УДК 517.977.58

Построение множеств достижимости управляемых систем со вторым порядком точности относительно шага по времени*

А.А. Ершов

[1]Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620108

[2]Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002

E-mails: ale10919@yandex.ru, ershov@imm.uran.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 4, Vol. 13, 2020.

Ершов А.А. Построение множеств достижимости управляемых систем со вторым порядком точности относительно шага по времени // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 4. — С. 365–380.

В работе исследуется пиксельный метод построения множеств достижимости динамической управляемой системы. Получены достаточные условия на управляемую систему, при которых явный метод Рунге–Кутты второго порядка (модифицированный метод Эйлера) обеспечивает второй порядок точности относительно шага по времени при построении множеств достижимости, даже если разрывные функции входят в класс допустимых управлений.

DOI: 10.15372/SJNM20200402

Ключевые слова: *модифицированный метод Эйлера, метод Рунге–Кутты второго порядка, управляемая система, множество достижимости, переключение управления.*

Ershov A.A. Construction of reachable sets of controlled systems with second order of accuracy with respect to time step // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 4. — P. 365–380.

The paper investigates the pixel method for constructing reachable sets of a dynamic controlled system. Sufficient conditions for a control system have been obtained under which the explicit second order Runge–Kutta method (a modified Euler method) provides the second order of accuracy with respect to a time step in constructing reachable sets, even if discontinuous functions are in the class of admissible controls.

Keywords: *modified Euler method, second-order Runge–Kutta method, control system, reachable set, switching of control.*

Введение

В силу многочисленных практических приложений задач управления (см. [1]) многие современные исследования направлены на повышение эффективности численных методов их решения. Как правило, первым и самым ресурсоёмким шагом построения оптимального управления является вычисление множеств достижимости управляемых

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00221), постановления № 211 Правительства Российской Федерации (контракт № 02.A03.21.0006).

систем [2, 3]. Среди перспективных методов вычисления множеств достижимости управляемых систем выделим семейство методов Рунге–Кутты, поскольку данные методы обеспечивают высокие порядки точности относительно шага по времени при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако те же самые методы (с точностью до некоторых модификаций, отражающих специфику управляемых систем) не гарантируют тех же порядков точности при использовании их для вычисления множеств достижимости управляемых систем, если не ограничить класс допустимых управлений гладкими функциями [4]. Тем не менее в работе [4] показана возможность вычисления множеств достижимости с высоким порядком точности относительно шага по времени для линейных управляемых систем вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x^{(0)}, \end{cases}$$

где A и B — постоянные матрицы, а класс допустимых управлений состоит из измеримых функций со значениями из p-мерного куба $[0,1]^p$. В работе [5] аналогичные результаты получены для линейных дифференциальных включений. Также отметим не менее важные работы, направленные на изучение различных видов устойчивости методов Рунге–Кутты для вычисления множеств достижимости управляемых систем [6] и интегральных включений [7].

Настоящая работа посвящена нахождению максимально широкого класса нелинейных управляемых систем, для которых модифицированный метод Эйлера гарантирует второй порядок точности вычисления множеств достижимости относительно шага по времени. Заметим относительно терминологии, что модифицированный метод Эйлера, он же метод Коши–Эйлера, также является явным методом Рунге–Кутты второго порядка со следующей таблицей Батчера [7]:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1\,. \end{array}$$

Важность рассмотрения метода Рунге–Кутты второго порядка состоит в том, что результаты вычислительных экспериментов [8, 9] показали, что именно данный метод при вычислении множеств достижимости является самым эффективным по быстродействию по сравнению с методом Эйлера и методом Рунге–Кутты четвертого порядка, но в то же время он остается самым простым после метода Эйлера.

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in (t_0, \vartheta), \\ x(t_0) = x^{(0)}, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — фазовая переменная системы со значениями из $\mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, представляющая собой программное управление системой (1), со значениями из отрезка $P = [a, b]$, $a < b$, t — время, $(t_0, x^{(0)}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ — начальная позиция системы (1).

Пусть $\Gamma_N = \{t_0, \ldots, t_n = \vartheta\}$ — разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$ на N равных частей, $\Delta = t_{i+1} - t_i$, $t_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{t_i + t_{i+1}}{2}$, $i = \overline{0, N-1}$.

Обозначим через $X_i = X(t_i, t_0, x^{(0)})$ множества достижимости в момент времени t_i, а через $\widetilde{X}_i$ — их аппроксимации. Эти аппроксимации по методу Рунге–Кутты второго порядка [2, 3] будем вычислять следующим образом:

$$\widetilde{X}_0 = \{x^{(0)}\},$$
$$\widetilde{X}_{i+1} = \widetilde{X}_i + \bigcup_{x \in \widetilde{X}_i} \bigcup_{\hat{u} \in P} \Delta \cdot f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, x + \frac{\Delta}{2} f(t_i, x, \hat{u}), \hat{u}\right), \quad i = \overline{0, N-1}. \tag{2}$$

Целью данной работы является нахождение минимальных условий, достаточных для того, чтобы $\max_{i=\overline{1,N}} d(X_i, \widetilde{X}_i) = O(\Delta^2)$ при $N \to \infty$.

2. Формулировка результата

Обозначим через $\mathbb{U} = \{u(\cdot) : u(\cdot) \in C^2[t_0, \vartheta], \|u(\cdot)\|_{C^2[t_0,\vartheta]} \leqslant M_2, u(t) \in P$ при $t \in [t_0, \vartheta]\}$, где $M_2 \geqslant \max\{|a|, |b|\}$ — некоторая постоянная.

Определение 1. Любое управление $u(\cdot) \in \mathbb{U}$ назовём *управлением без переключений.*

Определение 2. Предположим, что некоторое управление

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [t_0, t_*], \\ u_2(t), & t \in (t_*, \vartheta], \end{cases}$$

где $u_1(\cdot) \in \mathbb{U}$, $u_2(\cdot) \in \mathbb{U}$. Такое управление назовём *управлением с одним переключением* в точке t_*, которую мы назовём *моментом переключения.* Аналогично можно определить управление с несколькими переключениями.

Посредством $\mathbb{V}$ обозначим класс управлений со сколь угодно большим числом переключений, но моменты которых отделены по времени не менее чем на некоторое фиксированное число $\varepsilon > 0$. Через $\mathbb{L}$ обозначим класс программных управлений из измеримых функций со значениями из P.

Введём в рассмотрение следующие условия на систему (1).

C1. Существует некоторый компакт $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, в котором гарантировано помещается интегральная воронка $X(t_0, \{x^{(0)}\})$ управляемой системы (1) вместе с некоторой её окрестностью.

C2. $F(t, x) = \{f(t, x, u) : u \in P\}$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ при любых $(t, x) \in D$.

C3. Функция $f(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^2(D \times P)$.

