Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 3

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ БЕЗЫМПУЛЬСНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА В ПИКНОКЛИНЕ

УДК 532.517.4

О. Ф. Воропаева, Г. Г.Черных

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

1. Введение. Турбулентные следы за телами вращения в стратифицированной жидкости рассматривались в ряде работ [1–21]. В [1] выполнен экспериментальный анализ динамики турбулентного следа за самодвижущимся телом в линейно стратифицированной среде, продемонстрированы коллапс и генерация следом внутренних волн. Явление коллапса безымпульсного следа в линейно стратифицированной среде экспериментально изучалось в [2]. Детальное исследование характеристик турбулентности в следах за телами, движущимися в линейно стратифицированной среде, осуществлено в лабораторных опытах [3] (см. также [4]). Экспериментальный анализ картины внутренних волн, генерируемых при движении тел в стратифицированных жидкостях, выполнен в [5]. Там же представлены теоретические оценки внутренних волн, включая волны, индуцируемые коллапсом турбулентного следа в пикноклине.

Серия работ [6–13] посвящена течению, возникающему при движении буксируемой сферы в линейно стратифицированной жидкости. Изучались различные режимы течения в зависимости от чисел Рейнольдса и Фруда как в ближнем следе, так и в дальнем. В [10] экспериментально и теоретически исследованы внутренние волны, генерируемые при движении сферы в линейно стратифицированной жидкости. Рассмотрена волновая составляющая следа, связанная с когерентными структурами. Детальный анализ экспериментальных данных о вырождении турбулентных следов за буксируемыми и самодвижущимися телами в линейно стратифицированных жидкостях и теоретические оценки параметров внутренних волн выполнены в [12, 14].

Теоретически начальная стадия развития следа в линейно стратифицированной среде изучена в [15] с использованием разработанной алгебраической модели рейнольдсовых напряжений и потоков. Численное моделирование турбулентного следа и генерируемых при его коллапсе внутренних волн для небольших расстояний от самодвижущегося тела в линейно стратифицированной среде, основанное на модели локально-равновесного приближения, проведено в [16].

В [4] для численного анализа следов за самодвижущимся и несамодвижущимся телами в линейно стратифицированной среде применялась модифицированная модель локально-равновесного приближения с привлечением уравнений переноса энергии турбулентности и скорости ее диссипации. Получено удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными Линя и Пао по изменению характерных размеров следа, дефекта скорости и энергии турбулентности на оси следа в зависимости от расстояния от тела (для одного из значений плотностного числа Фруда). Однако, как справедливо отмечалось в [22], воздействие стратификации для самодвижущегося тела оказалось более сильным, чем наблюдалось в экспериментах.

Как пример применения неявного варианта метода расщепления по физическим процессам к расчету стратифицированных течений турбулентный след за самодвижущимся телом в линейно стратифицированной среде рассмотрен в [17]. Численному моделированию турбулентных следов за телами в стратифицированных жидкостях посвящены также работы [18–21], причем в [19] оценена роль начальной закрутки при эволюции безымпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде. В [20, 21] рассмотрен вариант безымпульсного следа в жидкости с нелинейным распределением плотности по глубине, а для линейной стратификации получено удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными [3] об анизотропном вырождении интенсивностей турбулентных флуктуаций поля скорости.

В работах [2, 23–26] турбулентные следы изучались с применением схематизированной плоской модели. Рассматривалась плоская нестационарная задача об эволюции области локализованных возмущений в линейно стратифицированной жидкости. Изучению динамики плоских локализованных областей турбулизованной жидкости в средах с нелинейной стратификацией посвящены работы [27–30].

Простая аналитическая квазиодномерная модель эволюции области турбулентных возмущений в следе за телом, движущимся в линейно стратифицированной среде, построена в [31].

Анализируя приведенную выше литературу, необходимо отметить следующее. Вырождение безымпульсных турбулентных следов в линейно стратифицированной жидкости изучено достаточно подробно. Имеются как экспериментальные результаты, так и согласующиеся с ними результаты расчетно-теоретического моделирования.

Значительно сложнее ситуация в случае нелинейной стратификации. Практически отсутствуют данные лабораторных экспериментов о вырождении собственно турбулентного следа. Представленные в [28, 29] результаты расчетов получены на основе схематизированной плоской модели. При этом остается открытым вопрос о роли дефекта горизонтальной компоненты скорости в направлении, совпадающем с направлением движения тела. Нет привязки к результатам лабораторных экспериментов [3] в однородной жидкости. Особую роль среди нелинейных распределений плотности невозмущенной жидкости по глубине занимает пикноклин. В этом случае может формироваться близкая к стационарной картина внутренних волн конечной амплитуды [5, 25]. В известных авторам публикациях отсутствуют результаты численного моделирования динамики безымпульсного турбулентного следа в пикноклине. В настоящей работе предпринята попытка численного исследования этого течения с применением модифицированной $(e-\varepsilon)$-модели турбулентности.

2. Постановка задачи. *Основные уравнения.* Для описания течения в дальнем турбулентном следе за осесимметричным телом вращения в стратифицированной среде привлекается следующая система осредненных уравнений движения, неразрывности и несжимаемости в приближении Обербека — Буссинеска:

$$U_\infty \frac{\partial U_D}{\partial x} + V \frac{\partial U_D}{\partial y} + W \frac{\partial U_D}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\langle u'v'\rangle + \frac{\partial}{\partial z}\langle u'w'\rangle; \tag{2.1}$$

$$U_\infty \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\langle v'^2\rangle - \frac{\partial}{\partial z}\langle v'w'\rangle; \tag{2.2}$$

$$U_\infty \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\langle v'w'\rangle - \frac{\partial}{\partial z}\langle w'^2\rangle - g\,\frac{\langle \rho_1\rangle}{\rho_0}; \tag{2.3}$$

$$U_\infty \frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial x} + V \frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial y} + W \frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial z} + W\frac{d\rho_s}{dz} = -\frac{\partial}{\partial y}\langle v'\rho'\rangle - \frac{\partial}{\partial z}\langle w'\rho'\rangle; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \tag{2.5}$$

Здесь $U_D = U_\infty - U$ — дефект осредненной продольной компоненты скорости; U, V, W — компоненты скорости осредненного движения в направлении осей x, y, z; p_1 — отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией $\rho_s(z)$; U_∞ — скорость набегающего невозмущенного потока; g — ускорение силы тяжести; $\langle\rho_1\rangle$ — осредненный дефект плотности: $\rho_1 = \rho - \rho_s$; $\rho_s = \rho_s(z)$ — плотность невозмущенной жидкости: $d\rho_s/dz \leqslant 0$ (устойчивая стратификация); $\rho_0 = \rho_s(0)$; штрихом обозначены пульсационные составляющие; $\langle\ \rangle$ — осреднение. Система координат связана с движущимся телом так, что скорость его движения равна $-U_\infty$, а ось z направлена вертикально вверх, против силы тяжести. Плотность жидкости считается линейной функцией температуры, стратификация предполагается слабой. В правых частях уравнений (2.1)–(2.4) опущены в предположении малости слагаемые, содержащие производную по переменной x, а также сомножители в виде коэффициента ламинарной вязкости или диффузии. Так же, как и в [4], в (2.5) в предположении малости отброшено слагаемое $\partial U/\partial x$. Делая последнее упрощение, авторы основывались на высказанных в [4] соображениях, суть которых заключается в том, что в однородной жидкости система уравнений (2.1)–(2.5) эквивалентна системе уравнений дальнего следа; при этом $V = W \approx 0$, а уравнения (2.2), (2.3), (2.5) не рассматриваются. В случае динамики следа в стратифицированной жидкости в плоскости (y, z) возникает конвективное течение, соответствующее генерируемым следом внутренним волнам. Вырождение компонент скорости V, W происходит значительно медленнее, чем вырождение $U_D = U_\infty - U$. Данное утверждение представляется весьма правдоподобным для рассматриваемых в настоящей работе безымпульсных следов. Кроме того, в работе [20] с участием авторов проведены численные эксперименты, в которых для одного из вариантов параметров задачи осуществлено численное моделирование вырождения безымпульсного турбулентного следа в стратифицированной среде с применением как полного трехмерного уравнения несжимаемости, так и его упрощенного варианта (2.5). Результаты расчетов оказались достаточно близкими. Исходя из вышеизложенного, авторы (как и авторы работ [4, 19]) использовали уравнение несжимаемости в виде (2.5). Применение (2.5) существенно упрощает численный алгоритм решения задачи. Система уравнений (2.1)–(2.5) отличается от принятой в [4] отсутствием в уравнении (2.1) величины $\partial\langle p_1\rangle/\partial x$.

