

О ЗАЖИГАНИИ РЕАГИРУЮЩИХ ВЕЩЕСТВ

А. М. Гришин

(Саратов)

При решении задач о зажигании реагирующих веществ приходится преодолевать большие математические трудности. Аналитическое решение известно лишь для одной задачи этого типа [1]. В данной работе на примере решения двух различных задач теории зажигания, имеющих самостоятельный интерес, показано, что все математические трудности успешно преодолеваются при помощи метода М. Е. Швецца [2].

1. Рассмотрим зажигание полубесконечного реагирующего пространства нагретой средой с другими теплофизическими константами в условиях идеального контакта. Полагаем, что здесь и ниже имеет место реакция нулевого порядка, а все теплофизические коэффициенты постоянны. Из решения этой задачи, как частный случай при  $n \rightarrow \infty$ , получаем решение задачи, рассмотренной в [1,3,4]. Математически задача сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - e^{\theta_1}, \quad x > 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau}, \quad \xi = \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^{1/2} x < 0 \quad (1.2)$$

с граничными и начальными условиями

$$\theta_1|_{x=0} = \theta_2|_{\xi=0}, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x}|_{x=0} = n \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi}|_{\xi=0} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \theta_1|_{\tau=0} = \theta_1|_{x=\infty} = -\theta_0, \quad \theta_2|_{\tau=0} = \theta_2|_{\xi=-\infty} = 0 \\ n = \left(\frac{\lambda_2 \rho_2 c_2}{\lambda_1 \rho_1 c_1}\right)^{1/2}, \quad \theta = \frac{(T - T_0) E}{RT_0^2}, \quad x = r \left(\frac{k_0 E}{\lambda_1 RT_0^2} \exp - \frac{E}{RT_0}\right)^{1/2} \\ \tau = \frac{q k_0 E t}{c_1 \rho_1 RT_0^2} \exp - \frac{E}{RT_0} \end{aligned}$$

Здесь  $\theta$  — безразмерная температура,  $x$  — безразмерная координата,  $\tau$  — безразмерное время,  $T_0$  — начальная температура нагретой реагирующей среды,  $T^\circ$  — начальная температура реагирующего вещества,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $q$  — тепловой эффект реакции,  $r$  — размерная координата,  $k_0$  — предэкспонент,  $E$  — энергия активации,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\rho$  — плотность,  $c$  — теплоемкость,  $t$  — время,  $\kappa$  — коэффициент температуропроводности, индексы 1 и 2 соответствуют реагирующему веществу и нагретой среде.

При выводе (1.1) использовалось преобразование Франк-Каменецкого [5] для  $\exp(-E/RT)$ . Уравнение (1.1), согласно [4], удовлетворительно описывает зажигание конденсированных реагирующих веществ и для реакции первого порядка, если

$$\frac{(T_0 - T^\circ) c_1 \rho_1}{q} \ll 1$$

Для решения краевой задачи (1.1)–(1.3) применим метод Швеца [2, 6], который наряду с простотой обладает хорошей сходимостью. Поскольку практически изменение температуры происходит в окрестности границы раздела сред, уместно ввести толщины теплового пограничного слоя  $\Delta_1$  ( $\tau$ ) и  $\Delta_2$  ( $\tau$ ). Тогда граничные условия на  $\pm\infty$  и условия при  $\tau = 0$  примут вид

$$\theta_1(\Delta_1, \tau) = -\theta_0, \quad \theta_2(-\Delta_2, \tau) = 0, \quad \Delta_1(0) = \Delta_2(0) = 0 \quad (1.4)$$

В качестве первых приближений выберем

$$\theta_1^{(1)} = a_1 x + b_1, \quad \theta_2^{(1)} = a_2 \xi + b_2 \quad (1.5)$$

Величины  $a_1, a_2, b_1, b_2$  определяем из граничных условий (1.3), (1.4)

$$a_1 = -\frac{n\theta_0}{\Delta_2 + n\Delta_1}, \quad b_1 = b_2 = -\frac{\theta_0\Delta_2}{\Delta_2 + n\Delta_1}, \quad a_2 = -\frac{\theta_0}{\Delta_2 + n\Delta_1} \quad (1.6)$$

