ относится к величинам на правой, а — на левой линии контакта стержня с пластиной (при положительном обходе); $h_+(t) > 0$; $h_-(t) < 0$; $ds_\pm = = \mp[\vartheta(\tau,\ h_+)]d\tau$.

Выражая с помощью (1.5) перемещения $v_i(\tau,\ h_\pm)$ стрингера через перемещения его центральной оси $v_i^0(\tau)$ и учитывая выражение последних через p_i и m в соотношениях (1.15), (1.17), получим граничные условия внутреннего подкрепления упругой пластины упругим стержнем конечной толщины

$$(2.2)\ \delta_{i\pm}(s_\pm;\ u) := u_{i\pm}(s_\pm) - v_i\left(\tau,\ h_\pm;\ p^{(p)}\right) = v_{0i}\left(\tau,\ h_\pm;\ p^{(e)}\right),\ \tau = \tau(s_\pm).$$

Аналогично для краевого стрингера имеем условие (2.2) лишь для $\delta_{i-}(s_-;\ u)$. Здесь $p^{(e)}$ — части p, порождаемые по формулам (1.8) внешними усилиями $\widehat{T}_i$, $\widehat{f}_i$, а также концевыми $F_i^{(k)}$, $M^{(k)}$ и сосредоточенными $F_{Ri}^{(\alpha)}$, $M_R^{(\alpha)}$ силами и моментами; $p^{(p)}$ — части p, порождаемые усилиями, с которыми пластина действует на стрингер.

Для внутреннего стрингера

$$(2.3)\quad p_i^{(p)}(\tau) = [-\sigma_{ij}(s_+)\vartheta\ (\tau, h_+)\, n_j(s_+) - \sigma_{ij}(s_-)\,\vartheta\,(\tau, h_-)\, n_j(s_-)]\, H_0,$$

$$m^{(p)}(\tau) = [-\sigma_{ij}(s_+)\,\vartheta\,(\tau, h_+)\, h_+ n_j(s_+) - \sigma_{ij}(s_-)\,\vartheta\,(\tau, h_-)\, h_- n_j(s_-)]\, k_i^0(\tau)\, H_0,$$

где $\sigma_{ij}(s_\pm)$ — напряжения в пластине на линиях контакта со стержнем. Для краевого стрингера в этих формулах следует положить $\sigma_{ij}(s_+) = 0$. Полагаем, что $M(\tau_1;\ p^{(p)}) = F_i(\tau_1;\ p^{(p)}) = 0$ для незамкнутых стрингеров (для замкнутых они однозначно по $p^{(p)}$ определяются из условий (1.3)). Отметим, что в силу (1.13) в переменные $v_i(\tau,\ h_+;\ p^{(p)})$ в (2.2) входят неизвестные постоянные $C_i^{(k)}$ ($i = 1,\ 2,\ 3,\ k = 1 \div N$), свои для каждого из N стрингеров.

Граничные условия (2.2) необходимо дополнить двумя последними краевыми условиями (1.1) для $\tau = \tau_2$ (а на замкнутом стрингере — условиями (1.2)), эквивалентными (1.11), (1.12), из которых на каждом из стрингеров получим

$$(2.4)\quad F_i\left(\tau_2^{(k)};\ p^{(p)}\right) + F_i^{(ek)} = 0,\ M\left(\tau_2^{(k)};\ p^{(p)}\right) + M^{(ek)} = 0,\ k = 1 \div N;$$

$$(2.5)\qquad F_i\left(\tau_2^{(k)};\ p^{(p)}\right) := -\int\limits_{\tau_1^{(k)}}^{\tau_2^{(k)}} p_i^{(p)}(t)\,dt,\ M\left(\tau_2^{(k)};\ p^{(p)}\right) :=$$

$$:= -\int\limits_{\tau_1^{(k)}}^{\tau_2^{(k)}} n_i(\breve{\tau})\,d\breve{\tau} \int\limits_{\tau_1^{(k)}}^{\breve{\tau}} p_i^{(p)}\,dt - \int\limits_{\tau_1^{(k)}}^{\tau_2^{(k)}} m^{(p)}(t)\,dt;$$