C4. Область достижимости $X(t, t_0, \{x^{(0)}\})$ управляемой системы (1) с классом допустимых управлений $\mathbb{L}$ в любой момент времени $t \in (t_0, \vartheta]$ также представима в виде пучка траекторий, соответствующих управлениям без переключений, т. е.

$$X(t, t_0, \{x^{(0)}\}) = \bigcup_{u(\cdot) \in \mathbb{U}} x_u(t),$$

где каждая функция $x_u(\cdot)$ — решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t)) \text{ при } t_0 < t < \vartheta, \\ x_u(t_0) = x^{(0)}, \end{cases}$$

иначе говоря, классы управлений $\mathbb{U}$ и $\mathbb{L}$ порождают одинаковые интегральные воронки.

C5. Классы управлений $\mathbb{L}$ и $\mathbb{V}$ порождают одинаковые интегральные воронки для управляемой системы (1).

C6. Для двух произвольных управлений $u_1(\cdot) \in \mathbb{U}$, $u_2(\cdot) \in \mathbb{U}$ обозначим $f_1(t,x) = f(t,x,u_1(t))$, $f_2(t,x) = f(t,x,u_2(t))$. Тогда должно выполняться тождество

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(t,x) f_1(t,x) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x) f_2(t,x) \equiv \frac{\partial f_1}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial f_2}{\partial t}(t,x),$$

где для $k = 1$ и $k = 2$ производные соответственно равны:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}(t,x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_k^1}{\partial t}(t,x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_k^n}{\partial t}(t,x) \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x}(t,x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_k^1}{\partial x^1}(t,x) & \dots & \dfrac{\partial f_k^1}{\partial x^n}(t,x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k^n}{\partial x^1}(t,x) & \dots & \dfrac{\partial f_k^n}{\partial x^n}(t,x) \end{pmatrix}.$$

C7. $\dfrac{\partial f}{\partial u}(t,x,u) \neq 0$ для всех $(t,x,u) \in D \times P$.

Замечание 1. Производную на границе замкнутой области в условии C3 будем понимать как предел производной изнутри области. При этом будет подразумеваться, что такой предел существует, является конечным и не зависит от выбора последовательности аргументов производной, которая сходится к рассматриваемой точке на границе. Ясно, что если непрерывная производная определена также в некоторой окрестности границы и, значит, мы можем её вычислить непосредственно на границе, то оба способа приведут нас к одинаковому результату.

Замечание 2. Если правая часть системы (1) удовлетворяет условию подлинейного роста, т. е. существует некоторая постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\|f(t,x,u)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\|) \text{ при } (t,x,u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P,$$

то условие C1 автоматически выполняется с компактом

$$D = \{(t,x) : t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \|x - x^{(0)}\| \leqslant e^{\gamma(t - t_0)} - 1 + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора.

Теорема. *При выполнении условий C1–C4 либо C1–C3, C5–C7 метод Рунге–Кутты* (2) *при построении множеств достижимости управляемой системы* (1) *имеет второй порядок точности, т. е. погрешность построения множеств достижимости в хаусдорфовой метрике для любого N не превосходит $M\Delta^2$, где $\Delta = (\vartheta - t_0)/N$ — шаг по времени, M — некоторая постоянная, зависящая только от вида функции f и компакта $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, в котором заведомо лежит интегральная воронка $X(t, \{x_0\})$.*

Замечание 3. Аппроксимации, заданные формулами (2), на практике не вычислимы из-за сложности аналитического описания множеств $\widetilde{X}_i$, $i=\overline{1,N}$. В общем случае множества $\widetilde{X}_i$, $i=\overline{1,N}$, требуется также аппроксимировать, например, конечными множествами точек. Однако в данной работе этот вопрос не рассматривается.

3. Вспомогательные утверждения

При выполненном условии С3 на функцию $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ достигаются следующие максимумы как максимумы непрерывных функций, заданных на компактах:

$$M_t=\max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u\in P}}\left\|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,u)\right\|,\quad M_x=\max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u\in P}}\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,u)\right\|_F,\quad M_u=\max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u\in P}}\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u)\right\|.$$

В качестве нормы якобиана $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,u)\right\|_F$ можно взять любую матричную норму, согласованную с векторной, например норму Фробениуса.

Обозначим через

$$L_1=M_t+M_x\max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u\in P}}\|f(t,x,u)\|+M_u\max_{u(\cdot)\in\mathbb{U}}\|\dot u(t)\|.$$

Заметим, что если $u_1(\cdot)\in\mathbb{U}$, а функция $x_2(\cdot)$ является движением системы (1), порождённым некоторым (возможно, другим) управлением $u_2(\cdot)\in\mathbb{U}$, то

$$\max_{t\in[t_0\vartheta]}\left\|\frac{d}{dt}f(t,x_2(t),u_1(t))\right\|=\max_{t\in[t_0\vartheta]}\left\|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x_2(t),u_1(t))+\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_2(t),u_1(t))f(t,x_2(t),u_2(t))+\right.$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}(t,x_2(t),u_1(t))\dot u_1(t)\right\|\leqslant L_1.$$

Также обозначим через

$$L_2=\max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u\in P}}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x,u)\right\|+2\max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u\in P}}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}(t,x,u)\right\|_F\max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u\in P}}\Big\|f(t,x,u(t)\Big\|+$$
$$2\max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u\in P}}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial t}(t,x,u)t\right\|_F\max_{\substack{t\in[t_0,\vartheta],\\ u(\cdot)\in\mathbb{U}}}\Big\|\dot u(t)\Big\|+M_xM_t+$$
$$\max_{\substack{(t,x_1),(t,x_2),(t,x_3)\in D;\\ u_1,u_2,u_3\in P}}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_1,u_1)f(t,x_2,u_2)\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_1,u_1)f(t,x_2,u_2)\right)\right)f(t,x_3,u_3)\right\|+\max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u(\cdot)\in\mathbb{U}}}\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u(t))\ddot u(t)\right\|+$$
$$\max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u(\cdot)\in\mathbb{U}}}\left\|\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u(t))\dot u(t)\right)\dot u(t)\right\|\max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u\in P}}\|f(t,x,u)\|+$$
$$\max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u(\cdot)\in\mathbb{U}}}\left\|\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u(t))\dot u(t)\right)\dot u(t)\right\|.$$

Данная постоянная обладает тем свойством, что

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2} f(t, x_2(t), u_1(t)) \right\| \leqslant L_2.$$

Лемма. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям C1–C3, C5–C7. Числа* $\alpha \in (0,1)$, $\Delta > 0$ *и моменты времени* $t_0 < t_\alpha < t_1$ *таковы, что* $t_1 - t_0 = \Delta$, $t_\alpha - t_0 = \alpha\,\Delta$. *И пусть из точки* $x^{(0)} = x(t_0)$ *можно попасть в точку* $x_2(t_1)$ *следующим образом*:

1) *вначале двигаясь по траектории* $(t, x_1(t))$, *соответствующей управлению* $u_1(\cdot) \in \mathbb{U}$ *и функции* $f_1(t,x) = f(t,x,u_1(t))$, *т. е.*

$$x_1(t_\alpha) = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t_\alpha} f_1(\tau, x_1(\tau))\, d\tau,$$