Подставляя (1.5) в правые части (1.1) и (1.2) и интегрируя два раза, имеем

$$\theta_1^{(2)} = 1/6 a_1 x^3 + 1/2 b_1 x^2 - \exp(b_1 + a_1 x) / a_1^2 + C_1 x + D_1 \quad (1.7)$$

$$\theta_2^{(2)} = 1/6 a_2 \xi^3 + 1/2 b_2 \xi^2 + C_2 \xi + D_2 \quad (1.8)$$

Величины  $C_1, C_2, D_1, D_2$  определяем, как и раньше, из начальных и граничных условий (1.3), (1.4)

$$C_2 = (\Delta_2 + n\Delta_1)^{-1} \left[ \frac{\gamma}{a_1^2} + \frac{b_1}{2} (\Delta_2^2 - \Delta_1^2) - \frac{(a_2 \Delta_2^3 + a_1 \Delta_1^3)}{6} - \theta_0 - \frac{1 + a_1 \Delta_1}{a_1^2} e^{b_1} \right]$$

$$C_1 = \frac{e^{b_1}}{a_1^2} + nC_2, \quad D_2 = C_2 \Delta_2 + \frac{a_2 \Delta_2^3}{6} - \frac{b_1 \Delta_2^2}{2}, \quad D_1 = D_2 + \frac{e^{b_1}}{a_1^2}, \quad \gamma = e^{-\theta_0}$$

Из условий Швеца

$$\left. \frac{\partial \theta_1^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=\Delta_1} = \left. \frac{\partial \theta_2^{(2)}}{\partial \xi} \right|_{\xi=-\Delta_2} = 0 \quad (1.10)$$

получим два обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнения для  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$

$$a_1 \Delta_1^2 \left( \frac{\Delta_2}{2} + \frac{n\Delta_1}{3} \right) + b_1 \left( \Delta_1 \Delta_2 + \frac{n\Delta_1^2}{2} + \frac{n\Delta_2^2}{2} \right) - \frac{n\Delta_2^3 a_2}{6} - n\theta_0 + \frac{(a_1 \Delta_2 - n)}{a_1^2} e^{b_1} + \frac{\gamma [n - a_1 (\Delta_2 + n\Delta_1)]}{a_1^2} = 0 \quad (1.11)$$

$$a_2 \Delta_2^2 \left( \frac{\Delta_2}{2} + \frac{n\Delta_1}{2} \right) - b_1 \left( n\Delta_1 \Delta_2 + \frac{\Delta_1^2}{2} + \frac{\Delta_2^2}{2} \right) - \frac{a_1 \Delta_1^3}{6} - \theta_0 + \frac{\gamma - 1 - a_1 \Delta_1}{a_1^2} e^{b_1} = 0 \quad (1.12)$$

Если не реагирующая среда обладает очень большой теплоемкостью, то температура на границе сред остается постоянной и  $n \rightarrow \infty$ . В этом случае вместо системы (1.11), (1.12) имеем лишь одно уравнение, которое интегрируется в замкнутом виде

$$\Delta_1 = \theta_0 \left\{ \frac{\theta_0}{1 - \gamma - \gamma\theta_0} \left[ \exp \frac{6(1 - \gamma - \gamma\theta_0)\tau}{\theta_0^3} - 1 \right] \right\}^{1/2} \approx \sqrt{6\tau} \left[ 1 + \frac{3(1 - \gamma - \gamma\theta_0)}{2\theta_0^3} \right]$$

В общем случае систему (1.11), (1.12) решаем методом разложения в ряд

$$\Delta_1 = \alpha_1 \tau^{1/2} + \beta_1 \tau + \delta_1 \tau^{3/2} + \dots, \quad \Delta_2 = \alpha_2 \tau^{1/2} + \beta_2 \tau + \delta_2 \tau^{3/2} + \dots \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в (1.11), (1.12) и приравнявая нулю члены с одинаковыми степенями при  $\tau$ , получим для определения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  систему двух нелинейных алгебраических уравнений, а для определения  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$