$$(2.6)\qquad F_i^{(ek)} := -\int\limits_{\tau_1^{(k)}}^{\tau_2^{(k)}} p_i^{(e)}(t)\,dt - F_i^{(k1)} - F_i^{(k2)} - \sum_{\alpha=1}^{N_{Rk}} F_{Ri}^{(k\alpha)},$$

$$M^{(ek)} := -\int\limits_{\tau_1^{(k)}}^{\tau_2^{(k)}} n_i(\breve{\tau})\,d\breve{\tau} \int\limits_{\tau_1^{(k)}}^{\breve{\tau}} p_i^{(e)}(t)\,dt - \int\limits_{\tau_1^{(k)}}^{\tau_2^{(k)}} m^{(e)}(t)\,dt - M^{(k1)} - M^{(k2)} -$$

$$- F_i^{(k1)} y_i^1\left(\tau_2^{(k)}\right) - \sum_{\alpha=1}^{N_{Rk}} \left\{\left[y_i^1\left(\tau_2^{(k)}\right) - y_i^1\left(\tau_R^{(k\alpha)}\right)\right] F_{Ri}^{(k\alpha)} + M_R^{(k\alpha)}\right\},$$

причем на каждом из замкнутых стрингеров $\tau_2^{(k)} = \tau_1^{(k)} + l^{(k)}$, $F_i^{(k1)} + F_i^{(k2)} = M^{(k1)} + M^{(k2)} = 0$.

Итак, если пластина по части L_{b-} границы ∂D, а также на внутренних контурах $L_{w\pm}$ подкреплена N упругими стержнями с отличными от нуля продольной и изгибной жесткостями, то приходим относительно функций $u_i(x)$ и постоянных $C_j^{(k)}$ $(j = 1 \div 3;\ k = 1 \div N)$ к краевой задаче для уравнений (2.1) с краевыми условиями (2.2) на L_{w+}, L_b (и соответствующими условиями на остальной части границы $\partial D \setminus L_{b-}$), а также условиями (2.4). Причем $p_i^{(p)} = p_i^{(p)}(\tau; u)$, $m^{(p)} = m^{(p)}(\tau;\ u)$ вычисляются с помощью (2.3). Если в рассматриваемых моделях стержней их толщины считаются нулевыми, а жесткости отличными от нуля, то в (2.2), (2.3) необходимо положить $h_+ = h_- = 0$, $s_- = -s_+ = \tau$, и берега $L_{w\pm}$ совпадают, а $m^{(p)} = 0$.

Получим теперь формулы Грина—Бетти плоской задачи теории упругости для граничных условий (2.2) и (2.3). Пусть $B^{(r)}(D,\ L)$ — класс функций $u_i(x)$, удовлетворяющих уравнению Ламе (2.1) в $D \setminus L$, таких, что построенные по ним с помощью (1.13), (1.15), (1.17), (2.3) совокупности $\{v_i^0(p^{(p)}(u)), F_i(p^{(p)}(u)), M(p^{(p)}(u))\} \in H^{(r)}(L)$, для любых двух функций u_i, u_i^* из $B^{(r)}(D,\ L)$ ограничена билинейная форма

$$(2.7)\quad 2\langle u, u^*\rangle^{(p)}(D) := \iint\limits_D [\Lambda^* u_{i,i} u_{j,j}^* + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)]\, dD$$

и в D имеет место формула Грина — Бетти

$$2\langle u, u^*\rangle^{(p)}(D) = \int\limits_{\partial D \cup L_{w\pm}} u_i^*(s)\, \sigma_{ij}(s; u)\, n_j(s)\, ds,$$

а для бесконечной области D выполнены еще условия регулярности: $|u_i(x)| < C_1$, $u_{i,j}(x) = o(R^{-1})$, $R^2 = x_i^2 \to \infty$.