Модель турбулентного движения. Система уравнений (2.1)–(2.5) не замкнута. Компоненты тензора рейнольдсовых напряжений $\langle u'_i u'_j\rangle$ (кроме $\langle v'w'\rangle = \langle u'_2 u'_3\rangle$), турбулентных потоков $\langle u'_i\rho'\rangle$ и дисперсии флуктуаций плотности $\langle\rho'^2\rangle$ в настоящей работе аппроксимированы алгебраическими соотношениями [32] (по повторяющимся индексам предполагается суммирование):

$$\frac{\langle u'_i u'_j\rangle}{e} = \frac{2}{3}\,\delta_{ij} + \frac{1-c_2}{c_1}\left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\,\frac{P}{\varepsilon}\right) + \frac{1-c_3}{c_1}\left(\frac{G_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\,\frac{G}{\varepsilon}\right); \qquad (2.6)$$

i, j, k могут принимать значения 1, 2, 3?

$$-\langle u'_i\rho'\rangle = \frac{e}{c_{1T}\varepsilon}\left[\langle u'_i u'_k\rangle\,\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_k} + (1-c_{2T})\Big(\langle u'_k\rho'\rangle\,\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{g_i}{\rho_0}\,\langle\rho'^2\rangle\Big)\right]; \qquad (2.7)$$

$$\langle\rho'^2\rangle = -\frac{2}{c_T}\,\frac{e}{\varepsilon}\,\langle u'_k\rho'\rangle\,\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_k}; \qquad (2.8)$$

$$P_{ij} = -\left\{\langle u'_i u'_k\rangle\,\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u'_j u'_k\rangle\,\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right\}, \quad G_{ij} = \frac{1}{\rho_0}\Big(\langle u'_i\rho'\rangle\,g_j + \langle u'_j\rho'\rangle\,g_i\Big), \qquad (2.9)$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$; $2P = P_{ii}$; $2G = G_{ii}$; $U_1 = U$; $U_2 = V$; $U_3 = W$.

По аналогии с [4] упростим выражения (2.6)–(2.9) с учетом физических особенностей рассматриваемого течения — спутного струйного турбулентного течения в поле силы тяжести на больших расстояниях от тела. При этом соотношения (2.9) заменяются приближенными:

$$P_{11} = 2\Big(\langle u'v'\rangle\,\frac{\partial U_D}{\partial y} + \langle u'w'\rangle\,\frac{\partial U_D}{\partial z}\Big), \quad P_{22} = P_{33} = 0, \quad P_{12} = \langle v'^2\rangle\,\frac{\partial U_D}{\partial y}, \quad P_{13} = \langle w'^2\rangle\,\frac{\partial U_D}{\partial z}.$$

Выражения (2.6)–(2.8) упрощаются следующим образом:

$$\langle u'v'\rangle = \frac{1-c_2}{c_1}\,\frac{e\langle v'^2\rangle}{\varepsilon}\,\frac{\partial U_D}{\partial y} = K_y\,\frac{\partial U_D}{\partial y}; \tag{2.10}$$

$$\langle u'w'\rangle = (1-c_2)e\langle w'^2\rangle\Big/\Big[c_1\varepsilon\Big(1-\frac{1-c_3}{c_1c_{1T}}\,\frac{g}{\rho_0}\,\frac{e^2}{\varepsilon^2}\,\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z}\Big)\Big]\,\frac{\partial U_D}{\partial z} = K_z\,\frac{\partial U_D}{\partial z}; \tag{2.11}$$

$$\langle\rho'^2\rangle = -\frac{2}{c_T}\,\frac{e}{\varepsilon}\,\langle w'\rho'\rangle\,\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z}; \tag{2.12}$$

$$-\langle v'\rho'\rangle = \frac{e\langle v'^2\rangle}{c_{1T}\varepsilon}\,\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial y} = K_{\rho y}\,\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial y}; \tag{2.13}$$

$$-\langle w'\rho'\rangle = \frac{e}{c_{1T}\varepsilon}\Big[\langle w'^2\rangle\,\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z} + (1-c_{2T})\,\frac{g}{\rho_0}\langle\rho'^2\rangle\Big] =$$

$$= e\langle w'^2\rangle\Big/\Big[c_{1T}\varepsilon\Big(1-2\,\frac{1-c_{2T}}{c_{1T}c_T}\,\frac{g}{\rho_0}\,\frac{e^2}{\varepsilon^2}\,\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z}\Big)\Big]\,\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z} = K_{\rho z}\,\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z}. \tag{2.14}$$

Значения энергии турбулентности e, скорости диссипации ε и касательного рейнольдсова напряжения $\langle v'w'\rangle$ определяются из дифференциальных уравнений переноса:

$$U_\infty\,\frac{\partial e}{\partial x} + V\,\frac{\partial e}{\partial y} + W\,\frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\,K_{ey}\,\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\,K_{ez}\,\frac{\partial e}{\partial z} + P + G - \varepsilon; \tag{2.15}$$

$$U_\infty\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + W\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\,K_{\varepsilon y}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\,K_{\varepsilon z}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + c_{\varepsilon 1}\,\frac{\varepsilon}{e}\,(P+G) - c_{\varepsilon 2}\,\frac{\varepsilon^2}{e}; \tag{2.16}$$

$$U_\infty\,\frac{\partial\langle v'w'\rangle}{\partial x} + V\,\frac{\partial\langle v'w'\rangle}{\partial y} + W\,\frac{\partial\langle v'w'\rangle}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\,K_{ey}\,\frac{\partial\langle v'w'\rangle}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\,K_{ez}\,\frac{\partial\langle v'w'\rangle}{\partial z} + (1-c_2)P_{23} +$$

$$+(1-c_3)G_{23} - c_1\,\frac{\varepsilon}{e}\langle v'w'\rangle \qquad \Big(P_{23} = -\Big\{\langle v'^2\rangle\,\frac{\partial W}{\partial y} + \langle w'^2\rangle\,\frac{\partial V}{\partial z}\Big\},\quad G_{23} = -\frac{g}{\rho_0}\langle v'\rho'\rangle\Big). \tag{2.17}$$

Коэффициенты турбулентной вязкости в уравнениях (2.15)–(2.17) имеют вид [32]

$$K_{ey} = c_s e\langle v'^2\rangle/\varepsilon,\quad K_{ez} = c_s e\langle w'^2\rangle/\varepsilon,\quad K_{\varepsilon y} = K_{ey}/\sigma,\quad K_{\varepsilon z} = K_{ez}/\sigma. \tag{2.18}$$

В результате выполненных построений математическая модель дальнего турбулентного следа представляет собой систему дифференциальных уравнений (2.1)–(2.5), (2.15)–(2.17) с учетом (2.10), (2.11), (2.13), (2.14), (2.18). Величина $\langle\rho'^2\rangle$ определяется из алгебраического соотношения (2.12); $c_1 = 2$, $c_2 = 0{,}6$, $c_3 = 0{,}6$, $c_{1T} = 3{,}2$, $c_{2T} = 0{,}5$, $c_T = 1{,}25$, $c_{\varepsilon 1} = 1{,}44$, $c_{\varepsilon 2} = 1{,}92$, $c_s = 0{,}22$, $\sigma = 1{,}3$ — эмпирические постоянные. Основное отличие данной математической модели от принятой в [4] заключается в использовании «изотропных» [32] соотношений (2.6) для определения компонент тензора рейнольдсовых напряжений вместо локально-равновесного приближения. Аппроксимация (2.6) в настоящей работе позволила получить лучшее соответствие расчетных результатов экспериментальным данным Линя и Пао [4] в линейно стратифицированной жидкости.

Начальные и граничные условия. Переменная x в уравнениях (2.1)–(2.4), (2.15)–(2.17) играет роль времени. При $x = x_0$ задавались следующие начальные условия:

$$U_D(x_0,y,z) = \theta_0(r),\quad e(x_0,y,z) = \theta_1(r),\quad \varepsilon(x_0,y,z) = \theta_2(r),\quad r^2 = y^2+z^2\quad (0 \leqslant r < \infty),$$

$$\langle\rho_1\rangle = V = W = \langle v'w'\rangle = 0\quad (-\infty < y < \infty,\quad -\infty < z < \infty,\quad x = x_0).$$

Здесь $\theta_0(r)$, $\theta_1(r)$, $\theta_2(r)$ — финитные колоколообразные функции, согласующиеся с экспериментальными данными в однородной жидкости.

