волновое движение однородной жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5.
4. **Букатов А. Е., Мордашев В. И.** Влияние продольно сжатой упругой пластинки на развитие волнового возмущения потока однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости.— ПМТФ, 1981, № 1.
5. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.
6. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
7. **Петренко М. П., Барсук Р. П.** Колебания и устойчивость сжатых прямоугольных пластин на упругом основании.— ПМ, 1980, т. 16, № 4.
8. **Стокер Д. Д.** Волны на воде. М.: ИЛ, 1959.
9. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
10. **Черкесов Л. В.** Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наукова думка, 1976.
11. **Богородский В. В., Гаврило В. П.** Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.

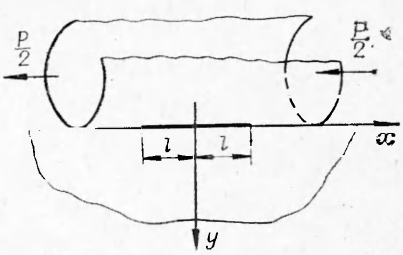
УДК 539.3

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ С ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

Э. М. КИМ, В. П. ОЛЬШАНСКИЙ

(Харьков)

Постановка задачи и метод решения. Пусть внешняя нагрузка приложена к оболочке и направлена параллельно краю полубесконечной пластины, как показано на фигуре. Тела спаяны на участке, ширина которого h_0 мала по сравнению с длиной $2l$, так что область контакта можно считать отрезком прямой линии $\{x \in [-l, l], y = 0\}$. В качестве основной неизвестной примем плотность касательных контактных усилий $\tau(x)$. Нормальную составляющую положим равной нулю. Это физически оправдано тем, что жесткость тонкостенной панели на изгиб значительно меньше жесткости растяжения — сжатия. Аналогичное упрощение использовано в [1] при анализе контактного взаимодействия оболочек и в математическом отношении состоит в том, что вместо системы двух имеем одно сингулярное интегральное уравнение. Чтобы составить его, примем в качестве условия контакта равенство деформаций $(u_0)'_x$ в пластине и u'_x в оболочке. Используя функции Грина из [1, 2], имеем



$$\int_{-l}^{l} \tau(\xi)\,\Phi(x-\xi)\,d\xi = f(x), \tag{1}$$

где

$$\Phi(t) = C[t^{-1} + S(t)]; \tag{2}$$

$$S(t) = (Cl)^{-1} \sum_{m-1}^{\infty} \varepsilon^{2m} (tl^{-1})^{2m-1} \left(c_{1m} + c_{2m} \ln \frac{|t|}{l}\right);$$

$$C = -(1+\nu)(3-\nu)(4\pi Eh)^{-1} - 2(\pi E_0 h_0)^{-1}; \quad \varepsilon = 0{,}5bl; \quad b^1 = 12(1-\nu^2)h^{-2}R^{-2};$$

E, ν, h, R — модуль упругости, коэффициент Пуассона, толщина и радиус оболочки; E_0, h_0 — модуль упругости и толщина пластины; $f(x)$ — деформация панели в зоне контакта от внешних нагрузок.

Выражений c_{sm} ($s = \overline{1; 2}$), зависящих от m и $\ln \varepsilon$, не приводим. Их можно получить из работы [2]. Убывание c_{sm} обеспечивает сходимость ряда (2) и двух его производных на всей числовой оси.

Для отыскания плотности $\tau(x)$ преобразуем методом равносильной регуляризации выражение (1) в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$Q(x) = Q_0(x) + L[Q(x)], \tag{3}$$

где

$$Q(x) = \tau(x)(l^2 - x^2)^{1/2};$$

$$Q_0 = P\pi^{-1} + (\pi^2 C)^{-1} \int_{-l}^{l} (l^2 - t^2)^{1/2} f(t)(t-x)^{-1}\,dt;$$

$$P = \int_{-l}^{l} \tau(x)\,dx; \quad L = -\pi^{-2} \int_{-l}^{l} Q(\xi)(l^2 - \xi^2)^{-1/2} F(\xi)\,d\xi;$$

$$F(\xi) = \int_{-l}^{l} (l^2 - t^2)^{1/2} (t - x)^{-1} S(t - \xi)\, dt.$$

В операторе L произведена перестановка порядка интегрирования. Это возможно в силу непрерывности функции $S(t - \xi)$ [1].