Отметим, что вложение в $H^{(r)}(L)$ будет выполнено, если $\sigma_{ij}(s;\ u) \in L_1(L)$, $(|\dot{h}|,\ |\chi|) < \infty$ и $(G,\ G_1) \neq 0$.

Для u_i, $u_i^* \in B^{(r)}(D, L_w \cup L_b)$ введем билинейную форму $\langle u, u^*\rangle^{(pr)} := \langle u,\ u^*\rangle^{(p)}(D) H_0 + \langle v^0(u),\ v^0(u^*)\rangle^{(r)}(L_b \cup L_w)$, где билинейная форма $\langle v^0, v^{*0}\rangle^{(r)}$ дана соотношением (1.9). Из (2.2), (2.3), (2.5) имеем формулу Грина — Бетти для подкрепленной пластины

$$(2.8)\quad 2\langle u, u^*\rangle^{(pr)} = H_0 \Bigg[\int\limits_{L_{b-}} \delta_{i-}(s_-; u^*)\, \sigma_{ij}(s_-; u)\, n_j(s_-)\, ds_- +$$
$$+ \int\limits_{L_{w-}} \delta_{i-}(s_-; u^*)\, \sigma_{ij}(s_-; u)\, n_j(s_-)\, ds_- + \int\limits_{L_{w+}} \delta_{i+}(s_+; u^*)\, \sigma_{ij}(s_+; u) \times$$
$$\times n_j(s_+)\, ds_+ + \int\limits_{\partial D \setminus L_{b-}} u_i^*(s)\, \sigma_{ij}(s; u)\, n_j(s)\, ds \Bigg] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} [v_i(\tau_2^{(k)}; p^{(p)}(u^*))\, F_i(\tau_2^{(k)}; p^{(p)}(u)) -$$
$$- \dot{v}_i^0(\tau_2^{(k)}; p^{(p)}(u))\, n_i(\tau_2^{(k)})\, M(\tau_2^{(k)}; p^{(p)}(u))].$$

Задачу для уравнений (2.1), в которой на внутренних контурах $L_{w\pm}$ и части L_{b-} границы заданы условия упругого подкрепления (2.2), (2.3), на части L_T границы заданы усилия

$$(2.9)\quad \sigma_{ij}(s;\ u) n_j(s) = g_i(s),\ s \in L_T,$$

а на части L_u — перемещения

$$(2.10)\quad u_i(s) = f_i(s),\ s \in L_u,$$

будем называть задачей $(r - T - u)$. Если участки $L_u = \theta$ или $L_T = \theta$ либо на всей границе ∂D заданы условия упругого одномерного подкрепления, то приходим к задачам $(r - T)$, $(r - u)$ и (r) соответственно.

Учитывая, что $\langle u, u\rangle^{pr} \geqslant 0$, получаем из (2.8) следующие теоремы единственности в классе $B^{(r)}(D, L_b \cup L_w)$. Решение задач (r) и $(r - T)$ единственно с точностью до жесткого смещения $u_{ci}(x) = v_{ci}(x) = C_i^0 + C_3^0 e_{ij} x_j$ $(x \in D)$ в конечной области D и с точностью до жесткого смещения без поворота $u_{ci}(x) = v_{ci}(x) = C_i^0$ $(x \in D)$ в бесконечной области D. Причем постоянные $C_j^{(k0)} = C_j^0$ $(j = 1 \div 3,\ k = 1 \div N)$ в (1.13) для каждой связной части подкреплений. Решение задач $(r - u)$ и $(r - T - u)$ единственно как в конечной, так и в бесконечной области D.

Отметим, что отсюда следует достаточность условий (2.2)—(2.4), (2.9), (2.10) для однозначности определения не только u_i и v_{0i}, но и постоянных $C_i^{(b)}$ на всех стержнях (с точностью до $v_{Ci}, C_j^{(k0)} = C_j^0$ в задачах (r) и $(r - T)$).