2) *а затем — по траектории* $(t, x_2(t))$, *соответствующей управлению* $u_2(\cdot) \in \mathbb{U}$ *и функции* $f_2(t,x) = f(t,x,u_1(t))$, *т. е.*

$$x_2(t_1) = x_1(t_\alpha) + \int\limits_{t_\alpha}^{t_1} f_2(\tau, x_2(\tau))\, d\tau.$$

Тогда существует программное управление $u(\cdot) \in C^2([t_0,t_1])$ *такое, что двигаясь по соответствующей ему траектории* $(t, x(t))$, *можно достаточно близко приблизиться к точке* $x_2(t_1)$, *т. е.* $\|x(t_1) - x_2(t_1)\| \leqslant \frac{L_2 + \widetilde{C}_1}{6}\Delta^3$, *где постоянная* $\widetilde{C}_1$ *зависит только от вида функции* $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ *и компакта* D.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x^{(0)} + \dot{x}_1(t_0)(t-t_0) + \ddot{x}_1(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + \dddot{x}_1(\xi)\frac{(t-t_0)^3}{6} \\ &= x^{(0)} + f_1(t_0, x^{(0)})(t-t_0) + \frac{df_1}{dt}(t_0, x_1(t_0))\frac{(t-t_0)^2}{2} + \frac{d^2 f_1}{d\xi^2}(\xi, x_1(\xi))\frac{(t-t_0)^3}{6} \\ &= x^{(0)} + f_1(t_0, x^{(0)})(t-t_0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}(t_0, x^{(0)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(t_0, x^{(0)}) f_1(t_0, x^{(0)})\right)\frac{(t-t_0)^2}{2} + \\ &\qquad \frac{d^2 f}{d\xi^2}(\xi, x_1(\xi), u_1(\xi))\frac{(t-t_0)^3}{6}, \end{aligned}$$

где $\xi \in (t_0, t)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} x_\alpha = x_1(t_\alpha) &= x^{(0)} + f_1(t_0, x^{(0)})\alpha\Delta + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}(t_0, x^{(0)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(t_0, x^{(0)}) f_1(t_0, x^{(0)})\right)\frac{\alpha^2\Delta^2}{2} + \\ &\qquad \frac{d^2 f}{d\xi_1^2}(\xi_1, x_1(\xi_1), u_1(\xi_1))\frac{\alpha^3\Delta^3}{6}, \quad \xi_1 \in (t_0, t_1), \\ x_2(t_1) &= x_\alpha + f_2(t_\alpha, x_\alpha)(1-\alpha)\Delta + \\ &\qquad \left(\frac{\partial f_2}{\partial t}(t_\alpha, x_\alpha) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(t_\alpha, x_\alpha) f_2(t_\alpha, x_\alpha)\right)\frac{(1-\alpha)^2\Delta^2}{2} + \\ &\qquad \frac{d^2 f}{d\xi_2^2}(\xi_2, x_2(\xi_2), u_2(\xi_2))\frac{(1-\alpha)^3\Delta^3}{6}, \quad \xi_2 \in (t_\alpha, t_1). \end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}
f_2(t_\alpha, x_\alpha) &= f(t_\alpha, x_1(t_\alpha), u_2(t_\alpha)) \\
&= f(t_0, x_1(t_0), u_2(t_2)) + \frac{df}{dt}(t, x_1(t), u_2(t))\Big|_{t=t_0} \alpha\Delta + \frac{d^2 f}{d\xi_3^2}(\xi_3, x_1(\xi_3), u_2(\xi_3))\frac{\alpha^2\Delta^2}{2} \\
&= f_2(t_0, x^{(0)}) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t}(t_0, x^{(0)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(t_0, x^{(0)}) f_1(t_0, x^{(0)})\right)\alpha\Delta + \\
&\qquad \frac{d^2 f}{d\xi_3^2}(\xi_3, x_1(\xi_3), u_2(\xi_3))\frac{\alpha^2\Delta^2}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_2}{\partial t}(t_\alpha, x_\alpha) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(t_\alpha, x_\alpha) f_2(t_\alpha, x_\alpha) \\
&\quad = \frac{\partial f_2}{\partial t}(t_\alpha, x_1(t_\alpha)) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(t_\alpha, x_1(t_\alpha)) f_2(t_\alpha, x_1(t_\alpha)) \\
&\quad = \frac{\partial f_2}{\partial t}(t_0, x^{(0)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(t_0, x^{(0)}) f_2(t_0, x^{(0)}) + \\
&\qquad\qquad \frac{d}{d\xi_4}\left(\frac{\partial f_2}{\partial t}(\xi_4, x_1(\xi_4)) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(\xi_4, x_1(\xi_4)) f_2(\xi_4, x_1(\xi_4))\right)\alpha\Delta \\
&\quad = \frac{\partial f_2}{\partial t}(t_0, x^{(0)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(t_0, x^{(0)}) f_2(t_0, x^{(0)}) + \frac{d^2 f}{d\xi_4}(\xi_4, x_1(\xi_4), u_2(\xi_4))\alpha\Delta, \quad \xi_4 \in (t_0, t_\alpha).
\end{aligned}$$

Далее будем опускать аргументы функций, если ими являются $(t_0, x^{(0)})$, например, $f_1(t_1, x^{(0)})$ будем обозначать как f_1. С учетом этого обозначения получаем, что

$$\begin{aligned}
x_2(t_1) &= x^{(0)} + f_1\alpha\Delta + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} f_1\right)\frac{\alpha^2\Delta^2}{2} + \frac{d^2 f}{d\xi_1}(\xi_1, x_1(\xi_1), u_1(\xi_1))\frac{\alpha^3\Delta^3}{6} + \\
&\quad \left(f_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1\right)\alpha\Delta + \frac{d^2 f}{d\xi_3^2}(\xi_3, x_1(\xi_3), u_2(\xi_3))\frac{\alpha^2\Delta^2}{2}\right)(1-\alpha)\Delta + \\
&\quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x} f_2 + \frac{d^2 f}{d\xi_4^2}(\xi_4, x_1(\xi_4), u_2(\xi_4))\alpha\Delta\right)\frac{(1-\alpha)^2\Delta^2}{2} + \\
&\quad \frac{d^2 f}{d\xi_2^2}(\xi_2, x_2(\xi_2), u_2(\xi_2))\frac{(1-\alpha)^3\Delta^3}{6} \\
&= x^{(0)} + (\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2)\Delta + \\
&\quad \left(\alpha^2\frac{\partial f_1}{\partial t} + (1-\alpha^2)\frac{\partial f_2}{\partial t} + \alpha^2\frac{\partial f_1}{\partial x} f_1 + 2\alpha(1-\alpha)\frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 + (1-\alpha)^2\frac{\partial f_2}{\partial x} f_2\right)\frac{\Delta^2}{2} + R,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R = {}& \frac{d^2 f}{d\xi_1}(\xi_1, x_1(\xi_1), u_1(\xi_1))\frac{\alpha^3}{6}\Delta^3 + \frac{d^2 f}{d\xi_3^2}(\xi_3, x_1(\xi_3), u_2(\xi_3))\frac{\alpha^2}{2}(1-\alpha)\Delta^3 + \\
& \frac{d^2 f}{d\xi_4^2}(\xi_4, x_1(\xi_4), u_2(\xi_4))\frac{\alpha(1-\alpha)^2}{2}\Delta^3 + \frac{d^2 f}{d\xi_2^2}(\xi_2, x_2(\xi_2), u_2(\xi_2))\frac{(1-\alpha)^3}{6}\Delta^3,
\end{aligned}$$

