

ТЕПЛООБМЕН В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ  
НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В КАНАЛЕ  
С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В. В. Гогосов

(Москва)

Рассматривается задача о движении полностью ионизованной неизоотермической (температура ионов не равна температуре электронов) плазмы в плоском канале. Выписываются формулы для распределения скорости, плотности токов, температур компонент по сечению канала. В написанные выражения входит ряд параметров: сопротивление внешней нагрузки, число Гартмана, параметры, характеризующие анизотропию коэффициентов переноса, и т. д. Выясняется влияние этих параметров на распределение температур компонент по сечению канала.

§ 1. Система уравнений для полностью ионизованной плазмы. Рассмотрим полностью ионизованную плазму, состоящую из двух компонент: электронов и ионов. Пусть для определенности ионы однократно ионизованы. Полученная в работе [1] система уравнений, описывающая движение такой плазмы, выписывается ниже

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{v}_e = 0, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{v}_i = 0 \quad (1.1)$$

$$m_e n_e \frac{d_e v_e^\alpha}{dt} = - \frac{\partial p_e}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_e^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - e n_e \left( E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}]_\alpha \right) + R_\alpha$$

$$m_i n_i \frac{d_i v_i^\alpha}{dt} = - \frac{\partial p_i}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_i^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + e n_i \left( E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}]_\alpha \right) - R_\alpha \quad (1.2)$$

$$\frac{3}{2} n_e \frac{d_e T_e}{dt} + p_e \operatorname{div} \mathbf{v}_e = - \operatorname{div} \mathbf{q}_e - \pi_e^{\alpha\beta} \frac{\partial v_e^\alpha}{\partial x_\beta} + Q_e$$

$$\frac{3}{2} n_i \frac{d_i T_i}{dt} + p_i \operatorname{div} \mathbf{v}_i = - \operatorname{div} \mathbf{q}_i - \pi_i^{\alpha\beta} \frac{\partial v_i^\alpha}{\partial x_\beta} + Q_i \quad (1.3)$$

Здесь  $n$  — число частиц в единице объема,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $m$  — масса частиц,  $p$  и  $\pi$  — давление и тензор вязких напряжений,  $e$  — заряд протона,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — электрическое и магнитное поле,  $T$  — температура,  $\mathbf{R}$  — сила, с которой ионы действуют на электроны,  $\mathbf{q}$  — поток тепла к данной компоненте;

$$Q_e = - \mathbf{R} \mathbf{u} - \gamma (T_e - T_i), \quad Q_i = \gamma (T_e - T_i), \quad \gamma = \frac{3m_e}{m_i} \frac{n_e}{\tau_e}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i \quad (1.4)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_T, \quad \mathbf{R}_u = - \alpha_{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel} - \alpha_{\perp} \mathbf{u}_{\perp} - \alpha_{\wedge} \mathbf{u} \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{H} / H$$

$$\mathbf{R}_T = - \beta_{\parallel} {}^u T \nabla_{\parallel} T_e - \beta_{\perp} {}^u T \nabla_{\perp} T_e - \beta_{\wedge} {}^u T \mathbf{h} \times \nabla T_e \quad (1.5)$$

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_e^u + \mathbf{q}_e^T, \quad \mathbf{q}_e^u = \beta_{\parallel} {}^{Tu} \mathbf{u}_{\parallel} + \beta_{\perp} {}^{Tk} \mathbf{u}_{\perp} + \beta_{\wedge} {}^{Tu} \mathbf{h} \times \mathbf{u}$$

$$\mathbf{q}_e^T = - \kappa_{\parallel}^e \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{\perp}^e \nabla_{\perp} T_e - \kappa_{\wedge}^e \mathbf{h} \times \nabla T_e \quad (1.6)$$

$$\mathbf{q}_i = - \kappa_{\parallel}^i \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{\perp}^i \nabla_{\perp} T_i + \kappa_{\wedge}^i \mathbf{h} \times \nabla T_i \quad (1.7)$$

Значки  $\parallel$  и  $\perp$  у векторов означают, что берется компонента вектора, соответственно параллельная и перпендикулярная к магнитному полю;  $\tau_e$  — время рассеяния электронов на ионах («электронное время между столкновениями»).

Индексом  $e$  обозначаются величины, относящиеся к электронам, индексом  $i$  — к ионам. При выводе уравнений использовалось

$$\varepsilon_e = 3/2 n_e T_e, \quad \varepsilon_i = 3/2 n_i T_i, \quad c_v^e = c_v^i = 3/2$$

где  $\varepsilon$  — внутренняя энергия единицы объема,  $c_v$  — теплоемкость, отнесенная к одной молекуле.

Для замыкания системы нужно добавить уравнения состояния для электронов и ионов

$$p_e = n_e T_e, \quad p_i = n_i T_i \quad (1.8)$$

и уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho_3 \quad (1.9)$$

Здесь  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $\rho_3$  — плотность заряда. Полезным также окажется уравнение для изменения плотности заряда

$$\partial \rho_3 / \partial t + \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (1.10)$$

Коэффициенты уравнений  $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$  и т. д. являются функциями  $\tau_e, \tau_i, T_e, T_i$  и т. д. Вид этих функций приведен в цитированной выше работе [1]. Некоторые из них будут выписаны ниже. В настоящей работе для облегчения выкладок будем считать эти коэффициенты постоянными.