Полагая в (2.8) $u_i^*(x) = v_i^* = C_i + C_3 e_{ij} x_j$ $(x_j \in D)$ (для бесконечной области D $C_3 = 0$), имеем с учетом (2.6), что для того чтобы решение задач (r) и $(r - T)$ существовало в классе $B^{(r)}(D, L_b \cup L_w)$, необходимо, чтобы главный вектор, а для конечной области еще и главный момент внешних усилий, приложенных к подкрепленному телу, были равны нулю.

До сих пор речь в этом разделе шла о задаче плоского напряженного состояния для пластины, подкрепленной стержнем (стрингером). Но легко видеть, что все полученные здесь утверждения переносятся и на задачу плоской деформации для цилиндра, подкрепленного цилиндрической оболочкой, если заменить Λ^* на Λ в (2.1), (2.7), положить $H_0 = 1$ в (2.8) и учесть замечания в конце п. 1.

3. Сингулярность напряжений в угловых точках и концах стрингеров. При анализе особенностей будем полагать, что около особых точек в пластине напряжения удовлетворяют оценке $\sigma_{ij}(r) = O(r^{-\gamma})$, $\gamma < 1$. Отсюда с учетом (1.13), (1.14), (2.3) вытекает, что если в исследуемой точке s_* жесткости $G(s)$ и $G_1(s)$ не равны нулю, а кривизна $\chi(s)$ ограничена, то $\left|\dot{v}_i(s_*, p^{(p)}, m^{(p)})\right|, \left|\left[n_i \dot{v}_i(s_* p^{(p)}, m^{(p)})\right]'\right| < \infty$. Тогда слагаемые с этими членами можно перенести в правую часть (2.2) и прийти к задачам

$$(3.1)\qquad u_i(s_-) = v_i(\tau, h_-),\ s_- \in L_{b-},\ u_{\pm i}(s_\pm) = v_i(\tau, h_\pm),\ s_\pm \in L_{w\pm},$$

где условно заданные правые части $v_i(\tau, h_\pm)$ непрерывны, а их производные ограничены в s_* и гельдеровы в левой и правой окрестностях s_*, если этим свойством обладают функции $\chi(\tau)$, $\vartheta(\tau, h_\pm(\tau))$, $1/G(\tau)$, $1/G_1(\tau)$. Далее через s и h будем обозначать параметры $s_\pm$, $h_\pm$, если $s_* \in L_\pm$, соответственно; $\tau_* = \tau(s_*)$. Но условия (3.1) — это граничные условия первой краевой задачи (по Купрадзе), и сингулярность напряжений в таких задачах хорошо изучена (см. [10, 11] и библиографию к ним). Пусть ω — внутренний угол контура L_{b-} или $L_{w\pm}$ в точке s_*. Если $\pi < \omega < 2\pi$, то в местной локальной системе координат (r, θ) с началом в s_* и углом θ, отсчитываемым против часовой стрелки от биссектрисы ω, перемещения и напряжения имеют вид

$$(3.2)\qquad u_i(\rho, \theta) = C_i + \sum_{m=1}^{2} K_m u_i^{(m)}(\theta)\,\rho^{1-\gamma_m^{\mathrm{II}}} + u_i^0(\theta)\,\rho + u_i^*(\rho, \theta),$$

$$\sigma_{ij}(\rho, \theta) = \sum_{m=1}^{2} 2\mu K_m \sigma_{ij}^{(m)}(\theta)\,\rho^{-\gamma_m^{\mathrm{II}}} + \sigma_{ij}^0(\theta) + \sigma_{ij}^*(\rho, \theta).$$

