ПМТФ, № 2, 1971

СПЕКТР МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА — ПУАЗЕЙЛЯ

А. М. Сагалаков

(Новосибирск)

Исследуется спектр малых возмущений плоского течения Куэтта — Пуазейля. Проведена классификация возмущений сообразно их поведению при больших волновых числах. Прослежены изменения, происходящие в спектре при переходе от течения Пуазейля к течению Куэтта, когда число Рейнольдса фиксировано. Рассмотрено поведение возмущений в зависимости от числа Рейнольдса.

1. Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости между параллельными пластинами, производимое градиентом давления и относительным движением пластин. Задача гидродинамической устойчивости сводиться к анализу спектра собственных значений уравнения Орра — Зоммерфельда

$$\varphi^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2\varphi^{\mathrm{II}} + \alpha^4\varphi = i\alpha R\,[(u - c)(\varphi^{\mathrm{II}} - \alpha^2\varphi) - u''\varphi] \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\varphi(y)$ — амплитуда функции тока возмущения, α — волновое число, R — число Рейнольдса, u — профиль скорости, $c = X + iY$ — комплексная фазовая скорость возмущения, собственное значение задачи. Отрицательные Y соответствуют затуханию возмущения, положительные — росту. В качестве единицы длины выбрана полуширина канала, за единицу скорости принята сумма скорости потока на оси и скорости верхней пластины $y = 1$. Выражение для u имеет вид

$$u = (1 - A)(1 - y^2) + Ay \tag{1.3}$$

При изучении задачи на собственные значения (1.1), (1.2) чаще всего ограничиваются исследованием нейтральных возмущений. Между тем в ряде задач, например для развития нелинейной теории, необходимо изучение всего спектра малых возмущений.

Полный спектр малых возмущений для асимметричных профилей ранее не исследовался. Нейтральные возмущения в рассматриваемом течении изучались Поттером [1] и Хэйнсом [2], которые получили достаточно совпадающие результаты.

2. При заданных A, R, α имеется счетное множество собственных значений c_n. Для малых и больших α можно получить асимптотические выражения для c_n. Применяя полученные в [3] результаты, нетрудно найти асимптотические выражения для собственных значений при малых α. Они имеют вид

$$Y_n = -\delta_n(\alpha R)^{-1} \tag{2.1}$$

$$X_n = (1 - A)\,[{}^2/_3 - 5(2\delta_n)^{-1}] \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots) \tag{2.2}$$

$$X_n = (1 - A)\,[{}^2/_3 + 5(6\delta_n)^{-1}] \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots)$$

$$\delta_n = {}^1/_4\pi^2(n + 1)^2 \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

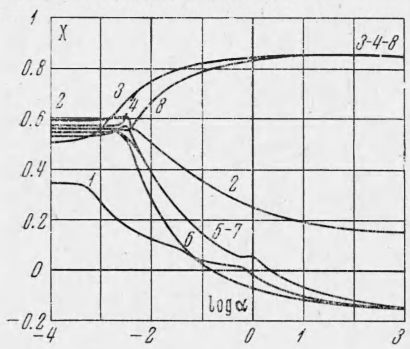
Для $n = 2, 4, 6, \ldots$ значение δ_n находится из уравнения

$$\operatorname{tg} \sqrt{\delta_n} = \sqrt{\delta_n}$$

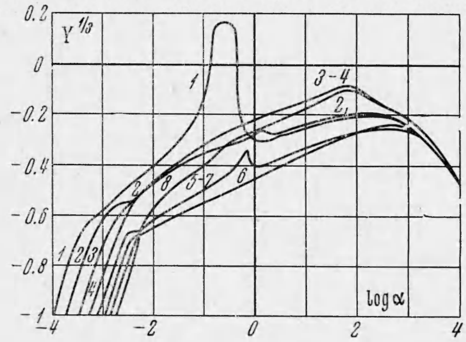
Собственные значения, определяемые формулами (2.2), занумерованы в порядке возрастания $|Y_n|$. Спектральная нумерация при произвольном α будет производиться в соответствии с порядком расположения c_n при малых α. Асимптотическое выражение для Y_n при больших волновых числах записывается в виде

$$Y_n = -\alpha/R \qquad (n \ll \alpha) \tag{2.3}$$

Если $n \gg 1$, то при ограниченных R собственные значения близки к соответствующим величинам в покоящейся жидкости.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для нахождения c_n в интервале между асимптотическими значениями использовался численный метод решения задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, развитый в работах [4-6]. Численные расчеты проводились на БЭСМ-6. Собственные значения находились с заданной точностью (три значащих цифры). Контрольные вычисления были выполнены для течения Паузейля и дали хорошее совпадение с численными результатами, полученными в [7].