Будем в дальнейшем считать плазму квазинейтральной

$$n_e = n_i \quad (1.11)$$

Тогда последнее из уравнений Максвелла  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho_3$  нужно только для определения по найденному из остальных уравнений системы электрическому полю  $\mathbf{E}$  отклонения плазмы от квазинейтральности. Введем для удобства, как это обычно делается и для изотермической плазмы, параметры  $\rho_0, \mathbf{v}$  и  $\mathbf{j}$  по формулам

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \rho_e + \rho_i = m_e n_e + m_i n_i \approx n m_i = \rho_i \\ \rho_0 \mathbf{v} &= \rho_i \mathbf{v}_i + \rho_e \mathbf{v}_e \approx \rho_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{j} = en (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь и в дальнейшем учтено, что  $m_e \ll m_i$ . (Заметим, что уравнения плазмы [1] также написаны с учетом этого обстоятельства.)

Вместо уравнений (1.1) — (1.2) для  $n_e, n_i, \mathbf{v}_e$  и  $\mathbf{v}_i$  напомним уравнения для  $\rho_0, \mathbf{v}$  и  $\mathbf{j}$ . Складывая одно с другим уравнения (1.1), а также уравнения (1.2), используя (1.11) и вводя

$$p = p_e + p_i, \quad \pi = \pi_e + \pi_i \approx \pi_i \quad (1.13)$$

Получим

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \text{div } \rho_0 \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \rho_0 v_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \text{div } \rho_0 \mathbf{v} v_\alpha - \frac{\partial \pi^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_\alpha \quad (1.14)$$

Здесь (1.14) воспользовались тем фактом, что вязкость среды определяется в основном ионами. Для изотермической плазмы это известный факт, вытекающий из того, что отношение электронного коэффициента вязкости к ионному оказывается порядка  $(m_e/m_i)^{1/2}$ . В неизотермической плазме это отношение зависит также от температур электронов и

ионов. При этом оказывается, что электронной вязкостью можно пренебречь, когда

$$T_e \ll \left(\frac{2m_i}{m_e}\right)^{1/2} T_i \quad \text{при} \quad \frac{j}{enV} \ll 1, \quad T_e \ll \left(\frac{2m_i}{m_e} \frac{e^2 n^2 V^2}{j^2}\right)^{1/2} T_i \quad \text{при} \quad \frac{j}{enV} \gg 1$$

Другими словами, температура электронов не должна очень сильно превышать температуру ионов. В противном случае электронную вязкость также нужно учитывать.

Уравнение для  $j$  получим, сложив первое уравнение (1.2), умноженное на  $-e/m_e$ , с умноженным на  $e/m_i$  вторым уравнением (1.2). При этом уравнение для  $j$  можно записать в виде

$$\frac{\mathbf{R}}{en} + \frac{1}{enc} \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \frac{1}{en} \nabla p_e = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \quad (1.15)$$

Здесь  $\mathbf{R}$  определяется формулой (1.5). Это уравнение представляет наиболее общую по сравнению с употреблявшимися ранее при решении различных задач форму закона Ома.

Уравнения (1.14), (1.15) вместе с уравнениями (1.3), (1.8), (1.9), (1.11) образуют замкнутую систему уравнений для определения параметров плазмы.

**§ 2. Постановка задачи и используемые уравнения.** Рассмотрим задачу о движении плазмы между параллельными пластинами в магнитном поле  $\mathbf{H}$ , перпендикулярном пластинам под действием приложенного постоянного градиента давления. Пусть ось  $x$  — направлена вдоль пластин, ось  $y$  перпендикулярна пластинам и совпадает с направлением магнитного поля. Будем считать плазму несжимаемой  $n = \text{const}$ , а все параметры плазмы, кроме давления, зависящими только от координаты  $y$ . Кроме того, будем считать, что  $\omega_e \tau_e$  произвольно, а  $\omega_i \tau_i \ll 1$ . Последнее неравенство позволяет записать тензор вязкости ионов в форме, которую он имеет в обычной гидродинамике. Магнитное число Рейнольдса будем для простоты считать малым, тогда индуцированным магнитным полем можно пренебречь. При необходимости нетрудно отказаться от этого предположения.

При сделанных предположениях уравнения (1.14), (1.10) значительно упрощаются  $\partial \rho v_y / \partial y = 0$ ,  $\partial j_y / \partial y = 0$ . Считая стенки непроницаемыми и непроводящими электрический ток, получим

$$v_y = 0, \quad j_y = 0 \quad (2.1)$$

Сила трения  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_T$  (1.5), входящая в уравнение закона Ома с учетом сделанных предположений, а также (2.1) будет иметь вид

$$\mathbf{R} = \frac{\alpha_\perp}{en} \mathbf{j}_\perp + \frac{\alpha_\parallel}{en} \mathbf{j} \times \mathbf{h} - \beta_\parallel^{uT} \frac{\partial T_e}{\partial y} (\mathbf{y}^\circ) \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{y}^\circ$  — единичный вектор вдоль оси  $y$ .