Здесь степени сингулярности напряжений $\gamma_1^{\mathrm{II}}(\omega), \gamma_2^{\mathrm{II}}(\omega) \in (0, 1)$ — корни уравнений $\Delta_*(\varkappa, \omega, \gamma_1^{\mathrm{II}}) = 0$ и $\Delta_*(-\varkappa, \omega, \gamma_2^{\mathrm{II}}) = 0$ соответственно, где функция $\Delta_*(\varkappa, \omega, \gamma) := \varkappa \sin[(\gamma - 1)\omega] + (\gamma - 1)\sin\omega$, а постоянная плоской теории упругости $\varkappa = (\Lambda^* + 3\mu)/(\Lambda^* + \mu)$ для плоского напряженного состояния и $\varkappa = (\Lambda + 3\mu)/(\Lambda + \mu)$ для плоской деформации. Коэффициенты интенсивности напряжений K_m зависят от геометрии и заданных нагрузок и должны определяться из решения задачи в целом. Собственные функции $u_i^{(n)}(\theta), \sigma_{ij}^{(m)}(\theta)$ зависят только от раствора угла и выписываются явно, $u_i^*(\rho, \theta), u_{ij}^*(\rho, \theta), \sigma_{ij}^*(\rho, \theta) \to 0$ при $\rho \to 0$, а ограниченные при $\pi < \omega < 2\pi$ функции $u_i^0(\theta), \sigma_{ij}^0(\theta)$ (как можно показать, например, с помощью методов [12]) имеют вид

$$
(3.3)\quad u_\rho^0 := -(B_2 - B_4 \operatorname{ctg}\omega)\cos 2\theta - (B_1 \operatorname{ctg}\omega + B_3)\sin 2\theta - B_4/\sin\omega,
$$

$$
u_\theta^0 := (B_2 - B_4 \operatorname{ctg}\omega)\sin 2\theta - (B_1 \operatorname{ctg}\omega + B_3)\sin 2\theta + B_1/\sin\omega,
$$

$$
\sigma_{\rho\rho}^0 := -(B_2 - B_4 \operatorname{ctg}\omega)\cos 2\theta - (B_1 \operatorname{ctg}\omega + B_3)\sin 2\theta - 2B_4/[(\varkappa - 1)\sin\omega],
$$

$$
\sigma_{\theta\theta}^0 := (B_2 - B_4 \operatorname{ctg}\omega)\cos 2\theta + (B_1 \operatorname{ctg}\omega + B_3)\sin 2\theta - 2B_4/[(\varkappa - 1)\sin\omega],
$$

$$
\sigma_{\rho\theta}^0 := (B_2 - B_4 \operatorname{ctg}\omega)\sin 2\theta - (B_1 \operatorname{ctg}\omega + B_3)\cos 2\theta;
$$

$$
(3.4)\qquad B_1 := u_{1,s}^s(s_*)\cos(\omega/2) + u_{2,s}^A(s_*)\sin(\omega/2),
$$

$$
B_2 := -u_{1,s}^A(s_*)\cos(\omega/2) - u_{2,s}^s(s_*)\sin(\omega/2),
$$

$$
B_3 := u_{1,s}^s(s_*)\sin(\omega/2) - u_{2,s}^A(s_*)\cos(\omega/2),
$$

$$
B_4 := -u_{1,s}^A(s_*)\sin(\omega/2) + u_{2,s}^s(s_*)\cos(\omega/2),
$$

$$
u_{i,s}^s(s_*) = [v_{i,s}(\tau(s_*))]^s, \quad u_{i,s}^A(s_*) = [v_{i,s}(\tau(s_*))]^A.
$$

Здесь и далее для произвольной функции $\varphi(s)$ обозначено $\varphi^s(s_*) := [\varphi(s_* + 0) + \varphi(s_* - 0)]/2$, $\varphi^A(s_*) := [\varphi(s_* + 0) - \varphi(s_* - 0)]/2$. Отсюда видно, что в первой задаче коэффициенты явно определяются через касательные производные заданных граничных перемещений около угловой точки. В рассматриваемой задаче с заданными упругими подкреплениями из последнего условия (1.4) с учетом (1.5) получим $[u_{i,s}n_i]^A = -[\dot{h}(1 + \chi h)^{-1}u_{i,s}k_i]^A$, т. е.

$$
(3.5)\quad B_2 \sin\omega - B_4 \cos\omega = [\dot{h}/(1 + \chi h)]^A (B_2 \cos\omega - B_4 \sin\omega) - [\dot{h}/(1 + \chi h)]^s (B_1 \cos\omega + B_3 \sin\omega).
$$