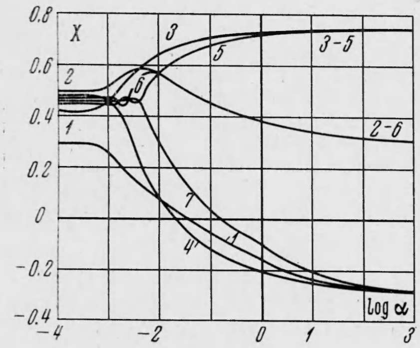
3. Проследим изменения, происходящие в спектре малых возмущений с ростом A от нуля при фиксированном $R = 10^5$. Когда $A = 0$ (течение Пуазейля), численные расчеты дают картину спектра, вполне аналогичную полученной в [6] для $R = 15\,000$. Его характерной особенностью служит четкое разделение возмущений с ростом волнового числа на два класса: пристенные возмущения, которые локализуются у стенок канала, с фазовой скоростью, стремящейся к нулю, и внутренние возмущения, которые локализуются у оси канала, с фазовой скоростью, стремящейся к максимальной скорости потока.

Пристенными оказываются при этом возмущения с $n = 1, 2, 5, 8, \ldots$, а внутренними — возмущения с $n = 3, 4, 6, 7, \ldots$ При наличии движения пластин характерная особенность разделения возмущений сообразно их поведению при больших волновых числах сохраняется. В числе пристенных возмущений будем различать верхние и нижние, локализующиеся при больших α соответственно у верхней и нижней пластин.

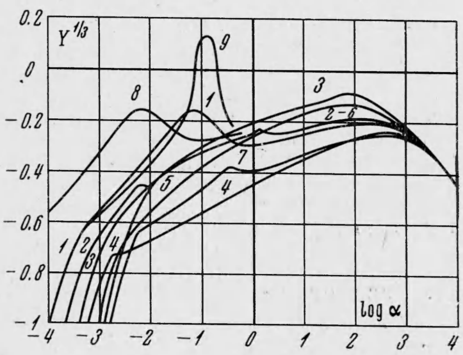
На фиг. 1, 2 представлена зависимость c_n (α) для первых восьми спектральных номеров при $A = 0.15$. Течение в этом случае неустойчиво и к неустойчивости приводит первое собственное значение, так же как и в течении Паузейля. Соответствующий максимум Y_1 (α) при этом смещен в сторону меньших α и неустойчивость связана с наличием критической точки у нижней пластины. Критическая точка у верхней пластины исчезает при значительно меньших A. Порядок разделения возмущений на пристенные и внутренние до $n = 5$ включительно остается пуазейлевым. Однако возмущения, которым отвечают бо́льшие спектральные номера, распределяются иным образом, а именно: возмущения с номерами 6, 7 становятся нижними пристенными, а возмущение с $n = 8$ становится внутренним.

В дальнейшем рассматривается конечное число спектральных номеров, начиная с $n_* = 1$, поэтому имеет смысл отметить преобладание числа нижних пристенных возмущений над верхними и общее преобладание числа пристенных возмущений над внутренними в отличие от течения Пуазейля.

Поведение X_n и Y_n в зависимости от α соответствует асимптотическим выражениям (2.1), (2.2) при $\alpha \sim 10^{-4}$, асимптотическому выражению (2.3) при $\alpha \sim 10^4$. Утрата симметрии профилем скорости при увеличении A от нуля приводит к изменениям в порядке слияния отдельных собственных значений, принадлежащих различным спектральным номерам. Если $c_3(\alpha)$, $c_4(\alpha)$ ведут себя аналогично пуазейлеву случаю, т. е. сливаются при небольших α, то в остальном заметны существенные изменения: не наблюдается того слияния пристенных собственных значений в области $\alpha \gg 1$, которое