Тогда закон Ома (1.15) можно записать в виде

$$\mathbf{j}_\perp + a_1 \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \beta_\parallel^{uT} a_2 c \frac{dT_e}{dy} (\mathbf{y}^\circ) - a_2 c \nabla p_e = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) \quad (2.3)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{en}{c\alpha_\perp} + \frac{\alpha_\parallel}{\alpha_\perp H}, \quad a_2 c = \frac{en}{\alpha_\perp}, \quad \sigma = \frac{e^2 n^2}{\alpha_\perp} = a_2 c en \quad (2.4)$$

Уравнение движения с учетом сделанных в постановке задачи предположений примет вид

$$0 = -\nabla p + \mu \frac{d^2 \mathbf{v}}{dy^2} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \quad (2.5)$$

Уравнения (1.3) при сделанных предположениях запишутся в виде

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{dq_y^e}{dy} + \frac{1}{en} \mathbf{Rj} - \gamma (T_e - T_i) \\ q_y^e &= -\kappa_{\parallel}^e \frac{dT_e}{dy}, \quad q_y^i = -\kappa_{\parallel}^i \frac{dT_i}{dy} \\ 0 &= -\frac{dq_y^i}{dy} + \eta \left[ \left( \frac{dv_x}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dv_z}{dy} \right)^2 \right] + \gamma (T_e - T_i) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя  $\mathbf{R}$  из уравнения (2.2) в уравнения (2.6), получим уравнения для определения температур в данной задаче

$$0 = \kappa_{\parallel}^e \frac{d^2 T_e}{dy^2} + \frac{j^2}{\sigma} - \gamma (T_e - T_i) \quad (2.7)$$

$$0 = \kappa_{\parallel}^i \frac{d^2 T_i}{dy^2} + \eta \left[ \left( \frac{dv_x}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dv_z}{dy} \right)^2 \right] + \gamma (T_e - T_i) \quad (2.8)$$

Из уравнений Максвелла (1.9) следует

$$E_x = \text{const}, \quad E_z = \text{const}$$

Вводя характерную скорость  $U$  и длину  $h$ , а также

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad \mathbf{E}^* = \frac{\mathbf{E}}{H}, \quad x^* = \frac{x}{h}, \quad y^* = \frac{y}{h}, \quad z^* = \frac{z}{h}, \quad j^* = \frac{j}{\sigma H v / c}$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho U^2}, \quad T^* = \frac{T}{m_i U^2}, \quad R = \frac{\rho U h}{\eta}, \quad M^2 = \frac{H^2 \sigma h^2}{\eta c^2}, \quad a_1 H = a_1^*, \quad a_2 H = a_2^*$$

$$\mathbf{E}^{\circ} = \frac{c}{U} \mathbf{E}^* + a_2 H \frac{R}{M^2} \nabla p_e^*, \quad \beta^* = \frac{\beta_{\parallel} U T}{n}, \quad \kappa^* = \frac{\kappa}{n U h}, \quad \gamma^* = \gamma \frac{h}{n U} \quad (2.9)$$

удобно записать уравнения (2.3), (2.5), (2.7), (2.8) в безразмерном виде

$$0 = -\nabla p^* + \frac{1}{R} \frac{d^2 \mathbf{v}^*}{dy^{*2}} + \frac{M^2}{R} \mathbf{j}^* \times \mathbf{h} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{j}^* + a_1^* \mathbf{j}^* \times \mathbf{h} - \beta^* a_2^* \frac{R}{M^2} \frac{dT_e^*}{dy^*} (\mathbf{y}^{\circ}) = \mathbf{E}^{\circ} + \mathbf{v}^* \times \mathbf{h} \quad (2.11)$$

$$0 = \kappa_e^* \frac{d^2 T_e^*}{dy^{*2}} + \frac{M^2}{R} j^{*2} - \gamma^* (T_e^* - T_i^*) \quad (2.12)$$

$$0 = \kappa_i^* \frac{d^2 T_i^*}{dy^{*2}} + \frac{1}{R} \left[ \left( \frac{dv_x^*}{dy^*} \right)^2 + \left( \frac{dv_z^*}{dy^*} \right)^2 \right] + \gamma^* (T_e^* - T_i^*) \quad (2.13)$$

В дальнейшем будем иметь дело только с безразмерными величинами и индекс (\*) будем опускать.

**§ 3. Распределение токов и скоростей по сечению канала.** Вычислим распределение токов и скоростей по сечению канала. Проектируя уравнения (2.10) и (2.11) на оси  $x$  и  $z$  координат, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_x}{dy^2} - \frac{M^2}{R} j_z, & j_z (1 + a_1^2) &= E_z^{\circ} - a_1 E_x^{\circ} + v_x + a_1 v_z \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_z}{dy^2} + \frac{M^2}{R} j_x, & j_x (1 + a_1^2) &= E_x^{\circ} + a_1 E_z^{\circ} + a_1 v_x - v_z \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставляя последние два уравнения в первые, получим уравнения для определения  $v_x$  и  $v_z$

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} - av_x - aa_1 v_z + RP_x - \lambda = 0, \quad \frac{d^2 v_z}{dy^2} + aa_1 v_x - av_z + RP_z + \delta = 0 \quad (3.2)$$

Здесь

$$a = \frac{M^2}{1 + a_1^2}, \quad P_x = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad P_z = -\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\lambda = a'(E_z^\circ - a_1 E_x^\circ), \quad \delta = a(E_x^\circ + a_1 E_z^\circ)$$