причём

$$\|R\| \leqslant L_2\left(\frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^2(1-\alpha)}{2} + \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{2} + \frac{(1-\alpha)^3}{6}\right)\Delta^3 = \frac{L_2}{6}(\alpha + (1-\alpha))^3\Delta^3 = \frac{L_2}{6}\Delta^3.$$

Определим функцию $\widetilde{u}(t, x)$ на компакте D неявным образом из уравнения

$$f(t, x, \widetilde{u}(t, x)) = \alpha f_1(t, x) + (1-\alpha) f_2(t, x). \tag{3}$$

Из условия C2 следует, что

$$\alpha f_1(t,x) + (1-\alpha) f_2(t,x) \in F(t,x) \text{ при любых } (t,x) \in D.$$

Применяя теорему об обратном отображении [9, гл. VIII, § 6, теорема 1] к уравнению (3) с учётом условия C7, получаем, что неявно заданная функция $\widetilde{u}(\cdot,\cdot) \in C^2(D)$ со значениями из P. Кроме того, дифференцируя уравнение (3) по t и по x и последовательно выражая из него соответствующие производные функции $\widetilde{u}(\cdot,\cdot)$, получаем, что $\|\widetilde{u}\|_{C^2(D)}$ ограничена некоторой постоянной $\widetilde{C}$, зависящей только от функции $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ и компакта $D \times P$.

Определим функцию $\widetilde{x}(\cdot)$ как движение системы (1) под действием управления $\widetilde{u}(t,x)$ (не являющегося программным). Иначе говоря, функция $\widetilde{x}(\cdot)$ является решением интегрального уравнения

$$\widetilde{x}(t) = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \widetilde{x}(\tau), \widetilde{u}(\tau, \widetilde{x}(\tau)))\, d\tau.$$

В силу достаточной степени гладкости функций $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\widetilde{u}(\cdot,\cdot)$ и свойств решения начальной задачи Коши функция $\widetilde{x}(\cdot) \in C^3([t_0,t_1])$.

Покажем, что программное управление $u(t) = \widetilde{u}(t, \widetilde{x}(t))$ является искомым. В силу гладкости функции $\widetilde{x}(\cdot)$ построенное управление удовлетворяет условию $u(\cdot) \in C^2([t_0,\vartheta])$. Обозначим через $\varphi(t,x) = f(t,x,u(t))$. Тогда

$$x(t) = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Используя это интегральное представление, разложим функцию $x(\cdot)$ в ряд Тейлора в точке $t = t_0$ и затем подставим вместо t значение t_1:

$$x(t_1) = x^{(0)} + \varphi(t_0, x^{(0)})\Delta + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x^{(0)}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_0, x^{(0)})\varphi(t_0, x^{(0)})\right)\frac{\Delta^2}{2} + \frac{d^2\varphi}{d\xi_4^2}(\xi_4, x(\xi_4))\frac{\Delta^3}{6},$$

где

$$\left\|\frac{d^2\varphi}{d\xi_4^2}(\xi_4, x(\xi_4))\right\| = \left\|\frac{d^2 f}{d\xi_4^2}(\xi_4, x(\xi_4), u(\xi_4))\right\| \leqslant \widetilde{C}_1,$$

причём, учитывая оценку $\|\widetilde{u}\|_{C^2(D)} \leqslant \widetilde{C}$, можно выбрать постоянную $\widetilde{C}_1$ только по функции $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ и компакту $D \times P$.

Следовательно, для выполнения неравенства $\|x(t_1) - x_2(t_1)\| \leqslant \frac{L_2 + \widetilde{C}_1}{6}\Delta^3$ достаточно выполнения двух условий:

1) $\varphi(t_0, x^{(0)}) = \alpha f_1(t_0, x^{(0)}) + (1-\alpha) f_2(t_0, x^{(0)})$,

2) $$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x^{(0)}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_0, x^{(0)})\varphi(t_0, x^{(0)}) = \alpha^2 \frac{\partial f_1}{\partial t} + (1-\alpha^2)\frac{\partial f_2}{\partial t} + \alpha^2 \frac{\partial f_1}{\partial x} f_1 + 2\alpha(1-\alpha)\frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 + (1-\alpha)^2 \frac{\partial f_2}{\partial x} f_2 \text{ в точке } (t_0, x^{(0)}).$$

В силу (3) условие 1) очевидно выполняется. Проверим условие 2). Заметим, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varphi=\alpha\frac{\partial f_1}{\partial t}+(1-\alpha)\frac{\partial f_2}{\partial t_2}+\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial x}+(1-\alpha)\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(\alpha f_1+(1-\alpha)f_2).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varphi-\alpha^2\frac{\partial f_1}{\partial t}+(1-\alpha^2)\frac{\partial f_2}{\partial t}-\alpha^2\frac{\partial f_1}{\partial x}f_1-2\alpha(1-\alpha)\frac{\partial f_2}{\partial x}f_1-(1-\alpha)^2\frac{\partial f_2}{\partial x}f_2\\ =\alpha(1-\alpha)\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}-\frac{\partial f_2}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x}f_2-\frac{\partial f_2}{\partial x}f_1\right)=0\end{aligned}$$

в силу условия C5. □

Отметим следующее очевидное утверждение.

Утверждение. Пусть имеется числовая последовательность $a_1=c$, $a_{k+1}=a_kb+c$ для всех натуральных k, $b\neq 1$. Тогда $a_{k+1}=\frac{b^{k+1}-1}{b-1}c$.

4. Доказательство теоремы

Рассмотрим сначала случай, когда выполнены условия C1–C4.

Оценим $h(\widetilde{X}_{i+1},X_{i+1})$, $i=\overline{0,N-1}$. Для этого покажем, что любой точки $\widetilde{x}^{(i+1)}\in\widetilde{X}_{i+1}$ найдётся точка $x^{(i+1)}$, достаточно близкая к точке $\widetilde{x}^{(i+1)}$.

Из выражения (2) следует, что

$$\widetilde{x}^{(i+1)}=\widetilde{x}^{(i)}+\Delta f\left(t_{i+1/2},\widetilde{x}^{(i)}+\frac{\Delta}{2}f(t_i,\widetilde{x}^{(i)},\hat{u})\right),$$

где $\hat{u}\in P$, а $\widetilde{x}^{(i)}$ — некоторая точка из $\widetilde{X}^{(i)}$.

