ПМТФ, № 3, 1971

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ

В. Р. Смилянский

(Новосибирск)

Получены коэффициенты отражения и прохождения, а также коэффициент трансформации электромагнитной волны в плазменную. Рассмотрен вопрос о выборе «физического» пути аналитического продолжения решений в случае волнового уравнения с двумя полюсами.

1. К постановке задачи. Пусть плоская волна распространяется вдоль оси z, плазма неоднородна также вдоль оси z, внешнее магнитное поле направлено по оси y. В этом случае электрическое поле волны

$$E_x(z,\ t) = E_x(z)e^{i\omega t}$$

описывается уравнением [1]

$$\frac{d^2E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{v(1-is-v)}{(1-is)^2 - u - (1-is)v}\right]E_x = 0, \quad i = \sqrt{-1} \qquad (1.1)$$

$$v = g(1 - z^2/z_m^2), \quad g = \omega_k^2/\omega^2, \quad u = \omega_H^2/\omega^2, \quad s = \nu_{\text{eff}}/\omega$$

Здесь ω — циклическая частота, ω_H — гирочастота для электронов, ω_k — плазменная частота в максимуме слоя, ν_{eff} — эффективное число столкновений, z_m — полутолщина слоя, c — скорость света. Ниже будем полагать, что u и s не зависят от z.

Распространение обыкновенной и необыкновенной волн в параболическом слое в приближении геометрической оптики рассматривалось в [2]. Однако в [2] не учитывалось влияние областей, где геометрическая оптика нарушается. Основное же содержание дальнейшего составляет как раз учет влияния полюсов в коэффициенте при E_x на распространение волны. Случай линейного слоя рассмотрен в [3, 4].

2. Асимптотические решения. Введем в уравнения (1.1) новую независимую переменную $\tau = z / z_m$. Тогда оно запишется в виде

$$(\tau^2 - \tau_1^2)\frac{d^2E_x}{d\tau^2} + [p(\tau^2-1)^2 + q(2\tau^2 - \tau_1^2 - 1)]E_x = 0 \qquad (2.1)$$

$$\tau_1^2 = 1 + \frac{u-(1-is)^2}{g(1-is)}, \quad q = \left(\frac{z_m\omega}{c}\right)^2, \quad p = \frac{qg}{1-is}$$

Две регулярные особые точки уравнения ($\tau = \pm\tau_1$) сливаются в одну при $\tau_1 = 0$ ($s = 0$, $\omega^2 = \omega_H^2 + \omega_k^2$). При $\tau_1^2 = 1$ ($s = 0$, $\omega^2 = \omega_H^2$) регулярные особые точки отсутствуют, что физически вполне понятно, так как в точках $\tau = \pm 1$ плотность плазмы равна нулю. Что же касается значения $\omega = \omega_H$, то это значение ω в уравнении (1.1) не выделено, что связано с приближением, в котором уравнение получено.

Как известно [5], существуют решения $E_x^{(1)}$, $E_x^{(2)}$ уравнения (2.1), которые при выполнении условий $|\tau| > |\tau_1|\, |\sqrt{p}\tau^2| \gg 1$ имеют следующие асимптотические представления:

$$E_x^{(1)} \sim (\sqrt{p}\tau^2)^{0.5 r_1} e^{i0.5\sqrt{p}\tau^2}[1 + O(1/\sqrt{p}\tau^2)]$$

$$E_x^{(2)} \sim (\sqrt{p}\tau^2)^{0.5 r_2} e^{-i0.5\sqrt{p}\tau^2}[1 + O(1/\sqrt{p}\tau^2)]$$

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2} \mp \frac{p\tau_1^2 + 2q - 2p}{\sqrt{-4p}}$$

Условие $|\tau| > |\tau_1|$ приводит к условию $|\tau_1| < 1$, что ограничивает область рассматриваемых частот. В частности, при $s = 0$ допустимая область частот

$$\omega_H^2 \leqslant \omega^2 < \omega_H^2 + 2\omega_k^2$$

Если падающая волна распространяется со стороны $\tau < 0$, то $E_x^{(2)}$ при $\tau > 0$ описывает прошедшую волну. Соответственно, при $\tau < 0$ наоборот $E_x^{(2)}$— отраженная волна, $E_x^{(1)}$ — падающая.