Решение этих уравнений легко выписывается

$$v_x = 2A_1 \cos \beta y \operatorname{ch} \alpha y + 2A_2 \sin \beta y \operatorname{sh} \alpha y + u_0$$

$$v_z = -2A_1 \sin \beta y \operatorname{sh} \alpha y + 2A_2 \cos \beta y \operatorname{ch} \alpha y + w_0 \quad (3.3)$$

Здесь

$$2A_1 = -u_0 \frac{\cos \beta \operatorname{ch} \alpha}{\Delta} + w_0 \frac{\sin \beta \operatorname{sh} \alpha}{\Delta}, \quad 2A_2 = -u_0 \frac{\sin \beta \operatorname{sh} \alpha}{\Delta} - w_0 \frac{\cos \beta \operatorname{ch} \alpha}{\Delta}$$

$$(\Delta = \cos^2 \beta + \operatorname{sh}^2 \alpha) \quad (3.4)$$

$$u_0 = -E_z^\circ + u_{00}, \quad u_{00} = \frac{R}{M^2} (P_x - a_1 P_z)$$

$$w_0 = E_x^\circ + w_{00}, \quad w_{00} = \frac{R}{M^2} (P_z + a_1 P_x) \quad (3.5)$$

$$\alpha^2 = \frac{\tilde{\alpha}}{2} [1 + (1 + a_1^2)^{1/2}], \quad \beta^2 = \frac{a}{2} [-1 + (1 + a_1^2)^{1/2}]$$

Постоянные  $P_x$ ,  $P_z$ ,  $E_x^\circ$ ,  $E_z^\circ$ , входящие в решение, можно выразить через расход и полный ток в направлениях  $x$  и  $z$ , а также через внешнюю нагрузку.

Распределение токов по сечению канала найдется из уравнений (3.1) после подстановки вместо  $v_x$  и  $v_z$  их значений из уравнений (3.3). Проведя указанные выкладки, получим

$$j_z = q [\lambda a^{-1} + \cos \beta y \operatorname{ch} \alpha y (2A_1 + a_1 2A_2) +$$

$$+ \sin \beta y \operatorname{sh} \alpha y (2A_2 - a_1 2A_1) + u_0 + a_1 w_0]$$

$$j_x = q [\delta a^{-1} + \cos \beta y \operatorname{ch} \alpha y (a_1 2A_1 - 2A_2) +$$

$$+ \sin \beta y \operatorname{sh} \alpha y (a_1 2A_2 + 2A_1) + a_1 u_0 - w_0] \quad (3.6)$$

$$q = (1 + a_1^2)^{-1}$$

Введем расход  $Q$  и полный ток  $I$  по формулам

$$Q = Q_x = \int_{-1}^1 v_x dy, \quad Q_z = \int_{-1}^1 v_z dy, \quad I_x = \int_{-1}^1 j_x dy, \quad I_z = \int_{-1}^1 j_z dy$$

Интегрируя уравнение (3.3) от  $-1$  до  $+1$ , легко получить

$$u_0 = \frac{Qb_1 + Q_z b_2}{b_1^2 + b_2^2}$$

$$b_1 = \frac{1}{\Delta} \left( -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sin 2\beta + \cos 2\beta - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{sh} 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha \right) \quad (3.7)$$

$$w_0 = \frac{Q_z b_1 - Qb_2}{b_1^2 + b_2^2}, \quad b_2 = \frac{1}{\Delta} \left( -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{sh} 2\alpha + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \sin 2\beta \right)$$

Будем считать, что по оси  $z$  канал ограничен проводящими стенками  $z^* = z/h = \pm 1/2 h_1/h$ , к которым подсоединена внешняя нагрузка  $R_z$ , так что ток, индуцированный в направлении  $z$ , проходит через эту нагрузку. Будем считать, что ток, индуцированный в направлении оси  $x$ , также проходит через нагрузку  $R_x$ . Тогда

$$E_x = -\rho_x I_x, \quad E_z = -\rho_z I_z \quad (3.8)$$

$$\rho_x = \frac{h_1}{L} h \sigma R_x, \quad \rho_z = \rho = \frac{L}{h} h \sigma R_z \quad (3.9)$$

В этих формулах  $R_x, R_z$  — сопротивления внешней нагрузки;  $2h, h_1, L$  — высота, ширина и длина канала соответственно.

В дальнейшем для облегчения выкладок будем считать, что  $\rho_x = 0$ , тогда  $E_x = 0$ . Разумеется, это ограничение легко снимается. Наличие стенок по оси  $z$  накладывает условие на расход  $Q_z = 0$ . Интегрируя уравнение (3.1) от  $-1$  до  $+1$  и подставляя в полученное выражение  $E_x^0, E_z^0$  из формул (3.5), будем иметь

$$\frac{I_x}{2q} = w_0 - a_1 u_0 - \frac{R}{M^2} \frac{P_z}{q} + \frac{a_1 Q}{2}, \quad \frac{I_z}{2q} = u_0 - a_1 w_0 + \frac{R}{M^2} \frac{P_x}{q} + \frac{Q}{2} \quad (3.10)$$