Таким образом, B_2 можно выразить через остальные коэффициенты B_1, B_3, B_4, которые, как и K_m, априори не определяются. Отметим, что если $\dot{h}(\tau_*) = 0$, в частности, если стержень имеет нулевую толщину, то вследствие (3.5) первые скобки в каждом из выражений (3.3) равны нулю, а если $\dot{h} = 0$ и $\omega = \pi/2$, то касательное напряжение $\sigma_{sn} = 0$.

В случае когда $\omega = \pi$, т. е. s_* — точка гладкости контура, асимптотика (3.2), (3.3) заменяется следующей:

$$
(3.6)\quad u_\rho(\rho,\theta) = C_\rho(\theta) + \{[-(\varkappa + 1)(\pi\varkappa)^{-1} B_1(\ln\rho - 1) + K_{01}]\sin 2\theta + K_{02}(\cos 2\theta + 1) - B_1(\pi\varkappa)^{-1}\theta[(\varkappa + 1)\cos 2\theta - \varkappa + 1] + B_2\}\rho + u_\rho^*(\rho, \theta),
$$

$$
u_\theta(\rho, \theta) = C_\theta(\theta) + \{[-(\varkappa + 1)(\pi\varkappa)^{-1} B_1(\ln\rho - 1) + K_{01}](\cos 2\theta + 1) - K_{02}\sin 2\theta + B_1(\pi\varkappa)^{-1}(\varkappa + 1)\theta\sin 2\theta + B_3\}\rho + u_\theta^*(\rho, \theta),
$$

$$
\sigma_{\rho\rho} = 2\mu\{[-(\varkappa + 1)(\pi\varkappa)^{-1} B_1 \ln\rho + K_{01}]\sin 2\theta + K_{02}[\cos 2\theta + 2/(\varkappa - 1)] + \theta(\pi\varkappa)^{-1} B_1[-(\varkappa + 1)\cos 2\theta + 2] + 2B_2/(\varkappa - 1)\} + \sigma_{\rho\rho}^*,
$$

$$
\sigma_{\theta\theta} = 2\mu\{-[-(\varkappa - 1)(\pi\varkappa)^{-1} B_1 \ln\rho + K_{01}]\sin 2\theta + K_{02}[-\cos 2\theta + 2/(\varkappa - 1)] + \theta(\pi\varkappa)^{-1} B_1[(\varkappa + 1)\cos 2\theta + 2] + 2B_2/(\varkappa - 1)\} + \sigma_{\theta\theta}^*,
$$

$$
\sigma_{\rho\theta} = 2\mu\{[-(\varkappa + 1)(\pi\varkappa)^{-1} B_1 \ln\rho + K_{01}]\cos 2\theta + K_{02}\sin 2\theta + \theta(\pi\varkappa)^{-1} B_1(\varkappa + 1)\sin 2\theta - (\pi\varkappa)^{-1} B_1\} + \sigma_{\rho\theta}^*.
$$

Здесь и далее $C_\rho(\theta)$, $C_\theta(\theta)$ — постоянное в декартовых координатах смещение C_i, выраженное в полярных координатах, для простоты принято, что $\dot{h}(s_*) = 0$ при $\omega = \pi$, тогда вследствие (3.5) $B_4 = 0$. Остальные коэффициенты B_i, как и коэффициенты K_{01}, K_{02}, вообще говоря, априори не определяются. Однако если обозначить $\chi_h(\tau) := \chi(\tau) + G(\tau)h(\tau)/[G_1(\tau)\times\times\vartheta(\tau, h)]$, то из (1.5), (1.6) при $\omega = \pi$ находим $F_i k_i^0(\tau) + \chi_h(\tau) M_R = G(\tau) u_{i,s}(s) k_i(s)$. Тогда с учетом (1.4), (3.4)

$$B_1 = \left[F_{Ri}^* k_i^0(\tau_*) + \chi_h^s(\tau_*) M_R^* - 2\chi_h^A(\tau_*) M^s(\tau_*) + + 2G^A(\tau_*) B_2\right] / \left[2G^s(\tau_*)\right], \tag{3.7}$$