Для определения амплитудных коэффициентов отражения R и прохождения D нужно знать связь между асимптотическими решениями $E_x^{(2)}$ при $\tau > 0$, и $E_x^{(1)}$, $E_x^{(2)}$ для $\tau < 0$ ($|\tau| > |\tau_1|$). Эта связь для некоторого уравнения, частным случаем которого является (2.1), установлена в [6]. Пользуясь результатами [6], можно записать

$$\begin{gathered} D = {}^1/_2\pi^{-1} e^{i\pi(\eta-1)}\Gamma({}^1/_2 + \mu' - \eta)\,\Gamma({}^1/_2 - \mu' - \eta) \\ R = e^{i1.5\pi}(q_\pm 2\cos 2\pi\mu' + e^{-i2\pi\eta})\,D \\ \eta = {}^1/_4(r_2 - r_1), \quad q_+ = 1, \quad q_- = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь Γ — гамма-функция, q_+ соответствует обходу особых точек $\tau = \pm\tau_1$ (при переходе с $\tau > 0$ на $\tau < 0$) по верхней полуплоскости комплексной τ-плоскости, q_- — обходу по нижней; μ' определяется характером особых точек $\tau = \pm\tau_1$.

3. Определение μ'. Решения y_1, y_2 уравнения (2.1) в окрестности особых точек $\tau = \pm\tau_1$ имеют вид [5]

$$y_1 = (\tau \mp \tau_1) \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(\pm\tau_1)(\tau \mp \tau_1)^\nu$$

$$y_2 = \mp b y_1 \ln(\tau \mp \tau_1) + \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu(\pm\tau_1)(\tau \mp \tau_1)^\nu \tag{3.1}$$

$$C_0 = 1, \quad d_0 = -1, \quad b = -(\tau_1^2 - 1)[p(\tau_1^2 - 1) + q]/2\tau_1$$

$$C_{\nu-1}(\tau_1) = -\frac{1}{2\nu(\nu-1)\tau_1} \sum_{k=k_0}^{\nu-2} C_k g_k(\nu), \quad k_0 = \begin{cases} 0 & (\nu \leqslant 6) \\ \nu - 6 & (\nu > 6) \end{cases} \quad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

$$g_{\nu-2}(\nu) = (\nu-1)(\nu-2) + (\tau_1^2 - 1)[p(\tau_1^2 - 1) + q], \quad g_{\nu-5} = 4p\tau_1$$

$$g_{\nu-3}(\nu) = 4\tau_1[p(\tau_1^2 - 1) + q],$$

$$g_{\nu-4}(\nu) = 2[p(3\tau_1^2 - 1) + q], \qquad g_{\nu-6}(\nu) = p$$

Здесь b определено методом Фробеннуса [5]. Как легко показать из рекуррентных соотношений, коэффициент C_ν является четной функцией τ_1, если ν четно, и нечетной, если ν нечетно. Как ясно из (3.1), поле E_x в самой точке полюса ($\tau_1 \neq 0$) конечно. Пользуясь методикой [6], имеем

$$\mu' = \frac{1}{8\pi i}\ln\delta + \frac{l}{4}, \qquad \delta = \frac{2-\beta+\sqrt{\beta(\beta-4)}}{2-\beta-\sqrt{\beta(\beta-4)}} \tag{3.2}$$

$$\beta = \left\{4\pi b\left[y_1\frac{dy_1}{d\tau}\right]_{|\tau=0}\right\}^2$$

Здесь l — целое число, подлежащее определению. Если уравнение имеет только одну регулярную особую точку (или вообще не имеет), то $\mu' = {}^1/_4(\rho_1 - \rho_2)$ согласно [6], где $\rho_{1,2}$ — решения определяющего уравнения для рассматриваемой точки. Для уравнения (2.1) в точках $\tau_1{}^2 = 0$, $\tau^2 = 1$ указанным способом

$$\mu'_{(\tau_1{}^2=0)} = {}^1/_4\sqrt{1+4z_m{}^2\omega_H{}^2c^{-2}}, \qquad \mu'_{(\tau_1{}^2=1)} = {}^1/_4 \tag{3.3}$$

Целое число l нужно подобрать так, чтобы μ' из (3.2) совпадало с μ' из (3.3) при $\tau_1{}^2 = 0$; 1. Для определения l выбираем $\tau_1{}^2 = 1$, так как при таком значении параметра $\tau_1{}^2$ решения уравнения (2.1) однозначны и аналитичны во всей области $|z| < \infty$ (см. п. 5). Непосредственно убеждаемся, что μ' из (3.2) при $\tau_1{}^2 = 1$ и μ' из (3.3) при $\tau_1{}^2 = 1$ совпадают, если $l = 1$. Таким образом, в (2.3) следует принять $l = 1$.