При $r \to \infty$ ставились условия невозмущенного потока:

$$U_D = e = \varepsilon = \langle v'w' \rangle = \langle \rho_1 \rangle = V = W = 0. \tag{2.19}$$

В настоящей работе рассматривались такие распределения $\rho_s(z)$, что функция $\rho_s(z) - \rho_0$ была антисимметричной функцией z. В этом случае из соображений симметрии решение отыскивалось лишь в первом квадранте плоскости (y, z) с использованием граничных условий в виде

$$\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = V = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial U_D}{\partial y} = \langle v'w' \rangle = 0 \quad (y = 0, \quad z \geqslant 0),$$

$$\langle\rho_1\rangle = \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = W = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U_D}{\partial z} = \langle v'w' \rangle = 0 \quad (z = 0, \quad y \geqslant 0).$$

При численном решении задачи краевые условия (2.19), соответствующие $r \to \infty$, сносились на границы достаточно большого прямоугольника $z = z_*$ $(0 \leqslant y \leqslant y_*)$, $y = y_*$ $(0 \leqslant z \leqslant z_*)$.

Систему уравнений (2.2), (2.3), (2.5) удобно свести к следующей:

$$U_\infty \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} + W \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\Big[\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle\Big] - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\langle v'w' \rangle + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\langle v'w' \rangle; \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \omega. \tag{2.21}$$

Здесь функция тока ψ определяется равенствами $V = \partial\psi/\partial z$, $W = -\partial\psi/\partial y$.

Обезразмеривание. Переменные задачи могут быть обезразмерены с использованием масштаба длины D (диаметра тела) и масштаба скорости U_∞ (скорости невозмущенного потока). Введем безразмерные переменные:

$$x^* = x/D, \quad y^* = y/D, \quad z^* = z/D, \quad U_i^* = U_i/U_\infty, \quad \langle u_i'u_j' \rangle^* = \langle u_i'u_j' \rangle / U_\infty^2,$$

$$e^* = e/U_\infty^2, \quad \varepsilon^* = \varepsilon D/U_\infty^3, \quad \langle\rho_1\rangle^* = \langle\rho_1\rangle/(aD\rho_0), \quad \langle u_i'\rho' \rangle^* = \langle u_i'\rho' \rangle/(aD\rho_0 U_\infty),$$

$$\langle\rho'^2\rangle^* = \langle\rho'^2\rangle/(aD\rho_0)^2 \quad (a = -(1/\rho_0)d\rho_s/dz, \quad z = 0).$$

В результате в обезразмеренных уравнениях вместо g появится величина $4\pi^2/\mathrm{Fr}^2$, где Fr — плотностное число Фруда, определяемое равенством $\mathrm{Fr} = U_\infty T/D$ $(T = 2\pi/\sqrt{ag}$ — период Вяйсяля — Брента). Для интерпретации результатов расчетов удобно ввести время t, связанное с расстоянием от тела: $t = x/U_\infty$, $t^* = t/T = xD/(U_\infty DT) = x^*/\mathrm{Fr}$. В дальнейшем знак обезразмеривания ($*$ сверху) будет опущен всюду, кроме обозначений на рисунках.

3. Алгоритм решения задачи. Для построения конечно-разностного алгоритма введем новые независимые переменные:

$$x' = x, \quad \xi = y' = \chi_1(y), \quad \eta = z' = \chi_2(z) \quad (x = x', \quad y = \varphi_1(\xi), \quad z = \varphi_2(\eta)). \tag{3.1}$$

Якобиан преобразования, осуществляющего переход от переменных $(x,\ y,\ z)$ к переменным $(x',\ y',\ z')$, $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(x',\xi,\eta)} = \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\dfrac{\partial z}{\partial \eta}$. Функции φ_1, φ_2 задавались таблично; их выбор позволял осуществлять сгущение узлов сетки в области больших градиентов плотности и в окрестности турбулентного следа. В новой системе координат (x', ξ, η) узлы расчетной сетки на плоскости (ξ, η) распределялись равномерно: $\xi_i = i\Delta\xi$, $\eta_j = j\Delta\eta$ $(i = 0, \ldots, M_1;$

$j = 0, \ldots, M_2$), $\varphi_1(\xi_{M_1}) = y_*$, $\varphi_2(\eta_{M_2}) = z_*$. Шаг сетки Δx в направлении оси x выбирался переменным.

Алгоритм решения задачи сводился к последовательному интегрированию системы уравнений (2.20), (2.21), (2.1), (2.4), (2.15)–(2.17), записанных в новой системе координат, на каждом слое n по переменной x. В его основе лежит использование методов расщепления по пространственным переменным [33]. Для решения уравнения переноса завихренности (2.20) применялась простейшая схема расщепления с аппроксимацией конвективных слагаемых односторонними разностями против потока. Значения функции тока ψ вычислялись с использованием итерационной схемы стабилизирующей поправки.

Остальные уравнения математической модели интегрировались с применением схемы расщепления по пространственным переменным; конвективные слагаемые аппроксимировались центрально-разностными соотношениями. В связи с громоздкостью конечно-разностные аналоги этих уравнений здесь не приводятся. Уравнения интегрировались поочередно с применением скалярных прогонок. При вычислении какой-либо из функций ψ, U_D, $\langle\rho_1\rangle$, e, ε, $\langle v'w'\rangle$ на слое $(n+1)$ использовались уже известные на этом слое величины (функции), остальные брались с нижнего слоя n. Таким образом, привлекалась идея «блочного» аналога метода Зейделя (из соображений простоты реализации на ЭВМ).

Остановимся на аппроксимации краевых условий. Сложность представляют условия симметрии для дефекта осредненной продольной компоненты скорости U_D. Поскольку рассматривается безымпульсное турбулентное течение, следствием интегрирования уравнения (2.1) по полному поперечному сечению является закон сохранения

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} U_D\,dy\,dz = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} U_D(x_0,y,z)\,dy\,dz = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} JU_D(x_0,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = I_0 = 0. \tag{3.2}$$

Как уже указывалось выше, для численного интегрирования уравнения (2.1) применялась схема расщепления по пространственным переменным. Эквивалентная ей схема в целых шагах содержит слагаемые порядка $O(\Delta x)$, отсутствующие в неявной конечно-разностной схеме, которая является непосредственной аппроксимацией (2.1). Эти слагаемые, а также центрально-разностные аппроксимации конвективных членов в уравнении (2.1) оказываются несогласованными с аппроксимацией условий Неймана на осях симметрии в смысле выполнения аналога закона сохранения (3.2) в первом квадранте плоскости (ξ,η). Поскольку координатные оси можно считать границей области лишь условно, конечно-разностные уравнения как на целом, так и на дробном шаге решались вплоть до границы с привлечением условий симметрии (антисимметрии) вида (индекс n относится к переменной x')

$$(U_D)^{n+1/2}_{-1,j} = (U_D)^{n+1/2}_{1,j}, \quad e^n_{-1,j} = e^n_{1,j}, \quad \varepsilon^n_{-1,j} = \varepsilon^n_{1,j}, \quad \psi^{n+1}_{-1,j} = -\psi^{n+1}_{1,j} \quad (0 \leqslant j \leqslant M_2),$$

$$(U_D)^{n+1}_{i,-1} = (U_D)^{n+1}_{i,1}, \quad e^n_{i,-1} = e^n_{i,1}, \quad \varepsilon^n_{i,-1} = \varepsilon^n_{i,1}, \quad \psi^{n+1}_{i,-1} = -\psi^{n+1}_{i,1} \quad (0 \leqslant i \leqslant M_1).$$

Следствием такой аппроксимации граничных условий симметрии и применяемой схемы расщепления является закон сохранения, эквивалентный сеточной аппроксимации (3.2):

$$I_{01} = \Big[\sum_{j=1}^{M_2-1}\sum_{i=1}^{M_1-1} J_{i,j}(U_D)^{n+1}_{i,j} + 0{,}5\sum_{j=1}^{M_2-1} J_{0,j}(U_D)^{n+1}_{0,j} +$$

$$+ 0{,}5\sum_{i=1}^{M_1-1} J_{i,0}(U_D)^{n+1}_{i,0} + 0{,}25J_{0,0}(U_D)^{n+1}_{0,0}\Big]\Delta\xi\Delta\eta = 0. \tag{3.3}$$

В качестве граничных условий для e, ε, $\langle\rho_1\rangle$ на осях координат использовались как условия, подобные изложенным выше, так и простейшие аппроксимации условия Неймана:

$$e_{0,j}^{n+1/2} = e_{1,j}^{n+1/2}, \quad \varepsilon_{0,j}^{n+1/2} = \varepsilon_{1,j}^{n+1/2}, \quad \langle\rho_1\rangle_{0,j}^{n+1/2} = \langle\rho_1\rangle_{1,j}^{n+1/2},$$

$$e_{i,0}^{n+1} = e_{i,1}^{n+1}, \quad \varepsilon_{i,0}^{n+1} = \varepsilon_{i,1}^{n+1}, \quad \langle\rho_1\rangle_{i,0}^{n+1} = 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant M_1; \quad 0 \leqslant j \leqslant M_2).$$

Отклонение сеточных решений в норме, являющейся сеточным аналогом нормы пространства непрерывных функций, при этом не превышало 6 %.