где F_{Ri}^* и M_R^* — сосредоточенные внешние силы и момент в точке τ_*. Отсюда видно, что при $\dot{h}(s_*) = 0$ логарифмические члены в (3.6) могут возникать, когда в точке гладкости s_* есть сосредоточенная продольная сила или момент, либо скачок в продольной жесткости G или в χ_h. При этом, если продольная жесткость и χ_h непрерывны, коэффициент B_1 при логарифме явно выражается через заданные сосредоточенные силу и момент и равен нулю, если они отсутствуют в τ_*.

Если в точке s_* угол $0 < \omega < \pi$, то имеют место асимптотики (3.2), (3.3) с учетом (3.5), но при $K_1 = K_2 = 0$, так как γ_1^{II}, $\gamma_2^{\text{II}} < 0$ и члены с этими показателями можно объединить с $\overset{*}{u}_i$, $\overset{*}{\sigma}_{ij}$. Таким образом, главные части асимптотики даются формулами (3.3).

Если $G = G_1 = \infty$, то из (1.5), (1.6) легко видеть, что $u_{i,s} = c_3 n_i$. Тогда $B_2 = B_4 = B_1 \cos\omega + B_3 \sin\omega = 0$ и вместо (3.3) при $\omega \neq \pi$ получим $u_\rho^0 = \sigma_{\rho\rho}^0 = \sigma_{\rho\theta}^0 = 0$, $u_\theta^0 = B_1/\sin\omega$. При $\omega = \pi$ в асимптотику (3.6) необходимо подставить соотношения $B_1 = B_2 = B_4 = 0$.

Асимптотики (3.2), (3.3), (3.6) относятся и к анализу концевых областей внутренних стрингеров с отличной от нуля толщиной, если положить, что используемая модель стрингера применима и в этих точках. Тогда ω — углы локальной геометрии концевых областей. Если толщина внутреннего стрингера в концевой области равна нулю, то в этой области $\omega = 2\pi$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$. Асимптотики перемещений и напряжений для $\omega = 2\pi$ по-прежнему имеют вид (3.2), но младшие члены u_i^0, σ_{ij}^0 при этом будут отличаться от (3.3). Если s_* — точка, где кончается контакт краевого стрингера с пластиной и далее на границе заданы перемещения, то в этой точке смены типа граничных условий асимптотики (3.2)—(3.4), (3.6), (3.7) полностью сохранятся.

По аналогии с описанным выше легко видеть, что в точке смены типа граничных условий, возникающей на конце краевого стрингера, когда дальше на границе задаются усилия (условия второй задачи), асимптотика будет той же, что и в окрестности точки смены типа граничных условий первой и второй задач (см. [10, 11]) вне зависимости от жесткости, толщины и кривизны стрингера, если в исследуемой точке s_* жесткости $G(s_*)$, $G_1(s_*) \neq 0$, а $\chi(s_*) \neq \infty$.

Таким образом, в задачах с одномерными упругими подкреплениями, имеющими отличные от нуля продольную и изгибную жесткости и ограниченную кривизну, главные члены асимптотики и, в частности, степени сингулярности будут теми же, что и в задаче с заданными перемещениями. Влияние жесткостей и кривизны сказывается лишь на значениях коэффициентов этой асимптотики.

Отметим, что случаи, когда $G(s)$, $G_1(s) \to 0$, $\chi(s) \to \infty$ при $s \to s^*$, могут быть исследованы методами, близкими использованным в [13, 14].