Фиг. 3

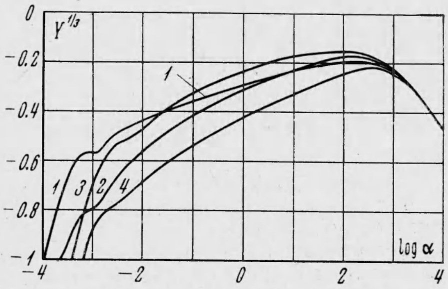


Фиг. 4

имеет место при $A = 0$. Соответствующие зависимости $X_n(\alpha)$, $Y_n(\alpha)$ заметно разделены одна от другой почти до асимптотической области. С другой стороны, при малых α сливаются собственные значения $c_5(\alpha)$ и $c_7(\alpha)$. Обращают на себя внимание замысловатые пересечения зависимостей $X_n(\alpha)$ и $Y_n(\alpha)$ и наличие локальных максимумов $Y_2(\alpha)$, $Y_{5,7}(\alpha)$ при $\alpha \sim 1$.

Вблизи максимума зависимости $Y_{3,4}(\alpha)$ соответствующие собственные значения расслаиваются на небольшую величину и затем вновь сливаются (это не отображено на фиг. 2).

Дальнейшее увеличение A приводит к сложным изменениям в спектре. На фиг. 3, 4 (кривые *1*—*7*) представлена зависимость $c_n(\alpha)$ для первых семи спектральных номеров при $A = 0.3$. Порядок разделения возмущений на пристенные и внутренние таков: номера *1*, *4*, *7*,... отвечают нижним пристенным возмущениям, номера *2*, *6*,...— верхним пристенным, номера *3*, *5*,...— внутренним возмущениям. С ростом A сглаживается асимметрия в разделении пристенных возмущений на верхние и нижние. Это происходит как за счет уменьшения числа внутренних возмущений, так и за счет изменений в распределении пристенных возмущений. Слияние собственных значений $c_2(\alpha)$, $c_6(\alpha)$ происходит приблизительно при том же α, что и в случае слияния при $A = 0.15$.



Фиг. 5

Разделение зависимостей $Y_n(\alpha)$, когда $\alpha \gg 1$, становится более четким, что хорошо иллюстрируется поведением $Y_1(\alpha)$ и $Y_{2,6}(\alpha)$. Наиболее сложное поведение $c_n(\alpha)$ прослеживается в диапазоне изменения $\alpha = 10^{-3} \div 10^{-2}$, где асимптотические выражения (2.1), (2.2) уже существенно неприменимы. В районе «опасных» волновых чисел имеется характерный максимум зависимости $Y_1(\alpha)$ и более слабые максимумы $Y_{2,6}(\alpha)$ и $Y_7(\alpha)$.

Когда параметр A становится равным $^2/_3$, профиль скорости (1.3) утрачивает характерный максимум внутри канала. При этом внутренние возмущения совпадают с верхними пристенными. Таким образом, при $A \geqslant ^2/_3$ в спектре малых возмущений присутствуют лишь одни пристенные возмущения. Утрачивается и преобладание числа нижних пристенных возмущений над верхними.

На фиг. 5 изображено поведение $Y_n(\alpha)$ для первых четырех спектральных номеров при $A = 0.75$. Деление пристенных возмущений при этом значении A на верхние и нижние происходит следующим образом: возмущения с $n = 1, 4, 5, 8, \ldots$ относятся к нижним пристенным, возмущения с $n = 2, 3, 6, 7, \ldots$ — к верхним.

Когда α лежит в интервале $10^{-4} \div 10^{-2}$, в спектре наблюдается пересечение зависимостей $X_n(\alpha)$, $Y_n(\alpha)$, однако слияния отдельных собственных значений не происходит. (При $\alpha = 10^{-2}$ собственные значения расположены в порядке возрастания $|Y_n|$ следующим образом: 1, 3, 2, 7, 5, 6, 4, 8,..., с изменением α этот порядок нарушается.)

Функция $Y_1(\alpha)$ в этом интервале имеет слабый локальный максимум.