Особое внимание уделено аппроксимации краевых условий для уравнения (2.1) в связи с тем, что недивергентность конечно-разностного алгоритма (невыполнение (3.3)) может приводить к значительному искажению решения даже в однородной жидкости [34].

4. Тестирование алгоритма. Сходимость алгоритма проверялась экспериментально, путем решения модельных задач. В случае однородной жидкости ($g = 0$) исходная дифференциальная задача эквивалентна следующей системе одномерных уравнений:

$$\frac{\partial U_D}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(rK\frac{\partial U_D}{\partial r}\Big); \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(rK\frac{\partial e}{\partial r}\Big) + P - \varepsilon, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{rK}{\sigma}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{e} + c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{e}P, \tag{4.3}$$

где $K = \dfrac{1-c_2}{c_1}\dfrac{\langle v'^2\rangle e}{\varepsilon}$; $\langle v'^2\rangle = \dfrac{2}{3}e - \dfrac{2}{3}\dfrac{1-c_2}{c_1}\dfrac{e}{\varepsilon}P$; $P = K\Big(\dfrac{\partial U_D}{\partial r}\Big)^2$.

При $x = x_0 = 8$ задавались начальные условия [4], согласующиеся с экспериментальными данными Линя и Пао о вырождении турбулентных следов в однородной жидкости:

$$\begin{gathered} e(x_0,r) = E_0\exp(-4r^2), \quad E_0 = e(x_0,0), \quad \varepsilon(x_0,r) = \sqrt{12}\,E_0^{3/2}\exp(-6r^2), \\ U_D(x_0,r) = U_d(1-8r^2)\exp(-8r^2), \quad U_d = U_D(x_0,0). \end{gathered} \tag{4.4}$$

При $r = 0$ ставились краевые условия

$$\frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\partial U_D}{\partial r} = 0. \tag{4.5}$$

При $r \to \infty$ задавались нулевые краевые условия для искомых функций.

Задача (4.1)–(4.5) решалась с помощью следующего конечно-разностного алгоритма:

$$\frac{(U_D)_i^{n+1} - (U_D)_i^n}{\Delta x^n} = \frac{1}{r_i}(\Lambda U_D)_i^{n+1}; \tag{4.6}$$

$$\frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta x^n} = \frac{1}{r_i}(\Lambda e)_i^{n+1} + P_i^{n+1} - \varepsilon_i^n; \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered} \frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta x^n} = \frac{1}{\sigma r_i}(\Lambda\varepsilon)_i^{n+1} - c_{\varepsilon 2}\varepsilon_i^{n+1}\varepsilon_i^n/e_i^{n+1} + c_{\varepsilon 1}\varepsilon_i^{n+1}P_i^{n+1}/e_i^{n+1} \\ (i = 1,\dots,M_r - 1; \quad n = 0,\dots,N). \end{gathered} \tag{4.8}$$

Здесь $(\Lambda f)_i^{n+1} = (a_{i+1}f_{i+1}^{n+1} - (a_i + a_{i+1})f_i^{n+1} + a_i f_{i-1}^{n+1})/h_r^2$; $a_i = (r_iK_i^n + r_{i-1}K_{i-1}^n)/2$; $P_i^{n+1} = K_i^n\,(((U_D)_{i+1}^{n+1} - (U_D)_{i-1}^{n+1})/2h_r)^2$; f — одна из функций U_D, e, ε.

Из соображений простоты шаг сетки по переменной r полагался постоянным. Разностные уравнения (4.6)–(4.8) решаются на каждом слое по x последовательно. Задача

(4.1)–(4.5) интегрировалась с использованием описанного выше конечно-разностного алгоритма на последовательности вложенных сеток. Решения сравнивались в равномерной норме. Расчеты проводились на сетках с параметрами:

1) $h_r^{(1)} = h_0 = 0{,}1$, $\tau_0^n = \Delta x^n = 0{,}01 \div 0{,}5$ (варьирование τ_0^n осуществлялось по формуле суммы членов арифметической прогрессии с разностью 0,01);

2) $h_r^{(2)} = h_0/2$, $\tau_1^n = \tau_0^n/4$;

3) $h_r^{(3)} = h_0/4$, $\tau_2^n = \tau_0^n/8$;

4) $h_r^{(4)} = h_0/8$, $\tau_3^n = \tau_0^n/16$.

При этом для $x = 100$ относительная разность решений на двух соседних сетках составила соответственно 4,9; 1,1; 0,35 % для энергии турбулентности e; 4,05; 0,95; 0,5 % для скорости диссипации ε; 5,8; 1,3; 0,56 % для U_D. Эти результаты свидетельствуют о сходимости в себе последовательности сеточных решений.

Дальнейшее тестирование осуществлялось по следующей схеме: полученное с применением весьма мелкой сетки ($\tau_3^n = \tau_0^n/16$, $h_r^{(4)} = h_0/8$) сеточное решение объявлялось «точным», и на нем тестировался алгоритм решения задачи применительно к уравнениям (2.1), (2.15), (2.16). Преобразование координат (3.1) для простоты считалось тождественным. Поскольку система уравнений (2.1), (2.15), (2.16) (и ее одномерный аналог (4.1)–(4.3)) является системой вырождающихся параболических уравнений [35], обладающей свойством конечной скорости распространения возмущений, оказалось достаточным положить $y_* = 5$, $z_* = 5$. Результаты сравнения сводятся к следующему. При $x = 100$ и параметрах равномерной расчетной сетки $\Delta x^n = \tau_0^n$, $h_y = h_z = h_0$; $\Delta x^n = \tau_0^n/4$, $h_y = h_z = h_0/2$; $\Delta x^n = \tau_0^n/8$, $h_y = h_z = h_0/4$ относительные отклонения сеточных решений двумерной задачи от «точного» для энергии турбулентности e составили 9,33; 6,8; 6,09 % соответственно. Отклонения для скорости диссипации ε получились равными 8,8; 5,4; 3,8 %; для дефекта скорости U_D — 14,4; 5,1; 4,4 %. Для проведения сравнения «точного» решения одномерной задачи (4.1)–(4.5) с решением ее двумерного конечно-разностного аналога значения одномерных функций восстанавливались в узлы двумерной области с помощью стандартной кубической сплайн-интерполяции.

Достаточно хорошо известным тестом для алгоритмов решения двумерного нелинейного уравнения теплопроводности является задача об анизотропной температурной волне [35]. Авторы проверяли сходимость алгоритма (после изменения одного из диффузионных уравнений математической модели) и на этом тесте.

Выполненный выше экспериментальный анализ сходимости представляет интерес также и в связи с тем, что он непосредственно связан с решаемой задачей и позволяет оценить параметры алгоритма, необходимые для достижения заданной точности при ее решении в полной постановке.

Этап алгоритма, связанный с интегрированием системы уравнений (2.20), (2.21), тестировался на задаче о динамике локального возмущения поля плотности в стратифицированной среде [28].

Работоспособность математической модели в полной постановке анализировалась на экспериментальных данных Линя и Пао о вырождении безымпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде [3, 4]. Результаты расчетов для плотностного числа Фруда $\mathrm{Fr} = 31$ представлены на рис. 1–3. На рис. 1, 2 приведено изменение во времени осевых значений энергии турбулентности $e_0 = e_0(t) = e(t,0,0)$ и дефекта скорости $U_{D0} = U_{D0}(t) = U_D(t,0,0)$. Штриховые (однородная жидкость) и сплошные (стратифицированная) линии — результаты настоящей работы, точки *1, 2* — экспериментальные данные Линя и Пао, *3, 4* — результаты численных экспериментов Хессида [4] (светлые точки — однородная жидкость, темные — стратифицированная).