Из уравнений (3.10), (3.5), (3.8) легко получить связь градиентов давления с расходом и внешней нагрузкой

$$P_x = \frac{M^2}{Rr} [u_0 (1 + 2q\rho) + w_0 (2a_1 q\rho - l) - q\rho Q]$$

$$P_z = \frac{M^2}{Rr} \{u_0 (1 + 2q\rho) l + w_0 [2\rho (a_1 q l + 1) + 1] - q l \rho Q\} \quad (3.11)$$

$$r = 1 + l^2 + 2\rho, \quad l = \frac{a_2}{k} - a_1, \quad P_x^e = \frac{P_x}{k}, \quad P_z^e = \frac{P_z}{k} \quad (3.12)$$

Подставляя в уравнение (3.10)  $P_x, P_z$  из (3.11) и  $u_0, w_0$  из (3.7), можно получить выражения для составляющих полного тока, протекающего в направлениях  $x$  и  $z$ , в зависимости от расхода и внешней нагрузки. Как и следовало ожидать  $I_z = 0, I_x \neq 0$  при  $\rho = \infty$ . При  $\rho = 0$  имеем  $\max I_z$ . Зная  $I_z$ , по формуле (3.8) можно вычислить  $E_z$ .

В дальнейшем понадобятся комбинации

$$\begin{aligned} u_{00} &= \frac{R}{M^2} (P_x - a_1 P_z) = \frac{1}{r} \{u_0 (1 + 2q\rho) (1 - a_1 l) + \\ &\quad + w_0 [2\rho (a_1 q - a_1^2 q l - a_1) - l - a_1] - q\rho Q (1 - a_1 l)\} \\ w_{00} &= \frac{R}{M^2} (P_z + a_1 P_x) = \frac{1}{r} \left\{ u_0 (1 + 2q\rho) \frac{a_2}{k} + \right. \\ &\quad \left. + w_0 \left[ 2\rho \left( \frac{a_1 a_2 q}{k} + 1 \right) - a_1 l + 1 \right] - q\rho \frac{a_2}{k} Q \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для больших чисел Гартмана ( $M^2 \gg 1$ ) формулы (3.3), дающие распределение скорости по сечению канала, сильно упрощаются

$$\begin{aligned} v_x &= [-u_0 \cos \beta (1 - |y|) + w_0 \sin \beta (1 - |y_1|)] e^{-\alpha (1-|y|)} + u_0 \\ v_z &= [-u_0 \sin \beta (1 - |y_1|) - w_0 \cos \beta (1 - |y_1|)] e^{-\alpha (1-|y|)} + w_0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Так как при  $M^2 \gg 1$   $\alpha$  велико,  $v_x$  и  $v_z$  по сечению канала почти не меняются и равны  $u_0$  и  $w_0$  соответственно. Изменение  $v_x$  и  $v_z$  до нуля на стенке происходит в узком пограничном слое около стенок. Точно так же слабо меняются по сечению канала, за исключением слоев вблизи стенок  $j_x, j_z$ .

При  $M^2 \gg 1$  выражение для плотности тока  $j = (j_x^2 + j_z^2)^{1/2}$  принимает совсем простой вид

$$j^2 = q(u_{00}^2 + w_{00}^2) \quad (3.15)$$

Эта формула справедлива по всему сечению канала, за исключением областей вблизи стенок.

§ 4. Распределение температур по сечению канала. Распределение электронной и ионной температуры по сечению канала можно найти из уравнений (2.12), (2.13). Для решения удобно сложить оба уравнения

$$\frac{d^2}{dy^2} (\kappa_e T_e + \kappa_i T_i) + \frac{M^2}{R} j^2 + \frac{1}{R} \left[ \left( \frac{dv_x}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dv_z}{dy} \right)^2 \right] = 0$$

Подставляя в это уравнение  $j$  и  $v$  из (3.4) и (3.3) и интегрируя, получим

$$-R(\kappa_e T_e + \kappa_i T_i) = B = F(y) + c_1 y + c_2 \quad (4.1)$$

Здесь

$$F(y) = F_1 \cos 2\beta y + F_1 \operatorname{ch} 2\alpha y + F_2 \cos \beta y \operatorname{ch} \alpha y + F_3 \sin \beta y \operatorname{sh} \alpha y + F_4 y^2$$

$$F_1 = A_1^2 + A_2^2 = \frac{1}{4} \frac{u_0^2 + w_0^2}{\cos^2 \beta + \operatorname{sh}^2 \alpha}, \quad F_2 = 4q(A_1 \zeta_1 + A_2 \zeta_2)$$