По определению хаусдорфова отклонения найдётся точка $x^{(i)}\in X^{(i)}$ такая, что $\|x^{(i)}-\widetilde{x}^{(i)}\|\leqslant h(X_i,\widetilde{X}_i)$. Рассмотрим управление $u(t)\equiv\hat{u}$. Под действием этого управления на интервале времени $[t_i,\tau_{i+1}]$ движение системы (1) из точки $x^{(i)}$ перейдёт в точку

$$x^{(i+1)}=x^{(i)}+\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}f(\tau,x(\tau),\hat{u})\,d\tau,$$

где функция $x(\cdot)$ является решением начальной задачи Коши

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),\hat{u}), & t\in(t_i,t_{i+1}),\\ x(t_i)=x^{(i)}.\end{cases}$$

Поскольку постоянное управление $\hat{u}\in\mathbb{L}$, то $x^{(i+1)}\in X_{i+1}$. Оценим $\|x^{(i+1)}-\widetilde{x}^{(i+1)}\|$.

Итак,

$$\|x^{(i+1)}-\widetilde{x}^{(i+1)}\|\leqslant\|x^{(i)}-\widetilde{x}^{(i)}\|+\left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left(f(\tau,x(\tau),\hat{u})-f\left(t_{i+1/2},\widetilde{x}^{(i)}+\frac{\Delta}{2}f(t_i,\widetilde{x}^{(i)},\hat{u}),\hat{u}\right)\right)d\tau\right\|$$

$$=\|x^{(i)}-\widetilde{x}^{(i)}\|+\left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Bigl(f(t_{i+1/2},x(t_{i+1/2}),\hat{u})+\right.$$

$$\frac{df}{d\tau}(t_{i+1/2}, x(t_{i+1/2}), \hat{u})(\tau - t_{i+1/2}) +$$
$$\frac{d^2 f}{d\xi^2}(\xi, x(\xi), \hat{u})\frac{(\tau - t_{i+1/2})^2}{2} - f\Big(t_{i+1/2}, \widetilde{x}^{(i)} + \frac{\Delta}{2} f(t_i, \widetilde{x}^{(i)}, \hat{u}), \hat{u}\Big)\Big)\, d\tau\Big\|$$
$$\leqslant h(\widetilde{X}_i, X_i) + \Big\| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1/2}} \Big(f(t_{i+1/2}, x(t_{i+1/2}), \hat{u}) -$$
$$f\Big(t_{i+1/2}, \widetilde{x}^{(i)} + \frac{\Delta}{2} f(t_i, \widetilde{x}^{(i)}, \hat{u}), \hat{u}\Big)\Big) d\tau\Big\| + \frac{L_2}{24}\Delta^3$$
$$\leqslant h(\widetilde{X}_i, X_i) + \Big\| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1/2}} \int\limits_{\widetilde{x}^{(i)} + \frac{\Delta}{2} f(t_i, \widetilde{x}^{(i)}, \hat{u})}^{x(t_{i+1/2})} \frac{\partial f}{\partial x}(t_{i+1/2}, \zeta, \hat{u})\, d\zeta\, d\tau\Big\| + \frac{L_2}{24}\Delta^3$$
$$\leqslant h(\widetilde{X}_i, X_i) + \Big\| x(t_{i+1/2}) - \widetilde{x}^{(i)} - \frac{\Delta}{2} f(t_i, \widetilde{x}^{(i)}, \hat{u})\Big\| M_x\Delta + \frac{L_2}{24}\Delta^3,$$

где значение $\xi \in (t_i, t_{i+1/2})$ используется для записи разложения функции $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в дифференциальной форме. В свою очередь,

$$x(t_{i+1/2}) = x^{(i)} + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1/2}} f(\tau, x(\tau), \hat{u})\, d\tau = x^{(i)} + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1/2}} \Big(f(t_i, x^{(i)}, \hat{u}) + \frac{df}{d\eta}(\eta, x(\eta), \hat{u})(\tau - t_i)\Big)\, d\tau$$
$$= x^{(i)} + f(t_i, x^{(i)}, \hat{u})\frac{\Delta}{2} + \frac{df}{d\eta}(\eta, x(\eta), \hat{u})\frac{\Delta^2}{8}, \quad \eta \in (t_i, t_{i+1/2}).$$

Используя это выражение, получаем, что

$$\|x^{(i+1)} - \widetilde{x}^{(i+1)}\| \leqslant h(\widetilde{X}_i, X_i) + \Big\| x^{(i)} - \widetilde{x}^{(i)} + f(t_i, x^{(i)}, \hat{u})\frac{\Delta}{2} - f(t_i, \widetilde{x}^{(i)}, \hat{u})\frac{\Delta}{2} +$$
$$\frac{df}{d\eta}(\eta, x(\eta), \hat{u})\frac{\Delta^2}{8}\Big\| M_x\Delta + \frac{L_2}{24}\Delta^3$$
$$\leqslant h(\widetilde{X}_i, X_i) + h(X_i, \widetilde{X}_i)M_x\Delta + \|f(t_i, x^{(i)}, \hat{u}) - f(t_i, \widetilde{x}^{(i)}, \hat{u})\|\frac{M_x}{2}\Delta^2 +$$
$$\frac{L_1 M_x}{8}\Delta^3 + \frac{L_2}{24}\Delta^3$$
$$\leqslant h(\widetilde{X}_i, X_i)\Big(1 + M_x\Delta + \frac{M_x}{2}\Delta^2\Big) + \Big(\frac{L_1 M_x}{8} + \frac{L_2}{24}\Big)\Delta^3.$$

В силу произвольности выбора точки $\widetilde{x}^{(i+1)} \in \widetilde{X}_{i+1}$, отсюда получаем, что

$$h(\widetilde{X}_{i+1}, X_{i+1}) \leqslant h(\widetilde{X}_i, X_i)\Big(1 + M_x\Delta + \frac{M_x}{2}\Delta^2\Big) + \Big(\frac{L_1 M_x}{8} + \frac{L_2}{24}\Big)\Delta^3. \tag{4}$$

Теперь оценим $h(X_{k+1}, \widetilde{X}_{k+1})$, $k = \overline{0, N-1}$. Для этого покажем, что для любой точки $x^{(k+1)} \in X_{k+1}$ найдётся точка $\tilde{x}^{(k+1)} \in \widetilde{X}_{k+1}$, достаточно близкая к точке $x^{(k+1)}$.

Рассмотрим множество X_{k+1}, где k — некоторое целое число от 0 до $N-1$. В силу условия C4 любая точка $x^{(k+1)}$ из множества X_{k+1} является значением некоторой функции $x_*(\cdot) \in C^2([t_0, \vartheta])$ в точке $t = t_{k+1}$, которая в свою очередь является решением начальной задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x_*}(t) &= f(t, x_*(t), u_*(t)), \quad t \in (t_k, t_{k+1}), \\ x_*(t_k) = x^{(k)}, \end{cases}$$

где $u_*(\cdot) \in \mathbb{U}$, $x^{(k)}$ — точка из множества X_k.