На рис. 3 рассчитанные значения дисперсии флуктуаций плотности $\Sigma_c =$

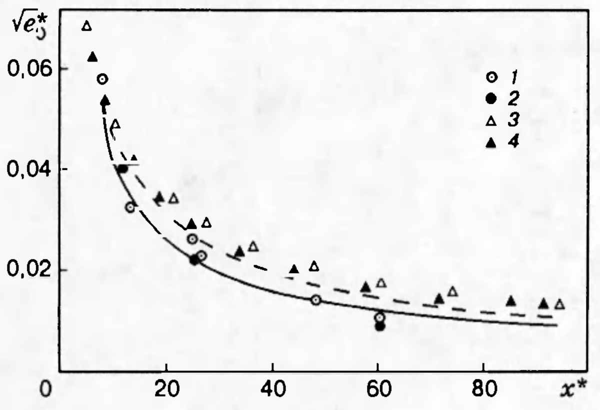

Рис. 1

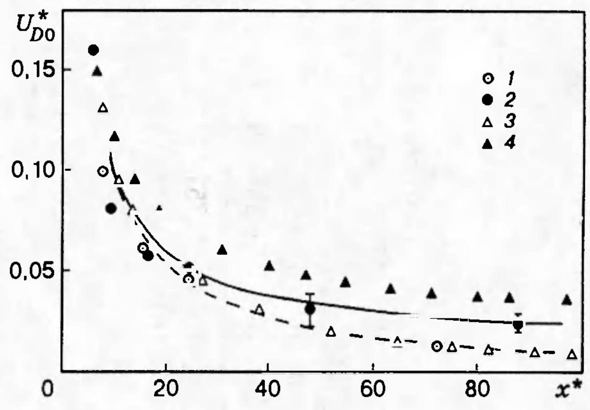

Рис. 2

$\sqrt{\langle \rho'^2(t,0,0)\rangle}/\mathrm{Fr}^{1/4}$ сравниваются с экспериментальными данными Линя и Пао. Расчеты выполнены на сетке с числом узлов 61 × 51 (сетка 1). В исходной плоскости (y, z) узлы сеточной области (y_i, z_j) распределялись следующим образом:

$$y_i = ih_{1y},\ i = 0,\ldots,30;\ y_i = y_{i-1}q_{1y},\ i = 31,\ldots,60,\ q_{1y} = 1{,}04;$$

$$z_j = jh_{1z},\ j = 0,\ldots,20;\ z_j = z_{j-1}q_{1z},\ j = 21,\ldots,50,\ q_{1z} = 1{,}047$$

$(h_{1y} = h_{1z} = 0,1)$. Значение Δx^n изменялось от 0,01 до 0,5 по формуле суммы членов арифметической прогрессии с разностью 0,01.

Для контроля достоверности результатов, представленных на рис. 1–3, проводились также расчеты на более подробной сетке с числом узлов 81 × 61 (сетка 2):

$$y_i = ih_{2y},\ i = 0,\ldots,40;\ y_i = y_{i-1}q_{2y},\ i = 41,\ldots,80,\ q_{2y} = 1{,}041;$$

$$z_j = jh_{2z},\ j = 0,\ldots,30;\ z_j = z_{j-1}q_{2z},\ j = 31,\ldots,60,\ q_{2z} = 1{,}057$$

$(h_{2y} = h_{1y}/2,\ h_{2z} = h_{1z}/2)$. Значение Δx^n изменялось при этом от 0,0025 до 0,15 по формуле суммы членов арифметической прогрессии с разностью 0,0025 (здесь и ниже приведены обезразмеренные параметры сеток). Некоторые данные сопоставления результатов рас-

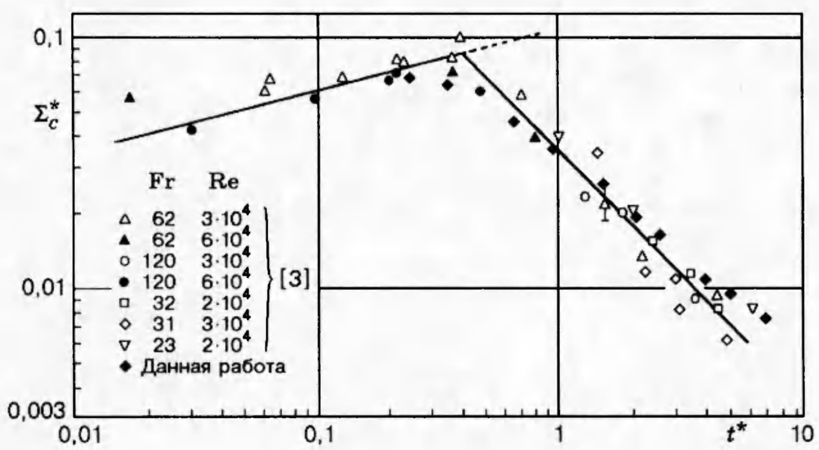

Рис. 3

Таблица 1

Сетка	t	$\sqrt{e_0}$	ε_0	$\sqrt{\langle\rho_0'^2\rangle}$	U_{D0}	L_y	L_z	ψ_m
1	0,5	$3{,}136 \cdot 10^{-2}$	$7{,}131 \cdot 10^{-5}$	$1{,}282 \cdot 10^{-1}$	$7{,}723 \cdot 10^{-2}$	$1{,}205 \cdot 10^{0}$	$1{,}195 \cdot 10^{0}$	$6{,}140 \cdot 10^{-4}$
2		$3{,}174 \cdot 10^{-2}$	$7{,}153 \cdot 10^{-5}$	$1{,}289 \cdot 10^{-1}$	$7{,}404 \cdot 10^{-2}$	$1{,}203 \cdot 10^{0}$	$1{,}194 \cdot 10^{0}$	$6{,}355 \cdot 10^{-4}$
1	4,0	$6{,}655 \cdot 10^{-3}$	$3{,}614 \cdot 10^{-7}$	$3{,}256 \cdot 10^{-2}$	$2{,}344 \cdot 10^{-2}$	$1{,}581 \cdot 10^{0}$	$1{,}484 \cdot 10^{0}$	$2{,}757 \cdot 10^{-4}$
2		$6{,}660 \cdot 10^{-3}$	$3{,}551 \cdot 10^{-7}$	$3{,}261 \cdot 10^{-2}$	$2{,}223 \cdot 10^{-2}$	$1{,}583 \cdot 10^{0}$	$1{,}481 \cdot 10^{0}$	$2{,}473 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2

t	I_{01}		U_{D0}		t	I_{01}		U_{D0}	
0,5	$6{,}95 \cdot 10^{-10}$	$-5{,}83 \cdot 10^{-4}$	$2{,}46 \cdot 10^{-2}$	$1{,}19 \cdot 10^{-2}$	6,0	$1{,}28 \cdot 10^{-8}$	$-6{,}92 \cdot 10^{-4}$	$3{,}99 \cdot 10^{-3}$	$-3{,}97 \cdot 10^{-5}$
2,0	$3{,}56 \cdot 10^{-9}$	$-6{,}90 \cdot 10^{-4}$	$6{,}43 \cdot 10^{-3}$	$8{,}61 \cdot 10^{-4}$	8,0	$1{,}48 \cdot 10^{-8}$	$-6{,}91 \cdot 10^{-4}$	$3{,}64 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}29 \cdot 10^{-4}$
4,0	$9{,}12 \cdot 10^{-9}$	$-6{,}93 \cdot 10^{-4}$	$4{,}64 \cdot 10^{-3}$	$1{,}56 \cdot 10^{-4}$	10,0	$1{,}57 \cdot 10^{-8}$	$-6{,}91 \cdot 10^{-4}$	$3{,}40 \cdot 10^{-3}$	$1{,}80 \cdot 10^{-4}$