В полуинтервале $\varepsilon \in [0; \varepsilon_1[$ функцию $\tau(x)$ определим приближенно из (3) методом последовательных приближений. Аналогично [3, 4] с помощью табличных интегралов [5] находим

$$\varepsilon_1 = (2D_1)^{-1}\left[\left(D_2^2 + 4D_1\right)^{1/2} - D_2\right],$$

$$D_1 = \pi^2 c_1 (1 - 2\nu + 5\nu^2)[128(1+\nu)]^{-1}, \quad D_2 = \pi^2 c_1 (3 - 2\nu + 3\nu^2)[32\sqrt{2}(1+\nu)]^{-1},$$

$$c_1 = \left\{\frac{1}{8}\pi(3-\nu) + \pi E h [E_0 h_0 (1+\nu)]^{-1}\right\}^{-1}.$$

Одинаковым толщинам и материалам контактирующих тел при $\nu = 0{,}3$ соответствует $\varepsilon_1 = 4{,}99$.

Рассмотрим далее конкретные задачи.

Равномерное растяжение панели. Пусть оболочка растягивается так, что ее деформация в продольном направлении постоянна и равна Δ. Выясним распределение контактных усилий и напряжений в зоне спая с полуплоскостью. Поскольку усилия самоуравновешены, построим решение уравнения (3) при условии, что $\int_{-l}^{l} \tau(x)\, dx = 0$, $f(x) = \Delta$. С точностью до слагаемых порядка ε^6 методом последовательных приближений находим

$$\tau(x) = (\pi C)^{-1} (l^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=0}^{2} T_{2k+1} x^{2k+1} + O(\varepsilon^8)\right],$$

где
$$T_1 = -\omega\left[C - 0{,}5\varepsilon^2 c_{11} + \varepsilon^4\left(0{,}25 c_{11}^2 C^{-1} + 0{,}375 c_{12} - c_{22}\frac{6\chi - 13}{16}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^6\left(\frac{15}{4}c_{13} + \frac{3}{8}\gamma - \frac{1}{4}c_{11}^3 C^{-2} - \frac{6\chi + 1}{16}\beta\right)\right];$$

$$T_3 = -\omega\varepsilon^4 l^{-2}\left[c_{22}\left(\frac{3}{2}\chi - \frac{15}{8}\right) - \frac{3}{2}c_{12} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{3}{2}\gamma + \frac{15 - 12\chi}{8}\beta - 5c_{13}\right)\right];$$

$$T_5 = \omega\varepsilon^4 l^{-4}\left[\frac{1}{4}c_{22} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{1}{4}\beta - 5c_{13}\right)\right]; \quad \omega = \Delta C^{-1}; \quad \chi = \ln 2; \quad \beta = c_{11}c_{22}C^{-1};$$

$$\gamma = c_{11}c_{12}C^{-1}.$$

Сдвиг панели относительно полуплоскости. Пусть внешние силы величиной 0,5 направлены в одну сторону (против оси Ox) и приложены в точках ($y = 0$, $|x| = l_1 \gg l$). Тогда можно приближенно положить $f(x) = 0$. Решение уравнения (3), удовлетворяющее условию равновесия

$$\int_{-l}^{l} \tau(x)\, dx = P,$$

строится аналогично предыдущему. С точностью до слагаемых порядка ε^6 оно имеет вид

$$\tau(x) = P(\pi C)^{-1}(l^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\sum_{k=0}^{3} T_{2k} x^{2k} + O(\varepsilon^8)\right].$$

При этом

$$T_0 = C - \frac{1}{2}\varepsilon^2 c_{11} - \varepsilon^4\left[\frac{7}{8}c_{12} + c_{22}\left(\frac{41}{48} - \frac{7}{8}\chi\right)\right] - \varepsilon^6\left(\frac{67 - 30\chi}{160}\beta + \frac{13}{8}c_{13}\right);$$

$$T_2 = \varepsilon^2 l^{-2}\left[c_{11} - \varepsilon^2\left(c_{22}\chi - \frac{1}{3}c_{22} - c_{12}\right) - \varepsilon^4\left(\frac{3}{4}c_{13} + \frac{30\chi - 53}{80}\beta\right)\right];$$

$$T_4 = -\varepsilon^4 l^{-4}\left[c_{22}\left(\chi - \frac{11}{6}\right) - c_{12} - \varepsilon^2\left(\frac{11}{40}\beta + \frac{9}{2}c_{13}\right)\right];$$

$$T_6 = \varepsilon^6 l^{-6}(c_{13} - 0{,}05\beta).$$

Характер особенностей напряженного состояния панели вне зоны подкрепления. Анализ напряжений σ_x, σ_y показывает, что они ограничены на отрезке контакта пане-