Выберем теперь из множества $\widetilde{X}_k$ точку $\widetilde{x}^{(k)}$, ближайшую к $x^{(k)}$. Из определения хаусдорфова отклонения следует, что

$$\|x^{(k)} - \widetilde{x}^{(k)}\| \leqslant h(X_k, \widetilde{X}_k).$$

Обозначим $\bar{u} = u_*\big(t_{k+\frac{1}{2}}\big)$, $x^{(k+1/2)} = x_*\Big(t_k + \dfrac{\Delta}{2}\Big)$, $\widetilde{x}^{(k+1/2)} = \tilde{x}_k + \dfrac{\Delta}{2} f(t_k, \widetilde{x}^{(k)}, \bar{u})$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|x^{(k+1/2)} - \widetilde{x}^{(k+1/2)}\| &= \left\| x^{(k)} + \int\limits_{t_k}^{t_k+\frac{\Delta}{2}} f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\, d\tau - \widetilde{x}^{(k)} - \frac{\Delta}{2} f(t_k, \widetilde{x}^{(k)}, \bar{u}) \right\| \\
&\leqslant \|x^{(k)} - \widetilde{x}^{(k)}\| + \left\| \int\limits_{t_k}^{t_k+\frac{\Delta}{2}} \big(f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) - f(t_k, \widetilde{x}^{(k)}, \bar{u})\big)\, d\tau \right\| \\
&\leqslant h(X^{(k)}, \widetilde{X}^{(k)}) + \Bigg\| \int\limits_{t_k}^{t_k+\frac{\Delta}{2}} \Bigg(f(t_k, x^{(k)}, u_*(t_k)) + \\
&\qquad \int\limits_{t_k}^{\tau} \frac{df}{d\xi}(\xi, x_*(\xi), u_*(\xi))\, d\xi - f(t_k, \widetilde{x}^{(k)}, \bar{u}) \Bigg) d\tau \Bigg\| \\
&\leqslant h(X^{(k)}, \widetilde{X}^{(k)}) + \frac{\Delta}{2} \big\| f(t_k, x^{(k)}, u_*(t_k)) - f(t_k, \widetilde{x}^{(k)}, \bar{u}) \big\| + \\
&\quad L_1 \int\limits_{t_k}^{t_k+\frac{\Delta}{2}} \left(\int\limits_{t_k}^{\tau} d\xi \right) d\tau \\
&\leqslant h(X^{(k)}, \widetilde{X}^{(k)}) + \frac{\Delta}{2} \big\| f(t_k, x^{(k)}, u_*(t_k)) - f(t_k, x^{(k)}, \bar{u}) + f(t_k, x^{(k)}, \bar{u}) - \\
&\qquad f(t_k, \widetilde{x}^{(k)}, \bar{u}) \big\| + \frac{\Delta^2}{8} L_1 \\
&\leqslant h(X^{(k)}, \widetilde{X}^{(k)}) + \frac{\Delta}{2} \left(M_u M_2 \frac{\Delta}{2} + M_x h(X^{(k)}, \widetilde{X}^{(k)}) \right) + \frac{\Delta^2}{8} L_1 \\
&= h(X_k, \widetilde{X}_k) \left(1 + \frac{\Delta}{2} M_x \right) + \frac{\Delta^2}{4} \left(\frac{L_1}{2} + M_u M_2 \right).
\end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}
\|x^{(k+1)} - \widetilde{x}^{(k+1)}\| &= \left\| x^{(k)} + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\, d\tau - \widetilde{x}^{(k)} - \Delta \cdot f(t_{k+\frac{1}{2}}, \widetilde{x}^{(k+1/2)}, \bar{u}) \right\| \\
&\leqslant \|x^{(k)} - \tilde{x}^{(k)}\| + \left\| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) - f(t_{k+\frac{1}{2}}, \widetilde{x}^{(k+1/2)}, \bar{u}) \Big) d\tau \right\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant h(X_k,\widetilde{X}_k)+\left\|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\Big(f\big(t_{k+\frac12},x_*(t_{k+\frac12}),\bar u\big)+\frac{df}{dt}(t_{k+\frac12},x_*(t_{k+\frac12}),\bar u)(\tau-t_{k+\frac12})+\right.\\
&\qquad\left.\frac{d^2}{d\xi^2}(\xi,x_*(\xi),u_*(\xi))\frac{(\tau-t_{k+\frac12})^2}{2}-f(t_{k+\frac12},\widetilde{x}^{(k+1/2)},\bar u)\Big)d\tau\right\|\\
&\leqslant h(X_k,\widetilde{X}_k)+\left\|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\Big(f(t_{k+\frac12},x_*(t_{k+\frac12}),\bar u)-f(t_{k+\frac12},\widetilde{x}^{(k+1/2)},\bar u)\Big)d\tau\right\|+\\
&L_2\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{(\tau-t_{k+\frac12})^2}{2}\,d\tau\\
&\leqslant h(X_k,\widetilde{X}_k)+\Delta M_x\|x^{(k+1/2)}-\widetilde{x}^{(k+1/2)}\|+\frac{\Delta^3}{24}L_2\\
&\leqslant h(X_k,\widetilde{X}_k)\left(1+M_x\Delta+\frac{M_x^2}{2}\Delta^2\right)+\left(\frac{M_xL_1}{8}+\frac{L_2}{24}+\frac{M_uM_2}{4}\right)\Delta^3.
\end{aligned}
$$

В силу произвольности выбора точки $\widetilde{x}^{(i+1)}\in\widetilde{X}_{i+1}$ из последнего неравенства вытекает, что

$$
h(X_{k+1},\widetilde{X}_{k+1})\leqslant h(X_k,\widetilde{X}_k)\left(1+M_x\Delta+\frac{M_x^2}{2}\Delta^2\right)+\left(\frac{M_xL_1}{8}+\frac{L_2}{24}+\frac{M_uM_2}{4}\right)\Delta^3. \qquad (5)
$$

Из (4) и (5) следует, что

$$
d(\widetilde{X}_{k+1},X_{k+1})\leqslant d(\widetilde{X}_k,X_k)\left(1+M_x\Delta+\frac{M_x^2}{2}\Delta^2\right)+\left(\frac{M_xL_1}{8}+\frac{L_2}{24}+\frac{M_uM_2}{4}\right)\Delta^3.
$$

Используя утверждение (см. утверждение в конце п. 3), получаем оценку

$$
d(\widetilde{X}_N,X_N)\leqslant\left(\frac{L_1}{8}+\frac{L_2}{24M_x}+\frac{M_uM_2}{4M_x}\right)\left(\exp\left(\left(M_x+\frac{M_x}{2}\Delta\right)(\vartheta-t_0)\right)-1\right)\Delta^2.
$$

Данная оценка гарантирует второй порядок точности относительно шага по времени при построении множеств достижимости управляемой системы (1) методом Рунге–Кутты (2).

Рассмотрим второй случай, когда вместо условия C4 выполнены условия C5–C7. Очевидно, что в данном случае оценка

$$
h(\widetilde{X}_{i+1},X_{i+1})\leqslant h(\widetilde{X}_i,X_i)\left(1+M_x\Delta+\frac{M_x}{2}\Delta^2\right)+\left(\frac{L_1M_x}{8}+\frac{L_2}{24}\right)\Delta^3 \qquad (6)
$$

также выполняется, так как множества $\widetilde{X}_i$, $i=\overline{1,N}$, не изменились, а классом допустимых управлений, приводящим движения системы (1) на множества X_i, $i=\overline{1,N}$, по-прежнему является $\mathbb{L}$.