Аналогичные максимумы прослеживаются и на фиг. 2, 4, но в этих случаях они будут предвестниками слияния отдельных собственных значений в точках излома зависимостей $c_n(\alpha)$. Величины Y_n уже не имеют локальных максимумов в районе опасных α. Их поведение в этом смысле напоминает поведение внутренних возмущений в рассмотренных случаях. Отметим, что в отличие от течения Куэтта (см. [8]) первое собственное значение здесь не будет всюду наиболее опасным.

Чтобы проследить характер перехода к течению Куэтта, были проведены численные расчеты для значений A, близких к 1. Отдельные зависимости $c_n(\alpha)$ в области малых α, следующей за асимптотической, имеют типичные куэттовские изломы, которые связаны с возникновением колебательных возмущений при $A = 1$. В плоскости Y наблюдается сближение отдельных собственных значений, отвечающих верхним и нижним пристенным возмущениям, которые сливаются при $A = 1$. Спектр малых возмущений течения Куэтта исследовался рядом авторов. Случай больших чисел Рейнольдса подробно изучен в [8].

4. Рассмотрим поведение возмущений в зависимости от числа Рейнольдса. Легко видеть, что уравнение (1.1) для $\alpha^2 \ll 1$ хорошо приближается уравнением

$$\varphi^{\mathrm{IV}} = i\alpha R\left[(u-c)\varphi^{\mathrm{II}} - u''\varphi\right] \qquad (|c \pm A| \gg \alpha^2) \tag{4.1}$$

Из этого уравнения видно, что собственные значения при этом зависят только от одного параметра αR. Таким образом, имея численные результаты при одном R, можно априори делать заключения о зависимости $c_n(\alpha)$ при других значениях R в области $\alpha^2 \ll 1$ более широкой, чем область справедливости асимптотических выражений (2.1), (2.2).

Интервал изменения α, в котором справедливо приведенное рассуждение, представляется весьма интересным, так как в нем происходит существенная перестройка спектра в сравнении с асимптотическим поведением.

Подмеченное обстоятельство можно использовать при проведении численных расчетов для различных чисел Рейнольдса. В качестве примера на фиг. 4 представлены зависимости $Y_1(\alpha)$ для $R = 10^6$ (кривая *8*) и $Y_1(\alpha)$ для $R = 10^5$, которые иллюстрируют справедливость приближения уравнения Орра — Зоммерфельда уравнением (4.1) в области $\alpha^2 \ll 1$.

В предыдущем пункте обращалось внимание на существование локальных максимумов у некоторых зависимостей $Y_n(\alpha)$. Наибольший интерес представляет поведение этих максимумов при увеличении R, так как их существование может быть сопряжено с дополнительной неустойчивостью. Проведенные численные расчеты, в которых использовались как «движение по непрерывности» [4], так и рассмотренная здесь аппроксимация, показывают, что неустойчивость течения Куэтта — Пуазейля связана только с первым собственным значением.

Значение A, полностью стабилизирующее поток, было найдено с помощью движения по непрерывности по максимуму $Y_1(\alpha)$. Оно оказалось равным 0.26, что находится в соответствии с результатами работ [1,2]. На фиг. 4 (кривая *9*) изображена зависимость $Y_1(\alpha)$ при $A = 0.23$, $R = 10^5$. При этих параметрах задачи поток еще неустойчив.

Автор благодарит М. А. Гольдштика за внимание к работе, В. А. Сапожникова за полезные обсуждения, В. Н. Штерна за большое содействие, помощь в работе и полезные обсуждения.

Поступила 20 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Potter M. C. Stability of plane Couette — Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1966, vol. 24, pt 3.
2. Hains F. D. Stability of plane Couette — Poiseuille flow. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 9.
3. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
4. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии поля массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
5. Сапожников В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки. Тр. Всес. семинара по численным методам механики вязкой жидкости (II), Новосибирск, «Наука», 1969.
6. Сапожников В. А., Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Локальные свойства профиля скорости и гидродинамическая устойчивость. II Респ. конф. по аэрогидродинамике и теплообмену и массобмену (аннот. докл). Киев, 1969.
7. Сапожников В. А., Штерн В. Н. Численный анализ устойчивости плоского течения Пуазейля. ПМТФ, 1969, № 4.
8. Штерн В. Н. Спектр малых возмущений плоского течения Куэтта. ПМТФ, 1970, № 1.