$$F_3 = 4q(-A_1 \zeta_2 + A_2 \zeta_1), \quad F_4 = 1/2 a(u_{00}^2 + w_{00}^2)$$

$$\zeta_1 = u_{00} + a_1 w_{00}, \quad \zeta_2 = w_{00} - a_1 u_{00}$$

Подставляя  $T_i$  из уравнения (4.1) в уравнение (2.12), получим уравнение для определения  $T_e$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_e}{dy^2} - \psi^2 T_e + G_1 \cos 2\beta y + G_1 \operatorname{ch} 2\alpha y + G_2 \cos \beta y \operatorname{ch} \alpha y + \\ + G_3 \sin \beta y \operatorname{sh} \alpha y + G_4 y^2 + G_5 - \frac{\varphi^2}{R} c_2 - \frac{\varphi^2}{R} c_1 y = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_1 = \frac{1}{R} (A_1^2 + A_2^2) \left( \frac{2a}{\kappa_e} - \varphi^2 \right), \quad \psi^2 = \gamma \left( \frac{1}{\kappa_i} + \frac{1}{\kappa_e} \right), \quad \varphi^2 = \frac{\gamma}{\kappa_e \kappa_i} \\ G_2 = \frac{4a}{R} (A_1 \zeta_3 + A_2 \zeta_4), \quad G_3 = \frac{4a}{R} (-A_1 \zeta_4 + A_2 \zeta_3) \quad (4.3) \\ G_4 = -\frac{\varphi^2 a}{2R} (u_{00}^2 + w_{00}^2), \quad G_5 = \frac{1}{\kappa_e} \frac{a}{R} (u_{00}^2 + w_{00}^2) \\ \zeta_3 = u_{00} \left( \frac{1}{\kappa_e} - \frac{\varphi^2}{M^2} \right) - w_{00} a_1 \frac{\varphi^2}{M^2}, \quad \zeta_4 = u_{00} a_1 \frac{\varphi^2}{M^2} + w_{00} \left( \frac{1}{\kappa_e} - \frac{\varphi^2}{M^2} \right) \end{aligned}$$

Решение уравнения (4.2) имеет вид

$$T_e = A(y) + c_3 e^{\psi y} + c_4 e^{-\psi y}, \quad A(y) = G(y) - c_1 \frac{\varphi^2}{R \psi^2} y - c_2 \frac{\varphi^2}{R \psi^2} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} G(y) = \frac{G_1}{\psi^2 + 4\beta^2} \cos 2\beta y + \frac{G_1}{\psi^2 - 4\alpha^2} \operatorname{ch} 2\alpha y + G_6 \cos \beta y \operatorname{ch} \alpha y + \\ + G_7 \sin \beta y \operatorname{sh} \alpha y + G_4 \frac{1}{\psi^2} y^2 + \frac{2G_4}{\psi^4} + \frac{G_5}{\psi^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$G_6 = \frac{G_3(\psi^2 - a) - G_2 a_1 a}{(\psi^2 - a) + a_1^2 a^2}, \quad G_7 = \frac{G_3 a_1 a + G_2(\psi^2 - a)}{(\psi^2 - a)^2 + a_1^2 a^2}$$

Заметим, что

$$G(y) = G(-y)$$

Подставляя найденное значение  $T_e$  из (4.4) в уравнение (4.1), получим выражение для  $T_i$

$$\begin{aligned} T_i &= -\frac{\kappa_e}{\kappa_i} A(y) - \frac{1}{R\kappa_i} B - \frac{\kappa_e}{\kappa_i} (c_3 e^{\psi y} + c_4 e^{-\psi y}) = \\ &= -\frac{\kappa_e}{\kappa_i} G(y) - \frac{1}{R\kappa_i} F(y) + \frac{c_1}{R\kappa_i} (\kappa_e \frac{\Phi^2}{\psi^2} - 1) y + \\ &\quad + \frac{c_2}{R\kappa_i} (\kappa_e \frac{\Phi^2}{\psi^2} - 1) - \frac{\kappa_e}{\kappa_i} (c_3 e^{\psi y} + c_4 e^{-\psi y}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

В выражения для  $T_e$  и  $T_i$  входят четыре постоянные  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , значения которых нужно определить из граничных условий для  $T_e$  и  $T_i$  на стенке. Пусть на стенках канала заданы температуры ионов и электронов  $T_e|_{y=\pm 1} = T_e^\circ, T_i|_{y=\pm 1} = T_i^\circ$  и пусть для определенности  $T_e^\circ = T_i^\circ = T^\circ$ .

Определим из этих условий  $c_1, c_2, c_3, c_4$ .

Из симметрии задачи следует, что  $c_1 = 0$ . Из уравнения (4.1) находим  $c_2$

$$c_2 = -R(\kappa_e + \kappa_i) T^\circ - F(1) \quad (4.7)$$

Подставляя в уравнение (4.4) значения  $y = \pm 1$ , получим систему из двух уравнений для определения  $c_3, c_4$ , из которой находим

$$c_3 = c_4 = \frac{T^\circ - A(1)}{2 \operatorname{ch} \psi} \quad (4.8)$$

С учетом (4.8) выражения для электронной и ионной температур будут иметь вид

$$T_e = [T^\circ - A(1)] \frac{\operatorname{ch} \psi y}{\operatorname{ch} \psi} + A(y) \quad (4.9)$$

$$T_i = -\frac{\kappa_e}{\kappa_i} A(y) - \frac{1}{R\kappa_i} B(y) - \frac{\kappa_e}{\kappa_i} [T^\circ - A(1)] \frac{\operatorname{ch} \psi y}{\operatorname{ch} \psi} \quad (4.10)$$

В этих формулах  $c_2$  берется из формулы (4.7). Полученные формулы сильно упрощаются для случая  $M^2 \gg 1$ .