получим системы линейных уравнений. В результате решения этих уравнений находим  $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{6}$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  и, наконец,

$$\delta_1 = \frac{(1+n)[(9+9n+4\theta_0)(v-\gamma)-9n\theta_0\gamma]}{\sqrt{6}n^2\theta_0^3} \quad (1.15)$$

$$\delta_2 = \frac{(1+n)[9(1+n)(v-\gamma)-n\theta_0(6v+5\gamma)]}{\sqrt{6}n^2\theta_0^3} \quad \left(v = \exp \frac{-\theta_0}{1+n}\right) \quad (1.16)$$

При  $n \rightarrow \infty$  величина  $\Delta_1$  с учетом найденных значений  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и  $\delta_1$  совпадает с точностью до членов, содержащих  $\tau^i$  ( $i > 3/2$ ), с выражением (1.13). Первые члены в (1.14) характеризуют рост пограничного слоя для нереагирующей среды. Из (1.13), (1.15) и (1.16) следует, что теплота реакции при  $\theta_0 \gg 1$  мало влияет для умеренных значений  $\tau$  на толщину пограничного слоя. Полагая в (1.7), (1.8), (1.14) члены, зависящие от теплоты реакции, равными нулю, сравнивая  $\theta_1(0, \tau)$  и  $\partial\theta_1/\partial x$  при  $x = 0$  с известными точными величинами [7], получаем  $\theta_1(0, \tau) = -\theta_0/(1+n)$  как для точного, так и для приближенного решений, а градиент температуры приближенного решения при  $x = 0$  в 1.08 раза превышает по модулю истинное значение [7]. При помощи условия Зельдовича  $\partial\theta_1/\partial x = 0$  при  $x = 0$  [8] находится время прогрева реагирующей системы. Для  $\tau = \tau_*$  имеем уравнение

$$\Delta_1^2 \frac{n\theta_0}{2} (\Delta_2 + n\Delta_1) + n\theta_0\Delta_1 (\Delta_1\Delta_2 - \Delta_1\Delta_2) = \frac{(\Delta_2 + n\Delta_1)^2}{n\theta} (e^{b_1} - \gamma) \quad (1.17)$$

Подставляя в (1.17) величины  $\Delta_1(\tau)$  и  $\Delta_2(\tau)$  и решая получаемое при этом уравнение относительно  $\tau$ , найдем время прогрева. Приближенным решением (1.17) может служить выражение

$$\tau_*^\circ = \frac{n^2\theta_0^2}{4(1+n)^2(v-\gamma)} \quad (1.18)$$

которое получается из (1.17), если пренебречь  $\delta_1$  и  $\delta_2$  по сравнению с  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Из (1.18) легко видеть, что при  $n \rightarrow \infty$   $\tau_*^\circ \rightarrow 1/4\theta_0^2$ , а при  $n \rightarrow 0$   $\tau_*^\circ \rightarrow 0$ , т. е.  $\tau_*^\circ$  — немонотонная функция  $n$ , и при  $n = n_*$  достигается максимум  $\tau_*^\circ = \tau_{*n}^\circ$ . Чем больше  $\theta_0$ , тем острее и выше максимум  $\tau_*^\circ$  и тем ближе  $n_*$  к 0. При  $\theta_0 \gg 1$  имеем  $n_* \approx 1/(\theta_0 - 2)$ . В пределе  $\theta_0 \rightarrow \infty$ ,  $n_* \rightarrow 0$ , а  $\tau_*^\circ \rightarrow \infty$ . Немонотонность  $\tau_*^\circ$  в функции от  $n$  объясняется, по-видимому, специфической особенностью функции Аррениуса, заключающейся в том, что тепловыделение от реакции не обращается в 0 даже при достаточно низких температурах. Этот недостаток функции Аррениуса отмечается в [9] и для его устранения применяется метод отрезания. Этот недостаток устраняем при помощи метода Сполдинга [10] и Розена [11], полагая

$$\exp - \frac{E}{RT} \approx A \left( \frac{T - T^\circ}{T_0 - T^\circ} \right)^k \quad (A = \text{const}, k = \text{const}) \quad (1.19)$$