Оценим хаусдорфово отклонение $h(X_{k+1},\widetilde{X}_{k+1})$, $k=\overline{0,N-1}$.

В силу C5 для каждой точки $x^{(N)}\in X_N$, кроме “измеримого” управления, существует управление $u(\cdot)\in\mathbb{V}$ с не сгущающимися по времени переключениями, переводящее движение системы (1) из начальной точки $x^{(0)}$ в точку $x^{(N)}$. Выберем число N отрезков разбиения Γ настолько большим, чтобы для любой точки $x^{(N)} \in X_N$ каждый из отрезков Γ содержал не более одного момента переключения управления, под действием которого системы (1) приходит в точку $x^{(N)}$. В худшем случае каждый из отрезков разбиения Γ содержит по одному моменту переключения управления для каждой траектории движения системы, из множества траекторий, достаточного для заполнения множества достижимости X_N. Для оценки сверху будем считать, что все отрезки разбиения Γ содержат по одному такому моменту.

Рассмотрим множество X_k, где k — некоторое целое число от 0 до $N-1$. В силу условия C5 произвольная точка $x^{(k+1)}$ из множества X_{k+1} является значением некоторой функции $x_{12}(\cdot)$ в точке $t = t_{k+1}$, и которая, в свою очередь, является решением начальной задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_{12}(t) = f(t, x_{12}(t), u_{12}(t)), \quad t \in (t_k, t_{k+1}), \\ x_{12}(t) = x_{12}^{(k)}, \end{cases}$$

где $u_{12}(\cdot) \in \mathbb{V}$, $x_{12}^{(k)} \in X_k$.

В силу леммы существует такая точка $\hat{x}_3^{(k+1)} = x_3(t_{k+1})$, что

$$\|x^{(k+1)} - \hat{x}_3^{(k+1)}\| \leqslant \frac{L_2 + \widetilde{C}_1}{6}\Delta^3,$$

и которая является значением в точке $t = t_{k+1}$ решения начальной задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_3(t) = f(t, x_3(t), u_3(t)), \quad t \in (t_k, t_{k+1}), \\ x_3(t_k) = x_3^{(k)}, \end{cases}$$

где $\|u_3\|_{C^2[t_0,\vartheta]} \leqslant \widetilde{C}$, $x_3^{(k)} \in X_k$.

Обозначим через $\widetilde{\mathbb{U}} = \{u(\cdot) : u(\cdot) \in C^2[t_0, \vartheta], \|u(\cdot)\|_{C^2[t_0,\vartheta]} \leqslant \widetilde{C}, u(t) \in P \text{ при } t \in [t_0, \vartheta]\}$. В этих обозначениях $u_3(\cdot) \in \widetilde{\mathbb{U}}$. Заметим, что $\widetilde{\mathbb{U}}$ отличается от $\mathbb{U}$ лишь заменой постоянной M_2 на $\widetilde{C}$.

Определим

$$\widetilde{L}_1 = M_t + M_x \max_{\substack{(t,x)\in D,\\ u\in P}} \|f(t,x,u)\| + M_u \max_{u(\cdot)\in\widetilde{\mathbb{U}}} \|\dot{u}(t)\|.$$

Аналогично определим $\widetilde{L}_2$ заменой $\mathbb{U}$ на $\widetilde{\mathbb{U}}$ в определении L_2.

Аналогично рассмотрению первого случая можно показать, что найдётся такая точка $\widetilde{x}^{(k+1)} \in \widetilde{X}_{k+1}$, что

$$\|\hat{x}_3^{(k+1)} - \widetilde{x}^{(k+1)}\| \leqslant h(X_k, \widetilde{X}_k)\left(1 + M_x\Delta + \frac{M_x^2}{\Delta}\Delta^2\right) + \left(\frac{M_x\widetilde{L}_1}{8} + \frac{\widetilde{L}_2}{24} + \frac{M_u\widetilde{L}_2}{4}\right)\Delta^3.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} \|x^{(k+1)} - \widetilde{x}^{(k+1)}\| &\leqslant \|x^{(k+1)} - \hat{x}_3^{(k+1)}\| + \|\hat{x}_3^{(k+1)} - \widetilde{x}^{(k+1)}\| \\ &\leqslant h(X_k, \widetilde{X}_k)\left(1 + M_x\Delta + \frac{M_x^2}{2}\Delta^2\right) + \\ &\qquad \left(\frac{M_x\widetilde{L}_1}{8} + \frac{\widetilde{L}_2}{24} + \frac{M_u\widetilde{L}_2}{4} + \frac{L_2 + \widetilde{C}_1}{6}\right)\Delta^3. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвольности выбора $x^{(k+1)} \in X_{k+1}$, вытекает, что

$$h(X_{k+1}, \widetilde{X}_{k+1}) \leqslant h(X_k, \widetilde{X}_k)\left(1 + M_x\Delta + \frac{M_x^2}{2}\Delta^2\right) + \\ \left(\frac{M_x\widetilde{L}_1}{8} + \frac{\widetilde{L}_2}{24} + \frac{M_u\widetilde{L}_2}{4} + \frac{L_2 + \widetilde{C}_1}{6}\right)\Delta^3. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$d(X_{k+1}, \widetilde{X}_{k+1}) \leqslant d(X_k, \widetilde{X}_k)\left(1 + M_x\Delta + \frac{M_x^2}{2}\Delta^2\right) + \left(\frac{M_x\widetilde{\widetilde{L}}_1}{8} + \frac{5\widetilde{\widetilde{L}}_2}{24} + \frac{M_u\widetilde{\widetilde{L}}_2}{4} + \frac{\widetilde{C}_1}{6}\right)\Delta^3,$$

где $\widetilde{\widetilde{L}}_1 = \max\{L_1, \widetilde{L}_1\}$, $\widetilde{\widetilde{L}}_2 = \max\{L_2, \widetilde{L}_2\}$.

Таким образом, используя утверждение, получаем оценку

$$d(\widetilde{X}_N, X_N) \leqslant \left(\frac{\widetilde{\widetilde{L}}_1}{8} + \frac{5\widetilde{\widetilde{L}}_2}{24M_x} + \frac{M_uM_2}{4M_x} + \frac{\widetilde{C}_1}{6}\right) \times \\ \left(\exp\left(\left(M_x + \frac{M_x}{2}\Delta\right)(\vartheta - t_0)\right) - 1\right)\Delta^2. \qquad \square$$

5. Примеры

Пример 1. Рассмотрим математический маятник, описываемый системой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 - \sin x_1 + u, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент трения, $x_1 = x_1(t)$ — угол отклонения маятника от вертикального положения, $x_2 = \dot{x}_1(t)$ — скорость отклонения маятника от вертикального положения. Управление маятником на промежутке $[t_0, \vartheta]$ осуществляется при помощи управляющего воздействия $u = u(t)$, стеснённого ограничением $u = u(t) \in P = [a, b]$, $a < b$.