Если $s = 0$, то τ_1 либо действительно, либо чисто мнимое ($\mathrm{Re}\,\tau_1 = 0$). Поэтому из указанных выше свойств симметрии относительно $C_\nu(\tau_1)$, а также из (3.1), (3.2) следует, что при $s = 0$ $\beta \geqslant 0$.

Пусть $s = 0$ и $0 \leqslant \beta \leqslant 4$. Тогда (см. (3.2))

$$|\delta| = 1, \quad 0 \leqslant \arg\,\delta \leqslant 2\pi, \quad {}^1/_4 \leqslant \mu' \leqslant {}^1/_2$$

т. е. при указанном изменении β переменная под знаком логарифма совершает обход точки разветвления логарифма и данная ветвь переходит в другую. Поэтому при $\beta > 4$ нужно брать $\ln\delta + i2\pi$.

Пусть $s = 0$, $\beta \geqslant 4$. В этом случае

$$\arg\,\delta = 0, \quad \mu' = {}^1/_2 + i\,\psi \quad (\psi > 0)$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями для C_ν, можно показать, что независимо от того, с какой стороны $\tau_1 \to 0$

$$\lim_{\tau_1\to 0}\frac{y_1(\tau=0)}{\tau_1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \qquad \lim_{\tau_1\to 0}\frac{dy_1(\tau=0)}{d\tau} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,a_k$$

$$a_k = (-1)^k\,[2^k k!\,(k+1)!]^{-1}\prod_{\nu=2}^{k+1}\left[(\nu-1)(\nu-2) - \left(\frac{z_m\omega_H}{c}\right)^2\right]$$

и, следовательно, для μ' из (3.2) существует

$$\lim_{\tau_1\to -0}\mu' = \lim_{\tau_1\to +0}\mu'$$

Вместе с тем

$$ {}^1/_4 \leqslant \mathrm{Re}\,\mu' \leqslant {}^1/_2 \quad \text{при } s = 0 \qquad (l = 1)$$

С другой стороны, для достаточно толстого слоя выражение из (3.3) дает

$$\mu'_{(\tau_1{}^2=0)} \approx 0.5 z_m\omega_H / c \gg 1$$

Отсюда следует, что функция $\mu'(\tau_1^2)$ имеет устранимый разрыв в точке $\tau_1^2 = 0$ ($s = 0$, $\omega^2 = \omega_H^2 + \omega_k^2$). Это объясняется, по-видимому, тем, что исходное уравнение (1.1) получено без учета пространственной дисперсии. Разумеется, нет оснований ожидать фактического скачка $R(\mu')$, $D(\mu')$ в точке $\tau_1^2 = 0$.

4. Получение R, D и коэффициента трансформации. Пусть $s = 0$. В этом случае

$$\eta = i\varkappa \qquad (\varkappa = 0.25 z_m (c\omega_k)^{-1} (\omega_k^2 - \omega_H^2 - \omega^2))$$

Пусть дополнительно $0 \leqslant \beta \leqslant 4$. Тогда μ' — действительно. Для этого случая из (2.2), согласно формуле 8.344.2 в [7], имеем

$$|D|^2 = \frac{e^{-2\pi\varkappa}}{2\cos 2\pi\mu' + e^{2\pi\varkappa} + e^{-2\pi\varkappa}} \tag{4.1}$$

$$|R|^2 = (q_{\pm} 2\cos 2\pi\mu' + e^{2\pi\varkappa})^2 |D|^2$$

Простая проверка полученных формул показывает, что для $^1/_4 \leqslant \mu' \leqslant {}^1/_2$ имеем $|R|^2 + |D|^2 \geqslant 1$ при обходе по нижней полуплоскости и $|R|^2 + |D|^2 \leqslant 1$ при обходе по верхней, причем в обоих случаях $|R|^2 + |D|^2 = 1$ только для $\mu' = {}^1/_4$. Отсюда следует, что физически правильный результат дает обход по верхней полуплоскости[1]. Поэтому правильные выражения для R и D в общем случае