Аналогично предыдущему, для тепловыделения в форме (1.19) находим

$$\tau_{1*} = \frac{k+1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{k-1} \quad \left( \tau_1 = \frac{k_0 A t}{c_1 \rho_1 (T_0 - T^\circ)} \right) \quad (1.20)$$

В этом случае время прогрева при возрастании  $n$  монотонно убывает от  $\infty$  при  $n = 0$  до  $\tau_{1*}^\circ = 1/2(k+1)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Для предельного случая  $n \rightarrow \infty$  можно найти точное, в рамках метода Швеца [2], значение времени прогрева

$$\tau_* = \frac{\theta_0^3}{6(1-\gamma-\gamma\theta_0)} \ln \frac{2\theta_0(1-\gamma)}{(2+\gamma)\theta_0-3(1-\gamma)} \approx \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{3\theta_0}{16} + \frac{3}{32} \quad (1.21)$$

Сравнение (1.21) с выражением для  $\tau_*$  при  $n \rightarrow \infty$ , найденным из (1.17) с учетом  $\delta_1$ , показало, что они практически идентичны. Сравняя (1.21) с выражением для  $\tau_*$ , найденным в [4] при помощи (1.21) электронно-вычислительной машины, видим, что точность его вполне удовлетворительна. Так, для  $\theta_0 = 5, 10, 15, 20, 25, 30$  при помощи (1.21) имеем  $\tau_* = 7.3, 27, 59, 104, 161, 231$ .

Для оценки точности (1.18) при умеренных значениях  $n$  находим  $\tau_*$  для  $n = 1$  из (1.17) методом проб и линейной интерполяции. При этом было найдено

$$\begin{aligned} \tau_* &= 28.8, \quad \theta_1^{(2)}(0, \tau_*) = -1.7, \quad \Delta_1(\tau_*) = 15.8, \quad \Delta_2(\tau_*) = 11.9 \quad (\theta_0 = 5) \\ \tau_* &= 957, \quad \theta_1^{(2)}(0, \tau_*) = -2.6, \quad \Delta_1(\tau_*) = 75.8, \quad \Delta_2(\tau_*) = 68.9 \quad (\theta_0 = 10) \\ \tau_* &= 24.7 e^{10} \quad (\theta_0 = 20) \end{aligned}$$

в то время как из (1.18) имеем соответственно  $\tau_*^\circ = 20.7, 934, 25 e^{10}$ . Таким образом, точность формулы (1.18) в рамках наших приближений вполне удовлетворительна. Зная  $\tau_*$ , легко найдем при помощи (1.14) толщину прогретого слоя

$$\Delta_{1*} = \Delta_1(\tau_*) = \frac{n\theta_0}{2(1+n)} \left( \frac{6}{v-\gamma} \right)^{1/2} \left[ 1 + \frac{(9+9n+4\theta_0)(v-\gamma) - 9n\gamma\theta_0}{24(1+n)(v-\gamma)\theta_0} \right] \quad (1.22)$$

и  $\Delta_2(\tau_*)$ , а при помощи (1.10) находим  $\theta_1(0, \tau_*) = b_2$ . При  $n \rightarrow 0$  вместо (1.22) следует пользоваться формулой, которую можно найти аналогичным образом, считая, что тепловыделение от реакции определяется (1.19), а время прогрева (1.20). Как видно из приведенных вычислений, величина  $\theta_1^{(2)}(0, \tau)$  растет с ростом  $\tau$ , и моменту  $\tau = \tau_*$  отвечает температура, близкая к нулю.