Для стержня (оболочки) ненулевой толщины в зонах с большой кривизной, в том числе в окрестности угловой точки оси, возникает пересечение нормалей к ней в объеме стержня. Для корректной постановки задачи необходимо уточнить теорию стержней в таких зонах. В частности, можно считать эти зоны жесткими вставками, т. е. положить там $G = G_1 = \infty$. При снесении распределенных по жесткой зоне заданных и контактных усилий на ось можно заменить (1.8), (2.3) любыми соотношениями, дающими их главный вектор и момент по этой зоне. Тогда полученные выше результаты сохранятся и для таких случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Муки, Стернберг.** Передача нагрузки от краевого ребра жесткости к листу (пересмотр задачи Мелана) // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Е. Механика.— Т. 34, № 3.
2. **Муки, Стернберг.** Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Е. Механика.— Т. 35, № 4.
3. **Шереметьев М. П.** Пластинки с подкрепленным краем.— Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1960.
4. **Михайловский Е. И.** Прямые, обратные и оптимальные задачи для оболочек с подкрепленным краем.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.
5. **Канаун С. К.** Тонкий дефект в однородной упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ.— 1984.— № 3.
6. **Морозов Н. Ф., Назаров С. А., Проскура А. В.** Краевые задачи теории упругости для плоских областей с тонкими окаймлениями // Механика деформируемого тела: Сб. ст./Ин-т проблем механики АН СССР.— 1986.
7. **Савин Г. Н., Тульчий В. И.** Пластины, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками.— Киев: Наук. думка, 1971.
8. **Михайлов С. Е., Наместникова И. В.** Плоские задачи для неодносвязных упруго подкрепленных пластин // Механика неоднородных структур: Тез. докл. II Всесоюз. конф., Львов, 1987.— Т. 2.
9. **Голубев О. Б.** Обобщение теории тонких стержней // Тр. Ленингр. политехн. ин-та.— 1963.— № 226.
10. **Партон В. З., Перлин П. И.** Методы математической теории упругости.— М.: Наука, 1981.
11. **Willams M. L.** Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech.— 1952.— V. 19, N 4.
12. **Михайлов С. Е.** Асимптотики решений некоторых интегральных уравнений и плоских задач теории упругости вблизи углов при заданных на границе усилиях // Изв. АН СССР. МТТ.— 1989.— № 3.
13. **Соткилава О. В., Черепанов Г. П.** Некоторые задачи неоднородной теории упругости // ПММ.— 1974.— Т. 38, № 3.
14. **Арутюнян Н. Х., Назаров С. А.** Об особенностях функции напряжения в угловых точках поперечного сечения скручиваемого стержня с тонким усиливающим покрытием // ПММ.— 1983.— Т. 47, № 1.

г. Москва *Поступила 5/IX 1989 г.*

УДК 539.4

И. П. Жданова, Д. Н. Карпинский

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА МЕТОДОМ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Известно, что получение достоверного прогноза об условиях разрушения волокнистого композита (ВК) на основе опытов затруднено. Так, например, из анализа сигналов акустической эмиссии (АЭ) невозможно указать сечение образца ВК, по которому пройдет макротрещина вплоть до ближайшего к разрывному состоянию [1, 2]. В связи с этим особую актуальность приобретает моделирование на ЭВМ процесса накопления повреждений в ВК и предсказание по его результатам места и времени развития макротрещины в образце.

В основу моделирования процесса разрушения ВК [3] положены два основных предположения [1, 2]: принципы исчерпания деформационной способности материала матрицы под нагрузкой и корреляции в процессе накопления повреждений.

Исчерпание деформационной способности матрицы может происходить при дроблении волокон композита и в его отсутствие. По-видимому, эти два предельных случая послужили основанием для введения классификации разрушения ВК в [2]: объемный тип разрушения, связанный с накоплением большого числа разрывов волокон, и динамический, при котором макротрещина формируется вследствие разрыва одного волокна независимо от других разрывов волокон.

Объемный тип разрушения ВК предполагался при моделировании [3], а исчерпание деформационной способности матрицы осуществлялось путем локализации пластической деформации в окрестности места разрыва волокна. Что касается принципа корреляции в процессе объемного разрушения, то следует подчеркнуть обнаруженное