Таблица 3

Сетка	t	$\sqrt{e_0}$	ε_0	$\sqrt{\langle\rho_0'^2\rangle}$	U_{D0}	L_y	L_z	ψ_m	E_t	P_t
3	0,5	$4{,}09 \cdot 10^{-3}$	$6{,}28 \cdot 10^{-8}$	$5{,}80 \cdot 10^{-2}$	$1{,}60 \cdot 10^{-4}$	$1{,}58 \cdot 10^{0}$	$1{,}35 \cdot 10^{0}$	$2{,}54 \cdot 10^{-4}$	$1{,}28 \cdot 10^{-5}$	$3{,}04 \cdot 10^{-6}$
4		$4{,}21 \cdot 10^{-3}$	$6{,}85 \cdot 10^{-8}$	$6{,}17 \cdot 10^{-2}$	$1{,}51 \cdot 10^{-4}$	$1{,}59 \cdot 10^{0}$	$1{,}31 \cdot 10^{0}$	$2{,}57 \cdot 10^{-4}$	$1{,}34 \cdot 10^{-5}$	$3{,}16 \cdot 10^{-6}$
3	4,0	$5{,}15 \cdot 10^{-4}$	$9{,}79 \cdot 10^{-11}$	$3{,}66 \cdot 10^{-2}$	$1{,}17 \cdot 10^{-5}$	$5{,}31 \cdot 10^{0}$	$1{,}02 \cdot 10^{0}$	$8{,}39 \cdot 10^{-4}$	$9{,}05 \cdot 10^{-7}$	$5{,}18 \cdot 10^{-6}$
4		$5{,}21 \cdot 10^{-4}$	$1{,}01 \cdot 10^{-10}$	$3{,}66 \cdot 10^{-2}$	$1{,}13 \cdot 10^{-5}$	$5{,}38 \cdot 10^{0}$	$0{,}96 \cdot 10^{0}$	$8{,}74 \cdot 10^{-4}$	$9{,}83 \cdot 10^{-7}$	$5{,}47 \cdot 10^{-6}$

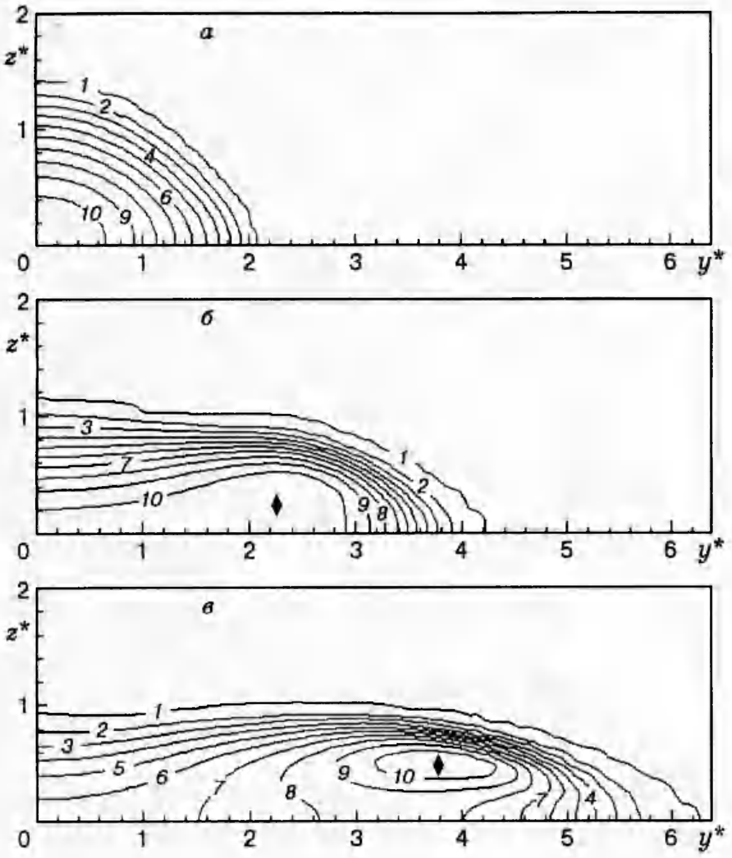

Рис. 4

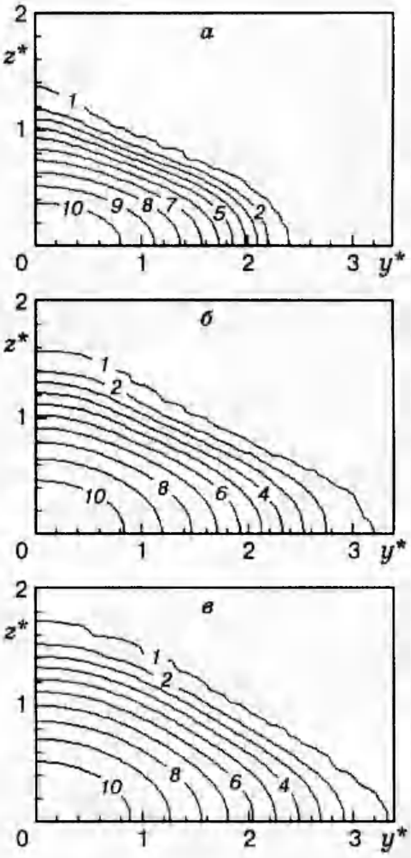

Рис. 5

четов на сетках 1, 2 приведены в табл. 1, где $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t) = \varepsilon(t,0,0)$, $\langle\rho_0'^2\rangle = \langle\rho'^2(t,0,0)\rangle$, $\psi_m = \psi_m(t) = \max\limits_{y_i,z_j}|\psi(t,y_i,z_j)|$, L_y, L_z — характерные вертикальный и горизонтальный размеры следа, определяемые из соотношений $e(t,L_y,0) = 0{,}01e_0(t)$, $e(t,0,L_z) = 0{,}01e_0(t)$. Отметим также, что отклонения массивов сеточных значений функций ψ, U_D, e, ε в равномерной норме не превышали отклонений значений, приведенных в табл. 1. Это свидетельствует о надежности предложенного алгоритма. Представленные на рис. 1–3 данные демонстрируют достаточно высокую эффективность математической модели турбулентных следов.

Проанализируем роль аппроксимации краевых условий на осях симметрии для уравнения (2.1). В табл. 2 приведены результаты численного эксперимента, выполненного на сетке 1. Столбцы 2, 4 относятся к модифицированным краевым условиям для уравнения (2.1), 3, 5 — к условиям Неймана для дефекта продольной компоненты скорости. Роль аппроксимации краевых условий для (2.1) весьма существенна в изменении U_{D0}.

5. Основные результаты расчетов. Динамика турбулентного следа в пикноклине иллюстрируется рис. 4, 6, 8,*а*, 9–11. Расчеты выполнялись для распределения обезразмеренной плотности невозмущенной жидкости

$$\rho_{sn}(z) = \rho_s(z) = \widehat{\rho}_0 - \beta\,\mathrm{th}\,(z/\beta), \quad \widehat{\rho}_0 = 1/aD, \quad \beta = 0{,}1.$$

Плотностное число Фруда полагалось равным 565, что соответствует условиям одного из лабораторных экспериментов Линя и Пао [3] в линейно стратифицированной среде. Начальные данные задавались в согласии с экспериментальными [3, 4] в однородной жидкости. Расчеты проводились на сетке с числом узлов 71 × 36 (сетка 3). В плоскости (y,z)

узлы сеточной области распределялись следующим образом:

$$y_i = ih_{3y},\ i = 0,\ldots,30;\ y_i = y_{i-1}q_{3y},\ i = 31,\ldots,70,\ q_{3y} = 1{,}06;$$

$$z_j = jh_{3z},\ j = 0,\ldots,10;\ z_j = z_{j-1}q_{3z},\ j = 11,\ldots,35,\ q_{3z} = 1{,}113$$

($h_{3y} = h_{3z} = 0{,}075$). Шаг Δx^n изменялся от $\Delta x^0 = 0{,}055$ по формуле $\Delta x^{n+1} = \Delta x^n + 0{,}055$ до 3,6 и далее полагался постоянным.

На рис. 4,*а–в* изображены линии равной энергии $e/e_m(t) = \text{const}$, $e_m(t) = \max\limits_{y_i,z_j} e(t, y_i, z_j)$ при $t = 1$; 3; 5 соответственно; изолинии *1–10* представлены уровнями 0,01; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; значок ♦ — узел сетки, в котором достигается максимум $e(t, y, z)$.

Для сравнения на рис. 5,*а–в* приведены линии равной энергии для линейного распределения плотности невозмущенной жидкости (Fr = 565, обозначения те же, что и на рис. 4).