$$D = {}^1/_2 \pi^{-1} e^{i\pi(\eta-1)} \Gamma({}^1/_2 + \mu' - \eta)\, \Gamma({}^1/_2 - \mu' - \eta)$$

$$R = e^{i1.5\pi} (2\cos 2\pi\mu' + e^{-i2\pi\eta})\, D \tag{4.2}$$

Рассмотрим также случай $s = 0$, $\beta \geqslant 4$. В этом случае на основании формул 8.331 и 8.332.1 в [7]

$$|D|^2 = \frac{1}{2} \frac{(\psi - \varkappa)}{(\psi + \varkappa)} \frac{e^{-2\pi\varkappa}}{[\operatorname{ch} 2\pi\psi - \operatorname{ch} 2\pi\varkappa]}$$

$$|R|^2 = (e^{2\pi\varkappa} - 2\operatorname{ch} 2\pi\psi)^2 |D|^2$$

Если $s = 0$, $\eta = 0$, то выражения (4.2) существенно упрощаются, а именно

$$D = -\frac{1}{2\cos\pi\mu'}, \qquad R = -i(2\cos 2\pi\mu' + 1)\, D$$

Если в (4.1) формально положить $\cos 2\pi\mu' = 0$ ($\mu' = {}^1/_4$), то зависимость полученных формальных выражений для $|R|^2$, $|D|^2$ от частоты ω такая же, как и в случае нормального падения электромагнитной волны на параболический слой изотропной плазмы (см. [1], § 17). Поэтому общий характер этой зависимости для $|R|^2$ и $|D|^2$ существенно не меняется и при малых $|\cos 2\pi\mu'|$, т. е. при малых $(\mu' - {}^1/_4 > 0)$.

Существенное же отличие от случая нормального падения на параболический слой изотропной плазмы здесь проявляется в том, что отличен от нуля коэффициент трансформации электромагнитной волны в плазменную $|F|^2 = 1 - |R|^2 - |D|^2$ (см. ниже).

Как видно из (3.2), величина β, а значит и μ', будет, вообще говоря, сложной функцией ω^2, ω_k^2, ω_H^2, z_m^2, c^2. Однако при определенных условиях выражение для β можно существенно упростить. Воспользуемся раз-

---

[1] Интересно, что в [6] физически правильный результат получился при обходе по нижней полуплоскости.

ложением

$$(y_1 dy_1 / d\tau)^2 = (\tau \mp \tau_1)^2 [1 + 6C_1(\pm \tau_1)(\tau \mp \tau_1) + \ldots] \tag{4.3}$$

Пусть $s = 0$, $\tau = 0$. Тогда вторым членом ряда в (4.3) можно пренебречь по сравнению с первым, если

$$\omega^2 \leqslant \omega_H{}^2 + \omega_k{}^2 \frac{2}{3} \left(\frac{c}{\omega_H z_m} \right)^2$$

В этом случае

$$\beta \approx 4\pi^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_H{}^2}{\omega_k{}^2} \right)^2 \left(\frac{z_m \omega_H}{c} \right)^4 \tag{4.4}$$

Если, например, $\omega_H{}^2 \ll \omega_k{}^2$ и $^2/_3\,(c / \omega_H z_m)^2 \gtrsim 10$, то выражение (4.4) можно использовать во всем интервале допустимых частот $\omega_H{}^2 \leqslant \omega^2 < \omega_{H^2} + 2\omega_k{}^2$ (см. п. 2).

Из (4.2) следует, что сдвиг фаз φ между отраженной и падающей волнами в начале слоя ($\tau = -1$)

$$\varphi = -\operatorname{Im}(\eta \ln p) + \operatorname{Re}\sqrt{p} - \arg R \tag{4.5}$$