В данной системе

$$f(t, x, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\alpha x_2 - \sin x_1 + u \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Несложно видеть, что для данной системы условие С6 нарушается в каждой точке фазового пространства.

Пример 2. Найдём нетривиальный пример функции $f(t, x, u)$ в системе (1), для которой выполнены условия С1–С3, С6 и С7. Будем искать такую функцию в виде

$$f(t, x, u) = g(t, x)u + q(t, x).$$

Для упрощения будем считать, что фазовая переменная x — скаляр, класс $\mathbb{U}$ состоит из постоянных управлений, класс $\mathbb{V}$ — из кусочно-постоянных.

Для такой функции условие С6 будет эквивалентно выполнению тождества

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, x)\, q(t, x)\, (u_2 - u_1) - \frac{\partial q}{\partial x}(t, x)\, g(t, x)\, (u_2 - u_1) \equiv -\frac{\partial g}{\partial t}(u_2 - u_1)$$

для любых $u_1, u_2 \in P$.

Разделив на $(u_2 - u_1)q^2(t, x)$, получаем тождество

$$\left(\frac{g(t,x)}{q(t,x)}\right)'_x \equiv -\frac{(g(t,x))'_t}{q^2(t,x)}.$$

Данному тождеству удовлетворяют, например, функции $g(t,x) = e^t$, $q(t,x) = x$. Окончательно получаем, что примером управляемой системы, удовлетворяющей условиям C1–C3, C6 и C7, является система (1) с функцией $f(t,x,u) = e^t u + x$, т. е. система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = e^t u(t) + x(t), \quad t \in (t_0, \vartheta), \\ x(t_0) = x^{(0)}. \end{cases}$$

Если предположить, что условие C5 для неё также выполнено, то мы будем иметь управляемую систему, множества достижимости которой вычисляются методом (2) с гарантированным вторым порядком точности относительно шага по времени.

6. Заключение

Несложно заметить, что метод Рунге–Кутты второго порядка имеет второй порядок точности при вычислении областей достижимости только на весьма узком классе управляемых систем. Тем не менее представляет научный интерес выявить данный класс систем. Для описания данного класса желательно иметь легко проверяемые условия на вектор-функцию в правой части системы, которым не является в общем случае условие C4. Лемма лишь частично решает эту проблему, так как взамен условия C4 возникает условие C5, которое также нелегко проверить в общем случае. Кроме того, для практического использования полученных результатов необходимо выяснить оптимальное соотношение между шагом по времени и диаметром сетки на фазовом пространстве при численном вычислении множеств достижимости.

Благодарности. Автор благодарит В.Н. Ушакова за постановку задачи и В.Г. Пименова за полезные обсуждения.

Литература

1. **Sethi S.P.** Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics, 2nd edition / G.L. Thompson — Springer, 2005.
2. **Филькенштейн Е.А., Горнов А.Ю.** Алгоритм квазиравномерного заполнения множества достижимости нелинейной управляемой системы // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. — 2017. — Т. 19. — С. 217–223.
3. **Горнов А.Ю., Филькенштейн Е.А.** Алгоритм кусочно-линейной аппроксимации границы множества достижимости // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 3. — С. 22–31. Перевод: Gornov A.Yu., Finkel'shtein E.A. Algorithm for piecewise-linear approximation of the reachable set boundary // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol. 76, iss. 3. — P. 385–393.
4. **Ferretti R.** High-order approximations of linear control systems via Runge–Kutta schemes // Computing. — 1997. — Vol. 58, iss. 4. — P. 351–364.
5. **Veliov V.M.** Second order discrete approximation to linear differential inclusions // SIAM J. of Numerical Analysis. — 1992. — Vol. 29, iss. 2. — P. 439–451.
6. **Guang D.H., Mingzhu L.** Input-to-state stability of Runge-Kutta methods for nonlinear control systems // J. of Computation and Applied Mathematics. — 2007. — Vol. 205, iss. 1. — P. 633–639.

7. **Baier R.** Selection strategies for set-valued Runge-Kutta methods // Proc. of the Numerical Analysis and its Applications (NAA 2004). — 2005. — Vol. 3401. — P. 149–157. — (Lecture Notes in Computer Science).
8. **Новикова А.О.** Построение множеств достижимости двумерных нелинейных управляемых систем пиксельным методом // Тр. Прикладная математика и информатика. — 2015. — Вып. 50. — С. 62–82.
9. **Novikova A.O.** Computation and visualization of control systems reachable sets with parallel processing on graphics processing units // 13th Viennese Workshop on Optimal Control and Dynamic Games: Operations Research and Control Systems. — TU Wien, 2015. — P. 57–58.
10. **Зорич В.А.** Математический анализ. Часть I. Изд-е 6-е, дополн. — М.: МЦНМО, 2012.

Поступила в редакцию 15 сентября 2018 г.
После исправления 17 июня 2019 г.
Принята к печати 16 июля 2020 г.

Литература в транслитерации

1. **Sethi S.P.** Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics, 2nd edition / G.L. Thompson — Springer, 2005.
2. **Fil'kenshtein E.A., Gornov A.Yu.** Algoritm kvaziravnomernogo zapolneniya mnozhestva dostizhimosti nelineinoi upravlyaemoi sistemy // Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika. — 2017. — T. 19. — S. 217–223.
3. **Gornov A.Yu., Fil'kenshtein E.A.** Algoritm kusochno-lineinoi approksimatsii granitsy mnozhestva dostizhimosti // Avtomatika i telemekhanika. — 2015. — № 3. — S. 22–31. Perevod: Gornov A.Yu., Finkel'shtein E.A. Algorithm for piecewise-linear approximation of the reachable set boundary // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol. 76, iss. 3. — P. 385–393.
4. **Ferretti R.** High-order approximations of linear control systems via Runge–Kutta schemes // Computing. — 1997. — Vol. 58, iss. 4. — P. 351–364.
5. **Veliov V.M.** Second order discrete approximation to linear differential inclusions // SIAM J. of Numerical Analysis. — 1992. — Vol. 29, iss. 2. — P. 439–451.
6. **Guang D.H., Mingzhu L.** Input-to-state stability of Runge-Kutta methods for nonlinear control systems // J. of Computation and Applied Mathematics. — 2007. — Vol. 205, iss. 1. — P. 633–639.
7. **Baier R.** Selection strategies for set-valued Runge-Kutta methods // Proc. of the Numerical Analysis and its Applications (NAA 2004). — 2005. — Vol. 3401. — P. 149–157. — (Lecture Notes in Computer Science).
8. **Novikova A.O.** Postroenie mnozhestv dostizhimosti dvumernyh nelineinyh upravlyaemyh sistem piksel'nym metodom // Tr. Prikladnaya matematika i informatika. — 2015. — Vyp. 50. — S. 62–82.
9. **Novikova A.O.** Computation and visualization of control systems reachable sets with parallel processing on graphics processing units // 13th Viennese Workshop on Optimal Control and Dynamic Games: Operations Research and Control Systems. — TU Wien, 2015.
10. **Zorich V.A.** Matematicheskii analiz. CHast' I. Izd-e 6-e, dopoln. — M.: MTSNMO, 2012.