2. Впервые зажигание реагирующих веществ с учетом фазовых превращений изучалось Я. Б. Зельдовичем [12]. В работе [12] даны схема процесса зажигания и приближенный метод расчета. В [13] конкретизированы и развиты представления работы [12]. Здесь рассматривается зажигание взрывчатого вещества (ВВ) нагретой пластиной с учетом тепловыделения от реакции. Твердое ВВ с начальной температурой  $T^\circ$  в начальный момент приводится в соприкосновение с нагретой пластиной, температура которой  $T_0 > T_* > T^\circ$ , где  $T_*$  — температура фазового превращения. Следуя [12], полагаем, что теплота реакции выделяется в жидкой фазе, а реакция разложения эндотермична. Кроме того, считаем, что плотности твердой и жидкой фаз одинаковы. Математически задача сводится к решению уравнений (1.1), (1.2) при  $x < x_*$  и  $x > x_*$  соответственно с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} \theta_1(0, \tau) &= 0, \quad \left( \beta \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_*} = p \frac{dx_*}{d\tau}, \quad \theta_1(x_*, \tau) = \theta_2(x_*, \tau) = -\theta_* \\ \theta_2 \Big|_{x=\infty} &= \theta_2 \Big|_{\tau=0} = -\theta_0 \\ \alpha &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad p = \frac{LE}{c_1 RT_0^2}, \quad \theta_* = \frac{(T_0 - T_*)E}{RT_0^2}, \quad \theta_0 = \frac{(T_0 - T^\circ)E}{RT_0^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $x_*$  — безразмерная координата фронта превращения,  $p$  — безразмерная теплота фазового превращения,  $L$  — теплота фазового превращения, а индексы 1 и 2 относятся к жидкой и твердой фазам соответственно.

Как и раньше, вводим толщину пограничного слоя  $\Delta(\tau)$ . Тогда последнее из граничных условий (2.1) и начальные условия примут вид

$$\theta_2(\Delta, \tau) = -\theta_0, \quad \Delta(0) = 0, \quad x_*(0) = 0 \quad (2.2)$$

В качестве начальных приближений выберем линейные функции

$$\theta_1^{(1)} = -\frac{\theta_* x}{x_*}, \quad \theta_2^{(1)} = \frac{(\theta_0 - \theta_*)x}{x_* - \Delta} - \theta_0 - \frac{\Delta(\theta_0 - \theta_*)}{x_* - \Delta} \quad (2.3)$$

Эти функции удовлетворяют всем граничным условиям, кроме второго из условий (2.1). Подставляя  $\theta_1^{(1)}$  и  $\theta_2^{(1)}$  в правые части уравнений

(1.1), (1.2) и интегрируя результаты по  $x$ , имеем вторые приближения

$$\theta_1^{(2)} = \frac{\theta_* x_*^2 x^3}{6x_*^2} - \frac{x_*^2}{\theta_*^2} \exp - \frac{\theta_* x}{x_*} + g_1 x + h_1 \quad (2.4)$$

$$\theta_2^{(2)} = \frac{\alpha(\theta_0 - \theta_*) x^2}{2(x_* - \Delta)^2} \left[ \frac{(\Delta - x_*) x_*}{3} + x_* \Delta - x_* \Delta \right] + g_2 x + h_2 \quad (2.5)$$

Величины  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  определяем при помощи граничных условий (2.1), (2.3)

$$g_1 = \frac{1}{x_*} \left( \frac{\gamma x_*^2}{\theta_*^2} - \theta_* - \frac{x_*^2}{\theta_*^2} - \frac{\theta_* x_* x_*}{6} \right), \quad h_1 = 0 \quad (2.6)$$

$$g_2 = \frac{1}{\beta x_*} \left\{ \frac{\alpha \beta x_*^2 (\theta_0 - \theta_*)}{(x_* - \Delta)^2} \left[ \frac{x_*}{2} (x_* + \Delta) - \Delta x_* \right] + \right. \quad (2.7)$$

$$\left. + x_* x_* \left( p + \frac{\theta_*}{3} \right) - \frac{x_*^2 (1 - \gamma_1 - \gamma_1 \theta_*)}{\theta_*^2} \right\}$$

$$h_2 = \frac{(\theta_0 - \theta_*) x_*^2}{2(x_* - \Delta)^2} \left[ \frac{x_*}{3} (2\Delta + x_*) - \Delta x_* \right] - \theta_* - g_2 x_* \quad (\gamma_1 = e^{-\theta_*}) \quad (2.8)$$