Из (4.5), согласно формуле 8.362.1 из [7], имеем

$$\Delta t_{\text{гр}} = \frac{d\varphi}{d\omega} = -\frac{d}{d\omega}[\operatorname{Im}(\eta \ln p) + \arg(2\cos 2\pi\mu' + e^{-i2\pi\eta}) + \pi \operatorname{Re}\eta] -$$

$$- 2\operatorname{Im}\left\{\mu' \frac{d\mu'}{d\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\chi_k} + \left[0.577215 + \frac{\sigma}{\chi_0} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_0 + k\sigma}{k\chi_k}\right] \frac{d\eta}{d\omega}\right\}$$

$$\sigma = {}^1/_2 - \eta, \qquad \chi_k = (\sigma + k)^2 - \mu'^2$$

Величина $|F|^2 = 1 - |R|^2 |D|^2$ при $s = 0$ характеризует относительную долю энергии, которая поглощается в районе полюса. В районе полюса ($1 - v - u = 0$, $s = 0$) происходит трансформация электромагнитной волны в плазменную (см. [1,8]), поэтому для волн малой амплитуды утечку энергии в районе полюса при $s = 0$ можно объяснить трансформацией.

С другой стороны, сам полюс возникает, если пренебречь пространственной дисперсией, и, следовательно, отражает в предельном случае влияние отброшенных членов. Поэтому $|F|^2$ при $s = 0$ можно рассматривать как коэффициент трансформации электромагнитной волны в плазменную при малых значениях параметра $\beta_T{}^2$, характеризующего пространственную дисперсию. Другими словами

$$|F|^2_{s=0} = \lim L \quad \text{при } \beta_T{}^2 \to 0$$

где L — коэффициент трансформации, т. е. $|F|^2_{s=0}$ — первый член разложения $L(\beta_T{}^2)$ в ряд по $\beta_T{}^2$. В отличие от [8] (где к тому же взят другой закон изменения электронной плотности) здесь коэффициент трансформации удается определить из уравнения второго порядка.

Приведенная выше трактовка величины $|F|^2$ в различных аспектах рассмотрена в [9–11].

Если $s = 0$, $0 \leqslant \beta \leqslant 4$, то

$$|F|^2 = \frac{|\cos 2\pi\mu'| - 2e^{-2\pi\varkappa}\cos^2 2\pi\mu'}{\operatorname{ch} 2\pi\varkappa - |\cos 2\pi\mu'|} \tag{4.6}$$

(Здесь $\cos 2\pi\mu' < 0$). Зависимость $|F|^2$ от $\omega^2 / \omega_k{}^2$, даваемая (4.6) для $(c / z_m\omega_H)^2 = 20$, $\omega_k{}^2 = 5\omega_H{}^2$, изображена на фигуре.

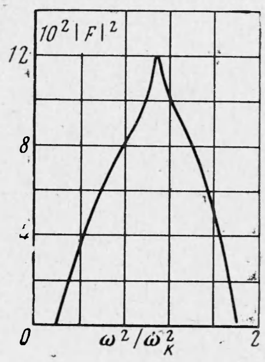
В данной работе выбор пути аналитического продолжения решений осуществлен из условия диссипации энергии ($|R|^2 + |D|^2 \leqslant 1$). Такой подход в случае одного простого полюса уже использовался ранее, например в [9,10]. Однако случай двух полюсов имеет некоторые специфические особенности. Поэтому представляется целесообразным обсудить его более детально (см. п. 5).

5. О выборе «физического» пути аналитического продолжения решений. Уравнение (2.1) является частным случаем рассмотренного в [6] уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{Q_1 z}{z^2 - z_1^2} + a_1 z\right)\frac{dy}{dz} + \left[\frac{Q_2 z^2}{(z^2 - z_1^2)^2} + \frac{Q_3}{z^2 - z_1^2} + a + bz^2\right] y = 0 \qquad (5.1)$$

где Q_1, Q_2, Q_3, a, a_1, b — произвольные постоянные.

Решения уравнения (5.1) рассматриваются в данной работе и в [6] в основном в области $|z_1| < |z| < |z_m| < \infty$. В принципе, в z-плоскости возможны более чем два пути аналитического продолжения этих решений с положительной полуоси на отрицательную (например, еще и между полюсами $z = \pm z_1$). Поэтому рассмотрим вопрос о том, какие вообще пути аналитического продолжения могут привести к физически правильному результату. Рассмотрение будем проводить параллельно для данной работы и для [6]. В дальнейшем к номерам формул из [6] будем добавлять букву А, например (А.1.2).