$10x l^{-1}$	Значения $T(x)$				
	$\varepsilon=0$	$\varepsilon=1{,}5$	$\varepsilon=2{,}5$	$\varepsilon=3{,}5$	$\varepsilon=4{,}5$
0	318	308	289	261	225
1	320	309	291	263	227
2	324	314	297	271	236
3	333	324	308	284	253
4	347	339	326	305	278
5	367	361	351	334	313
6	398	394	390	378	365
7	445	445	444	443	442
8	530	535	543	556	574
9	730	745	771	810	863

ли с полуплоскостью. Однако в связи с тем, что контактные усилия бесконечны в точках ($|x| = l$, $y = 0$), вне зоны подкрепления напряжения имеют особенности порядка 1/2. Так, используя двумерное преобразование Фурье [6], получаем следующие асимптотические формулы для вычисления главных значений напряжений вне отрезка контакта $\{y = 0,\ |x| = l + |r|\,|_{r\to 0}\}$:

при равномерном растяжении панели

$$\sigma_\alpha = MA_\alpha \sqrt{l}(C\sqrt{2|r|})^{-1}; \tag{4}$$

при сдвиге относительно полуплоскости

$$\sigma_\alpha = PNA_\alpha \operatorname{sgn}(x)(\sqrt{2l|r|})^{-1}. \tag{5}$$

Здесь

$$\alpha \in \{x;\ y\};\ A_x = -(3+\nu)(4\pi h)^{-1};\ A_y = (1-\nu)(4\pi h)^{-1};$$

$$M = \Delta[1 - \varepsilon^2 c_{11}(2C)^{-1}] + O(\varepsilon^4);\ N = [1 + \varepsilon^2 c_{11}(2C)^{-1}] + O(\varepsilon^4);$$

$$c_{11} = -(32Eh)^{-1}(1 - 2\nu + 5\nu^2).$$

Поскольку σ_x и σ_y бесконечны у концов обрезка контакта, оценку прочности панели можно проводить по критериям хрупкого разрушения [7]. При этом коэффициенты интенсивности напряжений элементарно вычисляются с помощью формул (4), (5).

Заметим, что значительная концентрация контактных усилий и напряжений на краях области спая пластины и оболочки обнаружена численно в [8]. Однако характер особенностей этих величин оставался неизвестным.

Анализируя формулы (4), (5), можно видеть, что при равномерном растяжении панели коэффициенты интенсивности напряжений прямо пропорциональны квадратному корню из длины отрезка подкрепления. Аналогичная зависимость имеет место в теории разрушения [7], где в роли длины выступает протяженность трещины. При сдвиге оболочки относительно полуплоскости коэффициенты интенсивности обратно пропорциональны l. Поэтому во втором случае, удлиняя зону подкрепления, можно понизить уровень напряженного состояния.

Результаты расчета. В таблице приведены безразмерные значения контактного усилия $T(x) = 10^3\tau(x)lP^{-1}$, вычисленные в предположении, что толщины и материалы контактирующих тел одинаковы и $\nu = 0{,}3$. Увеличение ε приводит к удлинению зоны контакта. При этом уменьшаются касательные усилия в средней части зоны и возрастают на краях. Значение $\varepsilon = 0$ соответствует контакту полуплоскости с пластиной. Качественных отличий в распределениях контактных усилий для пластины и оболочки нет, т. е. искривление срединной поверхности тонкостенного тела не вносит изменений в порядок особенностей. Поэтому скорость сходимости асимптотического метода при соблюдении неравенства ($\varepsilon < \varepsilon_1$) достаточно высокая, причем нулевым приближением выступает решение для пластины.

Поступила 24 II 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Григолюк Э. И., Толкачев В. М.** Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980.
2. **Гармаш Л. И., Ольшанский В. П.** Расчет равнопрочного стрингера, передающего продольную нагрузку на ортотропную панель.— ПМ, 1981, № 7.
3. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
4. **Ольшанский В. П.** О передаче момента оболочке через жесткое одномерное включение.— Изв. вузов СССР. Машиностроение, 1981, № 8.

5. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
6. **Ольшанский В. П.** Об особенностях напряженного состояния оболочек, нагруженных по линиям главной кривизны.— Проблемы прочности, 1978, № 3.
7. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
8. **Hamajima Ryokichi, Okumura Toshie.** Концентрация напряжений и анализ контакта между пластиной и цилиндрической оболочкой.— Добоку гаккай ромбун хококусю. Proc. Jap. Soc. Civ. Eng., 1978, N 279.