Для определения  $\Delta$  и  $x_*$  используем граничное условие (2.2) и условие Швеца  $\partial \theta_2 / \partial x = 0$  при  $x = \Delta$ . В результате для  $\Delta$  и  $x_*$  получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\alpha (x_* - \Delta) (x_* + 2\Delta) + 6 = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\alpha \beta}{2} x_* (\theta_0 - \theta_*) (\Delta + x_*) = \theta_* + \frac{x_*^2}{\theta_*^2} (1 - \gamma_1 - \gamma_1 \theta_*) - x_* x_* \left( p + \frac{\theta_*}{3} \right) \quad (2.10)$$

Систему (2.9), (2.10) с начальными условиями (2.2) решаем методом разложения в ряд, полагая

$$\Delta = \nu_1 \tau^{1/2} + \nu_2 \tau + \nu_3 \tau^{3/2} + \dots, \quad x_* = \mu_1 \tau^{1/2} + \mu_2 \tau + \mu_3 \tau^{3/2} + \dots \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в (2.9), (2.10), получим для определения  $\nu_1$  и  $\mu_1$  систему двух алгебраических уравнений второго порядка, а для определения  $\nu_2$ ,  $\mu_2$ ,  $\nu_3$ ,  $\mu_3$ , ... — системы линейных уравнений. В результате находим

$$\mu_1 = \left[ \frac{12}{\alpha(2m+1)(m-1)} \right]^{1/2}, \quad \nu_1 = m\mu_1, \quad \nu_2 = \mu_2 = 0 \quad (2.12)$$

$$m = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{3\beta(\theta_0 - \theta_*)}{\theta_*} + \left[ 9 + \frac{30\beta}{\theta_*} (\theta_0 - \theta_*) + \frac{9\beta^2}{\theta_*^2} (\theta_0 - \theta_*)^2 + \right. \right. \quad (2.13)$$

$$\left. \left. + \frac{48}{\alpha\theta_*} \left( p + \frac{\theta_*}{3} \right) \right]^{1/2} \right\}$$

$$\mu_3 = \frac{12(1 - \gamma_1 - \gamma_1 \theta_*) \mu_1}{\theta_*^2 [3\alpha\beta(\theta_0 - \theta_*) (3d + m + 4) + 8(3p + \theta_*)]_d}, \quad \nu_3 = d\mu_3, \quad d = \frac{4 - m}{8m - 5}$$

Первые члены в (2.11) дают решение задачи Стефана о плавлении не реагирующей среды. При  $E \rightarrow \infty$ ,  $\theta_0 \rightarrow \infty$ ,  $\theta_* \rightarrow \infty$  имеем не реагирующую среду. Обычно  $E \gg 1$ ,  $\theta_0 \gg 1$ ,  $\theta_* \gg 1$ . Поскольку  $\nu_3$  и  $\mu_3 \sim \theta_*^3$ , то они малы по сравнению с  $\nu_1$  и  $\mu_1$ , и, следовательно, тепловыделение от реакции не играет значительной роли для величин  $\Delta$  и  $x_*$  при умеренных значениях  $\tau$ . Точное решение задачи Стефана о плавлении для не реагирующей среды дано в [7]. Для  $\alpha = 0.4848$ ,  $\beta = 2.5$ ,  $p = 20.125$ ,  $\theta_0 = 12.25$ ,  $\theta_* = 9.22$  при помощи [7] имеем  $x_* = 0.74 \sqrt{\tau}$ , а по приближенным формулам (2.11), (2.12), (2.13) имеем  $x_* \approx 0.72 \sqrt{\tau}$ . Таким образом,

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{13.03}{\sqrt{\tau}}, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} \approx - \frac{13.92}{\sqrt{\tau}} \quad (2.14)$$

Следовательно, точность приближенных формул вполне удовлетворительна. Отметим, что теплофизические коэффициенты соответствуют гипотетическому ВВ со свойствами нитрогликоля [13], но плотности обеих фаз полагаются одинаковыми. Удовлетворяя (2.4) условию Я. Б. Зельдовича [8], получим с точностью до членов, содержащих  $\tau^i$  ( $i > 3/2$ ), уравнение для определения времени прогрева

$$\frac{(\theta_* - 1 + \gamma_1) \tau}{\theta_*^3} (\mu_1 + \mu_3 \tau^{1/2})^2 = 1 + \frac{\mu_1^2}{12} + \frac{\mu_1 \mu_3 \tau}{3} + \frac{\mu_3^2 \tau^2}{4} \quad (2.15)$$