Как известно [1], учет пространственной дисперсии приводит вместо уравнений (1.1), (А.1.2) к системам четвертого порядка, коэффициенты которых (а значит и решения) аналитичны и однозначны в окрестности нулей $\delta = [(1 - is)^2 - u - (1 - is)v], \varepsilon'$. Уравнения (1.1), (А.1.2) получаются из эквивалентных системам (в рассматриваемой области) уравнений четвертого порядка, если положить равным нулю малый параметр β_T^2 при старших производных, т. е. являются в определенном смысле вырожденными.

Влияние отброшенных членов особенно велико в области, где мал коэффициент при второй производной, т. е. вблизи нулей δ, ε'. Поэтому, вообще говоря, решения вырожденных уравнений на действительной оси в окрестности нулей δ, ε' (если нули расположены на или вблизи действительной оси) могут не отвечать реальной физической картине, т. е. не быть физическими. На это указывает неоднозначность решений и расходимость их в нулях. В этом случае физические решения в окрестности нулей δ, ε' можно получить только при помощи невырожденной системы четвертого порядка.

Надежное исключение составляет случай, когда решения вырожденного уравнения однозначны и аналитичны в окрестности нулей δ, ε', несмотря на наличие полюса. (Отметим, что решения (А.2.1) ($z_1 = 0$) однозначны и аналитичны, т. е. являются физическими, во всей области $|z| < \infty$, в том числе и в нуле $\varepsilon'(z = 0)$. Это следует из (А.2.2).) В частности $\lim G^{(1,2)} = \text{const}$ при $z \to 0$. Влияние отброшенных членов здесь мало даже в окрестности нуля ε'. На это также указывает отсутствие трансформации ($|R|^2 + |D|^2 = 1$, см. п. 2)).

Следовательно, правильный путь аналитического продолжения решений уравнений (1.1), (А.1.2) (взятых вдали от нулей δ, ε') с положительной полуоси z на отрицательную в этом случае не обязательно должен совпадать с действительной осью (или совмещаться с ней путем непрерывной деформации) в окрестности нулей δ, ε'. Более того, естественно ожидать, что в рассматриваемом случае обход нулей по пути, расположенному достаточно далеко от них в комплексной плоскости (т. е. там, где влияние отброшенных членов мало), как раз и даст физически правильный результат. (Хотелось бы указать на похожий прием в квазиклассическом методе [12].)

Именно такие пути использованы в данной работе и в [6]. В этих случаях путь между полюсами $z = \pm z_1$ (т. е. между нулями δ, ε') не будет физическим, так как при определенных значениях параметров в (2.1) и (А.3.1) два полюса (нуля δ, ε') близки и даже сливаются в один.

Заметим также, что при определении целого числа l, входящего в μ', в уравнениях (2.1), (А.3.1) были выбраны такие параметры, при которых решения этих уравнений однозначны и аналитичны во всей области $|z| < \infty$. После всего сказанного выше это уже не нуждается в пояснениях.

Поступила 10 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1967.
2. Scott I. C. N. The Poynting vector in the ionosphere. Proc. IRE, 1950, vol. 38, No. 9.
3. Денисов Н. Г. Влияние постоянного магнитного поля на резонансный эффект, наблюдающийся при отражении электромагнитной волны от неоднородной плазмы. Радиотехника и электроника, 1956, т. 1, вып. 6.
4. Денисов Н. Г. О поглощении радиоволн в резонансных областях неоднородной плазмы. Радиотехника и электроника, 1959, т. 4, вып. 3.
5. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, Гостехиздат Украины, 1939.
6. Смилянский В. Р. Наклонное падение электромагнитной волны на параболический плазменный слой. ПМТФ, 1969, № 3.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
8. Stix T. H. Radiation and absorption via mode conversion in on inhomogeneous collision-free plasma. Phys. Rev. Letter, 1965, vol. 15, No. 23.
9. Пилия А. Д. О трансформации волн в слабо неоднородной плазме. Ж. техн. физ., 1966, т. 36. вып. 11.
10. Пилия А. Д., Федоров В. И. Линейная трансформация волн в неоднородной магнитоактивной плазме. ЖЭТФ, 1969, т. 57, вып. 4.
11. Ерохин Н. С. К вопросу об аномальной трансформации волн в неоднородной плазме. Укр. физ. ж., 1969, т. 14, вып. 12.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М., Физматгиз, 1963.