В самом деле, для величины  $\alpha$  ( $\alpha \gg 1$ )

$$\frac{\operatorname{ch} \alpha y}{\operatorname{ch} \alpha} \approx \frac{e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}}{e^\alpha} = e^{-\alpha(1-|y|)} \ll 1$$

когда  $\alpha(1-|y|) \ll 1$ . Таким образом, для больших  $\alpha$  ( $M^2 \gg 1$ ) величинами  $\operatorname{ch} \alpha y / \operatorname{ch} \alpha$  и  $\operatorname{sh} \alpha y / \operatorname{sh} \alpha$  можно пренебречь по всему сечению за исключением узких слоев вблизи стенок. В этом случае

$$T_e = \frac{G_4}{\psi^2} y^2 + L - c_2 \frac{\Phi^2}{\psi^2 R} \quad (4.11)$$

$$T_i = \frac{G_4}{\psi^2} y^2 - \frac{\kappa_e}{\kappa_i} L - c_2 \frac{\Phi^2}{\psi^2 R} \quad (4.12)$$

Здесь

$$L = \frac{a}{\psi^2 R} \left( \frac{1}{\kappa_e} - \frac{\Phi^2}{\psi^2} \right) (u_{00}^2 + w_{00}^2)$$

Интересно вычислить разность  $T_e - T_i$ . Воспользовавшись формулами (4.11) и (4.12), получим

$$T_e - T_i = L \left( 1 + \frac{\kappa_e}{\kappa_i} \right) = \frac{a}{\psi^2 R} \frac{1}{\kappa_e} (u_{00}^2 + w_{00}^2) = \frac{M^2}{R} j^2 \frac{\kappa_i}{\kappa_e} \frac{1}{\gamma} \quad (4.13)$$

— во всем сечении канала, за исключением узких слоев вблизи стенок.



Для определения разности температур в указанных слоях нужно воспользоваться формулами (4.9), (4.10).

Формула (4.13) для разницы температур существенно отличается (множителем  $\kappa_i/\kappa_e$ ) от формул, предлагаемых различными авторами [2,3], для оценки разницы температур электронов и ионов, связанной с джоулевым нагревом электронов. Разумеется, проведенное рассмотрение годится для сильно ионизированной плазмы и в той или иной степени связано с данной конкретной задачей, однако из структуры полученной формулы (4.13), а также из структуры общих уравнений сохранения энергии для электронов и ионов ясно, что при оценке разницы температур необходимо учитывать теплопроводность компонент.

§ 5. Численные расчеты. Рассмотрим конкретные примеры. Для более детального исследования распределения температур необходимо знать значения коэффициентов переноса, которые в данной задаче считаются постоянными, а также значения чисел Гартмана, Рейнольдса и т. д. Коэффициенты переноса вычислим, пользуясь формулами, приведенными в § 4 работы [1].

Пусть приложенное поле  $H = 10^4$  эс. Параметр, характеризующий анизотропию электронов

$$\omega_e \tau_e = \frac{6.16}{\lambda/10} \cdot 10^{11} \frac{T_e^{3/2}}{n}$$

где  $\lambda = 23.4 - 1.15 \lg n - 3.45 \lg T_e$  — кулоновский логарифм. Нетрудно видеть, что при температуре  $T_e = 1/3$  эв число частиц, при котором существенна анизотропия по электронам ( $\omega_e \tau_e \geq 1$ ), должно быть меньше или порядка  $2 \cdot 10^{15}$ . При температуре  $1$  эв  $n$  должно быть меньше или порядка  $10^{16}$ .

Вычислим значения коэффициентов переноса при следующих значениях параметров:

- (1)  $n = 10^{15}$ , (a)  $T_e = T_i = 1/3$  эв, (б)  $T_e = T_i = 1$  эв  
 (2)  $n = 10^{17}$ , (a)  $T_e = T_i = 1/3$  эв, (б)  $T_e = T_i = 1$  эв

В первом случае  $\omega_e \tau_e \geq 1$ ,  $\omega_i \tau_i \leq 0.1$ , во втором  $\omega_e \tau_e \leq 0.1$ ,  $\omega_i \tau_i \leq 0.001$ . Анизотропией коэффициентов переноса для ионов можно пренебречь в обоих случаях, для электронов только во втором случае. Среднюю скорость выберем равной  $0.5 \cdot 10^4$  см/сек,  $U = 10^4$  см/сек. При этом  $Q = 1$ ,  $u_0 \approx 0.5$ ,  $w_0 \approx 10^{-6}$ . Атомный вес смеси примем равным 20 ( $m_i = 3.34 \cdot 10^{-23}$ ), высоту канала равной 6 см,  $k = 3/2$ ,