УДК 539.3

О ЗАДАЧЕ КОНТАКТА ДВУХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ИСКАЖЕННЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Ф. М. БОРОДИЧ

(*Москва*)

Полное решение задачи о контакте двух полупространств, искаженных предварительно действием сосредоточенных сил, направленных в разные стороны, известно и применяется в теории трещин (см., например, [1], где рассмотрен плоский вариант, так как пространственный вариант разбирается аналогично). В данной работе рассматривается задача о контакте двух полупространств, имеющих значительно более общее искажение: допускается, чтобы расстояние между искаженными полупространствами на бесконечности было положительно-однородной функцией (отрицательной степени однородности). Хотя эта задача и не допускает точного решения, в ней можно получить все качественные выводы, аналогичные выводам теории трещин. Эти выводы получаются из соображений подобия.

1. Контакт абсолютно жесткого бесконечного штампа с упругим полупространством. Рассмотрим бесконечные штампы, поверхность которых описывается функцией $x_3 = f(x_1, x_2)$. Предполагаем, что при достаточно больших x_1 и x_2, $x_1^2 + x_2^2 \geqslant \rho^2$, где ρ — некий радиус, функция $f(x_1, x_2)$ определяется положительной гладкой положительно-однородной функцией отрицательной степени β, т. е.

(1.1)
$$f(x_1, x_2) > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in R^2,$$
$$f(x_1, x_2) \in C^1(R^2 \backslash \{0\}),$$
$$\forall \lambda > 0, \quad f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^\beta f(x_1, x_2), \quad \beta < 0 \quad \forall (x_1, x_2){:}\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geqslant \rho.$$

Известно [2], что в упругом полупространстве $x_3 \leqslant 0$, на граничной плоскости которого равны нулю касательные напряжения σ_{i3} $(i = 1, 2)$, все напряжения и перемещения определяются одной гармонической функцией F, значения которой при $x_3 = 0$ связаны с u_3 и σ_{33} зависимостями

(1.2)
$$u_3 = 2(1 - \nu)F(x_1, x_2, 0), \quad \sigma_{33} = 2\mu \partial F(x_1, x_2, 0)/\partial x_3,$$

где ν, μ — коэффициент Пуассона и модуль сдвига полупространства.

Пусть абсолютно жесткий штамп вдавливается поступательно без трения в упругое полупространство. Контактная задача формулируется следующим образом — при заданной форме штампа $f(x_1, x_2)$ и сдавливающем напряжении S необходимо найти: область G на границе полупространства, в точках которой происходит контакт между штампом и полупространством; константу α, представляющую собой упругое сближение тел; гармоническую функцию F, входящую в (1.2). Значения G, α, F должны удовлетворять следующим условиям:

(1.3)
$$c_1 F(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2) - \alpha, \quad (x_1, x_2) \in G \cup \partial G,$$
$$\partial F(x_1, x_2, 0)/\partial x_3 = 0, \quad (x_1, x_2) \in R^2 \backslash G,$$
$$c_2 \partial F/\partial x_3 = S \text{ на } \infty \text{ при } x_3 = 0,$$

где $c_1 = 2(1 - \nu)$; $c_2 = 2\mu$; ∂G — граница открытой области G.

Т е о р е м а. Пусть функция $f(x_1, x_2)$, определяющая поверхность штампа, является произведением функции $f_0(x_1, x_2)$ и параметра A, $A > 0$, $f = Af_0$, где f_0 — положительная гладкая положительно-однородная функция степени β $(\beta < 0)$.

Пусть гармоническая функция F_{11}, область G_{11} и константа α_{11} дают решение контактной задачи (1.3) при параметре $A = 1$ и напряжении $S = 1$, тогда для произвольного параметра A и напряжения S решение контактной задачи дается величинами F, α, G, определенными следующими соотношениями:

(1.4)
$$F(x_1, x_2, x_3) = A\gamma^{-\beta} F_{11}(\gamma x_1, \gamma x_2, \gamma x_3), \quad \alpha = A\gamma^{-\beta}\alpha_{11},$$
$$(x_1, x_2) \in G, \text{ если и только если } (\gamma x_1, \gamma x_2) \in G_{11},$$

где $\gamma = (S/A)^{1/(1-\beta)}$.