Конвективное течение иллюстрируется рис. 6,*а–в* и 7,*а–в*, где представлены линии тока $\psi = \text{const}$ для $t = 1$; 3; 5 соответственно; изолинии *1–9* отвечают уровням $-2 \cdot 10^{-4}$; -10^{-4}; $-2{,}5 \cdot 10^{-5}$; 0; $5 \cdot 10^{-5}$; 10^{-4}; $2 \cdot 10^{-4}$; $3 \cdot 10^{-4}$; $4 \cdot 10^{-4}$. Видно существенное различие в динамике конвективных вихрей в пикноклине (рис. 6) и линейной стратификации (рис. 7). Линейной стратификации присущ процесс дробления вихрей и образования вихрей противоположной направленности [23]. В рассмотренном пикноклине в каждом квадранте плоскости (y, z) формируется единственный вихрь, который при $t \geqslant 5$ становится практически стационарным.

Процесс вырождения турбулентного следа сопровождается генерацией внутренних волн. Внутренние волны, индуцируемые турбулентным следом в пикноклине, показаны на рис. 8,*а*, где представлена динамика линии $\widehat{\rho}_0 - \langle\rho\rangle = \widehat{\rho}_0 - \rho_{sn}(0{,}07)$ для моментов времени $t = 1$; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 (линии *1–8*). Видно, что для $t \geqslant 5$ возмущение мало изменяется, перемещаясь с практически постоянной скоростью вдоль оси y.

Картина внутренних волн, генерируемых турбулентным следом в линейно стратифицированной среде, иллюстрируется рис. 8,*б*, где изображена динамика изолинии $\widehat{\rho}_0 - \langle\rho\rangle = \widehat{\rho}_0 - \rho_{sl}(0{,}07)$ для $t = 1$; 2; 3; 4; 5 (линии *1–5*; $\rho_{sl}(z) = \widehat{\rho}_0 - z$). В отличие от пикноклина волновой процесс сопровождается появлением с ростом времени новых гребней и впадин. В результате в линейно стратифицированной среде течение характеризуется значительно меньшей амплитудой внутренних волн, причем с ростом времени эта амплитуда убывает. Внутренние волны на рис. 8 находятся в полном соответствии с результатами рис. 6, 7.

Процесс вырождения турбулентного следа представлен также на рис. 9, 10. На рис. 9 показано изменение характерных горизонтального L_y (линии *1*, *3*) и вертикального L_z (линии *2*, *4*) размеров турбулентного следа. Кривые *1*, *2* отвечают пикноклину, *3*, *4* — линейно стратифицированной жидкости. Видно, что турбулентный след в пикноклине растекается более интенсивно. Вместе с тем изменение энергии турбулентности на оси следа $e_0(t)$ (рис. 10, где *1* — пикноклин, *2* — линейная стратификация) слабо зависит от типа стратификации, хотя в распределениях изолиний $e = \text{const}$ имеются существенные различия (см. рис. 4, 5). В пикноклине максимальное значение энергии турбулентности при $t > 1{,}5$ достигается не на оси следа, что объясняется особенностями динамики осредненного конвективного движения, вызванного коллапсом следа (см. рис. 6–8).

Остановимся на оценках точности расчетов. Основные расчеты проводились на сетке 3. Выполнялись также расчеты на более подробной сетке (сетка 4), которая в горизонтальном направлении была устроена аналогично сетке 3, а узлы по вертикали распределялись следующим образом:

$$z_j = jh_{4z},\ j = 0,\ldots,20;\ z_j = z_{j-1}q_{4z},\ j = 21,\ldots,55,\ q_{4z} = 1{,}082$$