	$T_e = T_i = 1/3$ эв		$T_e = T_i = 1$ эв	
	$n = 10^{15}$	$n = 10^{17}$	$n = 10^{15}$	$n = 10^{17}$
$M^2$	$2.6085 \cdot 10^6$	$3.5555 \cdot 10^6$	$0.6444 \cdot 10^6$	$1.1753 \cdot 10^6$
$R$	$2.415 \cdot 10^2$	$1.1820 \cdot 10^4$	$0.2115 \cdot 10^2$	$0.1324 \cdot 10^4$
$\eta$ пуаз	$2.0739 \cdot 10^{-6}$	$4.2386 \cdot 10^{-6}$	$23.6826 \cdot 10^{-6}$	$37.8301 \cdot 10^{-6}$
$\kappa_e^*$	0.9473	0.0194	10.8170	0.1728
$\kappa_i^*$	$0.8420 \cdot 10^{-2}$	$1.7210 \cdot 10^{-4}$	$9.6167 \cdot 10^{-2}$	$15.3613 \cdot 10^{-4}$
$\sigma$ 1/сек	$5.4097 \cdot 10^{12}$	$15.0704 \cdot 10^{12}$	$15.2603 \cdot 10^{12}$	$44.4616 \cdot 10^{12}$
$\gamma^*$	$16.3992 \cdot 10^2$	$8.0232 \cdot 10^4$	$4.3083 \cdot 10^2$	$2.6973 \cdot 10^4$
$\tau_e \omega_e$	2.6315	$5.3782 \cdot 10^{-2}$	10.0163	$16 \cdot 10^{-2}$
$a_1 H_0$	4.064	0.1263	10.755	0.37

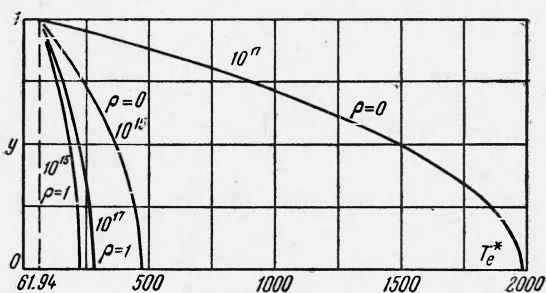
температуру стенок равной  $1500^\circ$  К, так что  $T^{*0} = 61.9461$ . Значения основных физических параметров для данной задачи приведены в таблице. Подчеркнем, что число частиц, при котором следует учитывать анизотропию электронов при температурах, меньших 1 эв, довольно мало. При этом вязкость среды мала, а  $M^2$  велико, отношение  $M^2/R$  также велико (см. табл.).

Анализ формулы (4.13) для разности  $T_e - T_i$  показывает, что во всем сечении канала, за исключением областей вблизи стенок (граница применимости формулы (4.13)), разность температур электронов и ионов ничтожно мала (доли градуса). Так как на стенке  $T_e = T_i$ , то следует ожидать, что и в узких областях вблизи стенок  $T_e \approx T_i$ .

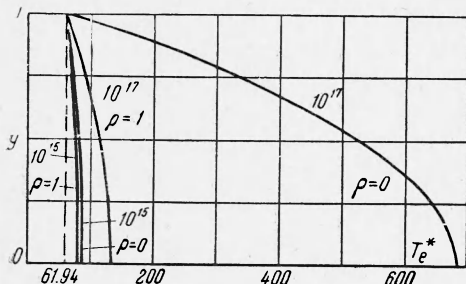
На фиг. 1, 2 приведены графики для распределения температур по сечению канала для коэффициентов переноса, вычисленных при  $T_e = T_i = 1/3$  эв (фиг. 1) и  $T_e = T_i = 1$  эв (фиг. 2).

Графики построены для  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$ . Из графиков видно, что с увеличением внешней нагрузки  $\rho$  профиль температур выравнивается,

приближаясь к температуре стенки, что связано с уменьшением плотности тока. При  $\rho = 100$  температура по всему сечению канала с точностью до долей градуса равна температуре стенок. С увеличением  $n$  температура в центре канала увеличивается.



Фиг. 1



Фиг. 2

при приближении к температуре стенки, что связано с уменьшением плотности тока.

При  $\rho = 100$  температура по всему сечению канала с точностью до долей градуса равна температуре стенок. С увеличением  $n$  температура в центре канала увеличивается.

Из графиков видно, что при значениях коэффициентов, подсчитанных по  $T_e = T_i = 1/3$  эв,  $n = 10^{17}$ , в центре канала при малых  $\rho$  (большие токи) получаются большие температуры — порядка нескольких десятков тысяч градусов. Этот факт связан с учетом зависимости коэффициентов переноса от температуры при вычислении распределения температур по сечению канала. Так для коэффициентов переноса, рассчитанных при  $T_e = T_i = 1$  эв, температура в центре канала значительно меньше — порядка пятнадцати тысяч градусов для  $n = 10^{17}$ , и трех тысяч градусов для  $n = 10^{15}$ . Для параметров, вычисленных при  $T_e = T_i = 2$  эв, температура в центре канала понижается до семи тысяч градусов для  $n = 10^{17}$ .

температура в центре канала значительно меньше — порядка пятнадцати тысяч градусов для  $n = 10^{17}$ , и трех тысяч градусов для  $n = 10^{15}$ . Для параметров, вычисленных при  $T_e = T_i = 2$  эв, температура в центре канала понижается до семи тысяч градусов для  $n = 10^{17}$ .

Поступила 9 1 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Сб. Вопросы теории плазмы, вып. 1, Госатомиздат, 1963.
2. Kerrebrock I. L. Conduction in Gases with Elevated Electron Temperature. Proc. 2d Symp. on the Eng. Asp. of M. G. D., University of Pennsylvania, March, 1961.
3. Robben F. Nonequilibrium Ionization in a Magnetohydrodynamic Generator. Phys. fluids, 1962, vol. 5, № 10.