Отбрасывая члены, содержащие  $\mu_3$  и  $\mu_3^2$ , получим приближенное решение уравнения (2.15)

$$\tau_*^0 = \frac{(12 + \mu_1^2) \theta_*^3}{12(\theta_* - 1 + \gamma_1) \mu_1^2} \quad (2.16)$$

которое можно при желании уточнить, прибегнув к методу малого параметра и считая малым  $\mu_3$ . При  $p \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow 0$  из (2.16) получаем главный член формулы (1.21). При этом величина  $x_*$  играет роль  $\Delta$ ,  $\theta_*$  играет роль  $\theta_0$ , а второе из условий (2.1) превращается в условие Швеца [2]. Зная время прогрева, можно рассчитать любые другие характеристики зажигания. В частности, количество переданного нагретой пластиной тепла в течение времени прогрева с точностью до членов, содержащих  $\mu_3$ , равно

$$Q = \frac{(\mu_1^2 + 12) \theta_*^2}{9\mu_1^2} \left[ \frac{(12 + \mu_1^2) \theta_*^3}{12(\theta_* - 1)} \right]^{1/2} \quad (2.17)$$

Сравнение формул (2.16) и (1.21) показало, что фазовое превращение значительно увеличивает время прогрева. В частности, для введенного выше гипотетического ВВ  $\tau_*$  равно 180.2 по (2.16) и  $\tau_* = 21.2$  по (1.21), если полагать в (1.21)  $\theta_0 = \theta_* = 9.22$  или  $\tau_* = 37.5$ , если  $\theta_0 = 12.25$ . Не представляет принципиальной трудности решение методом М. Е. Швеца [2] задачи о зажигании ВВ, если плотности фаз сильно различаются, однако, в силу того, что в этом случае возникает механическое движение жидкой фазы, выкладки становятся более громоздкими.

Автор благодарит А. И. Говядинову за обсуждение работы.

Поступила 3 I 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З е л ь д о в и ч Я. Б. К теории зажигания. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 2.
2. Ш в е ц М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. ПММ, 1949, т. 13, вып. 3.
3. В и л ю н о в В. Н., С и д о н с к и й О. В. К теории воспламенения конденсированных систем накаливаемой поверхностью. Докл. АН СССР, 1963, т. 152, № 1.
4. А в е р с о н А. Э., Б а р з ы к и н В. В., М е р ж а н о в А. Г. Закономерности зажигания конденсированных взрывчатых систем при идеальном теплообмене на поверхности с учетом выгорания. Инж.-физ. ж., т. 9, № 2, 1965.
5. Ф р а н к - К а м е н е ц к и й Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Изд-во АН СССР, 1947.
6. Г а н д и н Л. С. О сходимости метода Швеца. ПММ, 1950, т. 14, вып. 4.
7. C a r s l a w Н. С., J a g e r J. С. Conduction of heat in solids. Oxford, At the Clarendon Press, 1959 (русс. перев.: Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Изд-во «Наука», 1964).
8. З е л ь д о в и ч Я. Б. Теория зажигания накаливаемой поверхностью. Ж. эксперим. и теор. физ., 1939, № 12.
9. З е л ь д о в и ч Я. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. хим., 1948, т. 22, № 1.
10. S p a l d i n g D. V. Theory of Laminar Flame Propagation. Combustion and Flame, 1957, vol. 1, p. 287.
11. R o s e n G. On the Classification of the Chemistry in Combustion Experiments. Jet Propulsion, 1958, vol. 28, p. 839.
12. З е л ь д о в и ч Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. Ж. эксперим. и теор. физ., 1942, № 11—12.
13. Л и б р о в и ч В. Б. О воспламенении порохов и взрывчатых веществ. ПМТФ, 1963, № 6.