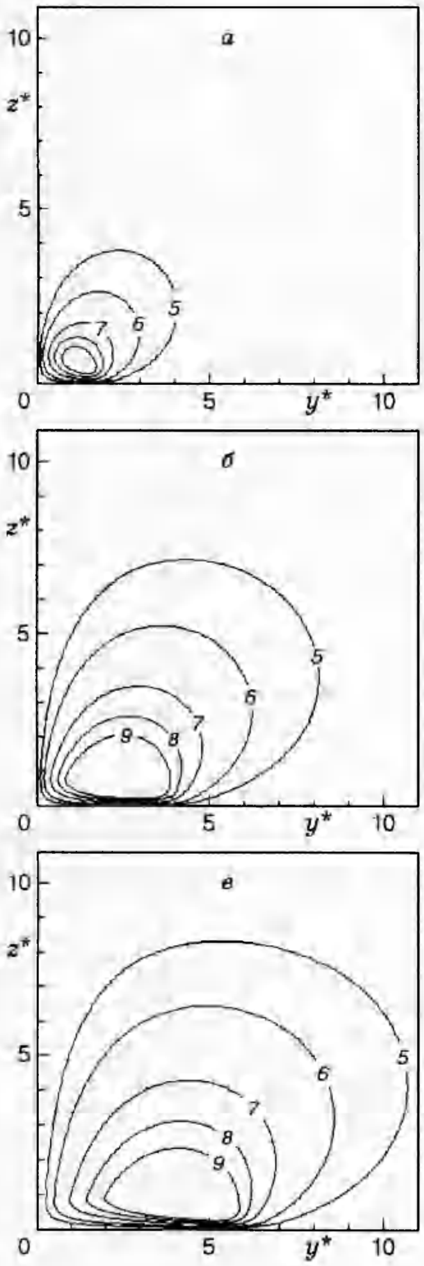

Рис. 6

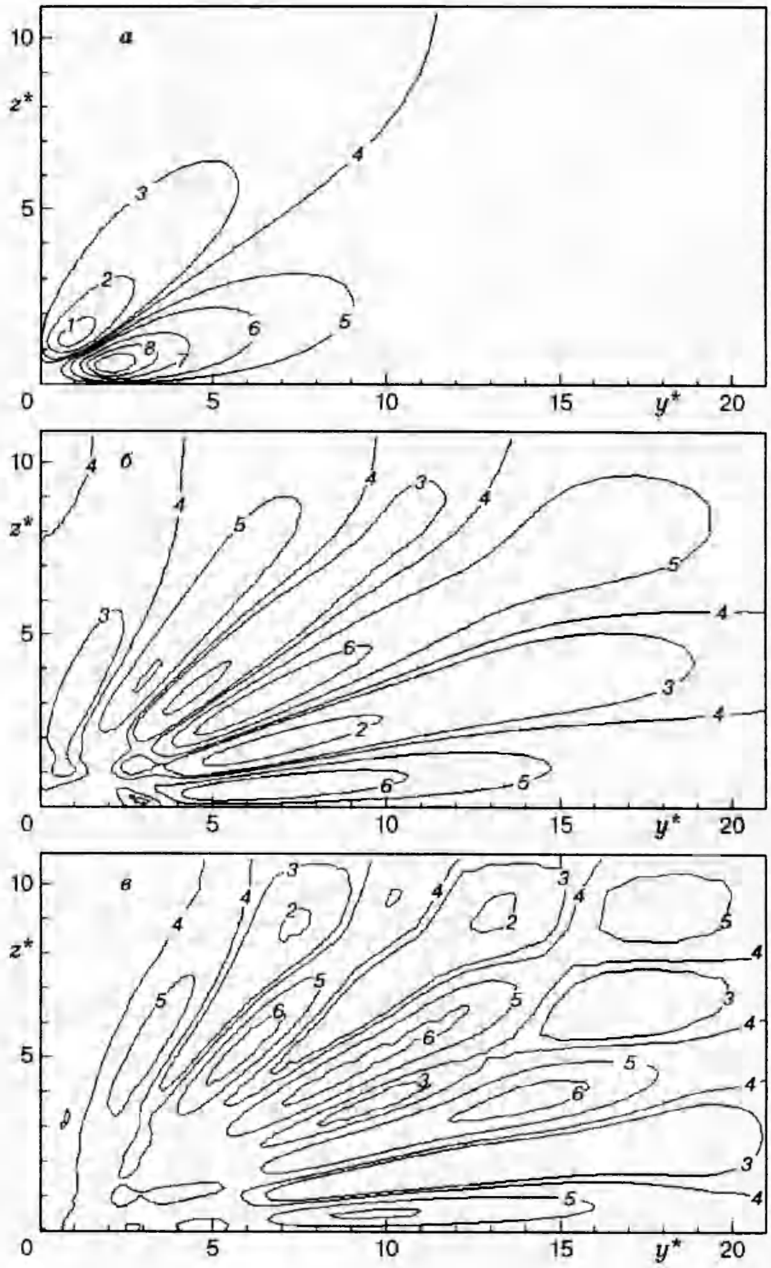

Рис. 7

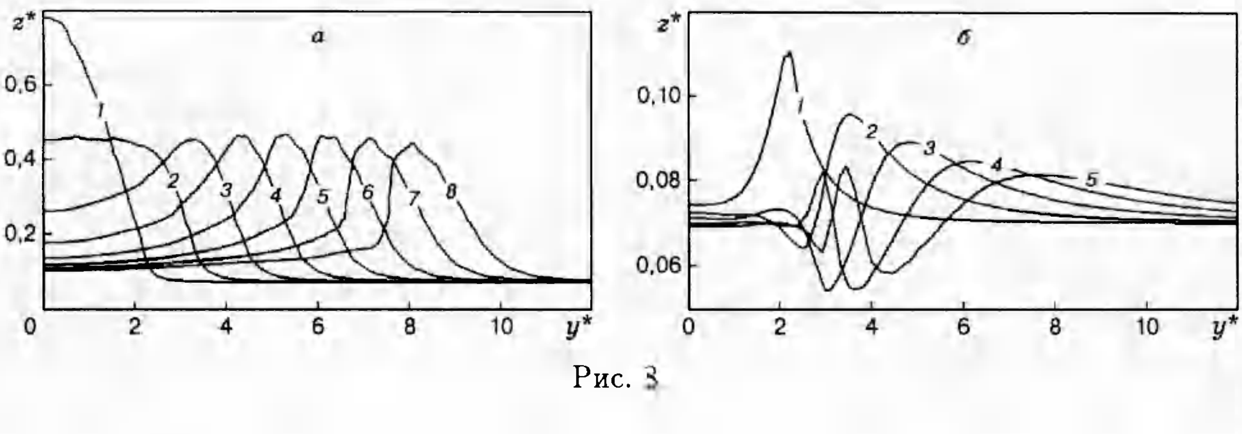

Рис. 8

Таблица 4

Модель	t	$\sqrt{e_0}$	ε_0	$\sqrt{\langle\rho_0'^2\rangle}$	L_y	L_z	ψ_m	E_t
Полная Упрощенная	2,0	$1{,}12\cdot10^{-3}$ $1{,}11\cdot10^{-3}$	$1{,}02\cdot10^{-9}$ $9{,}95\cdot10^{-10}$	$5{,}03\cdot10^{-2}$ $4{,}97\cdot10^{-2}$	$3{,}15\cdot10^{0}$ $3{,}13\cdot10^{0}$	$1{,}37\cdot10^{0}$ $1{,}34\cdot10^{0}$	$8{,}37\cdot10^{-4}$ $8{,}24\cdot10^{-4}$	$1{,}96\cdot10^{-6}$ $1{,}88\cdot10^{-6}$
Полная Упрощенная	5,0	$4{,}02\cdot10^{-4}$ $3{,}97\cdot10^{-4}$	$4{,}71\cdot10^{-11}$ $4{,}58\cdot10^{-11}$	$3{,}03\cdot10^{-2}$ $3{,}05\cdot10^{-2}$	$6{,}35\cdot10^{0}$ $6{,}32\cdot10^{0}$	$0{,}94\cdot10^{0}$ $0{,}92\cdot10^{0}$	$7{,}92\cdot10^{-4}$ $7{,}79\cdot10^{-4}$	$7{,}57\cdot10^{-7}$ $7{,}27\cdot10^{-7}$
Полная Упрощенная	8,0	$2{,}51\cdot10^{-4}$ $2{,}48\cdot10^{-4}$	$1{,}14\cdot10^{-11}$ $1{,}11\cdot10^{-11}$	$1{,}92\cdot10^{-2}$ $1{,}94\cdot10^{-2}$	$9{,}09\cdot10^{0}$ $9{,}05\cdot10^{0}$	$0{,}97\cdot10^{0}$ $0{,}96\cdot10^{0}$	$6{,}24\cdot10^{-4}$ $6{,}11\cdot10^{-4}$	$5{,}02\cdot10^{-7}$ $4{,}80\cdot10^{-7}$

($h_{4z} = 0{,}035$). Шаг Δx^n (по аналогии с сеткой 3) изменялся от 0,015 до 0,9.

Некоторые данные сопоставления расчетов в пикноклине на сетках 3, 4 представлены в табл. 3. Видно, что результаты расчетов достаточно близки. Отклонения массивов значений искомых функций в норме, являющейся сеточным аналогом нормы пространства непрерывных функций, не превышали отклонений в характеристиках следа, представленных в табл. 3.

6. Упрощенные модели. Хорошо известным результатом расчетно-теоретических и экспериментальных исследований [36, 37] динамики безымпульсных турбулентных следов в однородной жидкости является факт существенно более быстрого вырождения дефекта продольной компоненты скорости U_D в сравнении с $\sqrt{e}$. В связи с этим представляет интерес математическая модель безымпульсного турбулентного следа в пикноклине, в которой $U_D \equiv 0$.

Некоторые результаты расчетов с применением полной ($U_D \neq 0$) и упрощенной ($U_D \equiv 0$) моделей приведены в табл. 4. Численные эксперименты выполнены с применением сетки 3. Результаты расчетов можно считать достаточно близкими.

Дальнейшее упрощение математической модели течения связано с анализом поведения суммарных энергий турбулентности $E_t(t)$ и внутренних волн $P_t(t)$:

$$E_t(t) = \iint\limits_0^{\infty} e\,dy\,dz \equiv \iint\limits_0^{\infty} eJ\,d\xi\,d\eta, \quad P_t(t) = \iint\limits_0^{\infty} \Big(\frac{\overline{V}^2 + \overline{W}^2}{2} + \frac{4\pi^2}{\mathrm{Fr}^2}\langle\rho_1\rangle z\Big) J\,d\xi\,d\eta.$$

Изменение этих величин в зависимости от времени показано на рис. 11, где кривые *1, 2* соответствуют $E_t(t)$, $P_t(t)$ в пикноклине, *3, 4* — $E_t(t)$, $P_t(t)$ в линейно стратифицированной жидкости. Видно, что с ростом времени значение $E_t(t)$ монотонно убывает (кривые *1*, *3*) из-за диссипации энергии турбулентности в тепло под действием молекулярной вязкости. Вместе с тем вследствие турбулентной диффузии массы и работы сил плавучести часть энергии турбулентности переходит в потенциальную, начинается генерация внутренних волн, и $P_t(t)$ возрастает вплоть до $t \approx 3$ (кривые *2*, *4*). Однако при больших значениях времени $P_t(t)$ остается практически постоянной. Такое поведение $P_t(t)$, $E_t(t)$, как и в случае модельной задачи о динамике локализованной зоны турбулентного смешения [26, 29], свидетельствует о расщеплении течения на волновой и диффузионный процессы.

Последнее позволяет предложить для расчета динамики дальнего турбулентного следа упрощенные математические модели: уравнения Эйлера в приближении Буссинеска — для численного моделирования характеристик внутренних волн, диффузионную модель — для численного анализа характеристик собственно турбулентного следа. Некоторые результаты расчетов, демонстрирующие возможность применения упрощенной модели (уравнений Эйлера в приближении Буссинеска) для расчета генерируемых дальним турбулентным

Таблица 5

t	$\delta\rho$		$\delta\psi$	
5	0,184	0,095	0,090	0,031
6	0,196	0,162	0,140	0,085
7	0,194	0,168	0,178	0,134
8	0,254	0,205	0,208	0,168

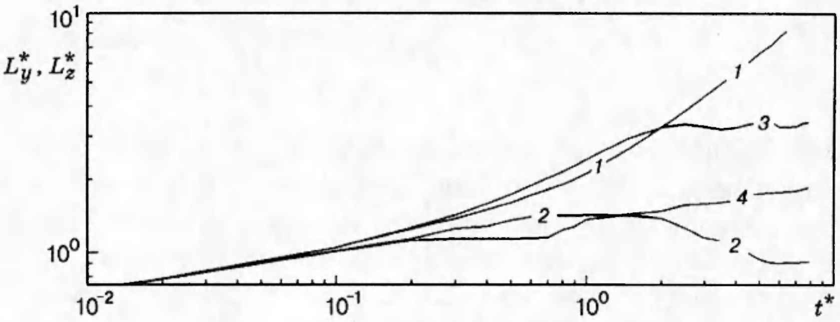

Рис. 9

следом внутренних волн, представлены в табл. 5, где

$$\delta\rho = \max_{i,j} |\langle\rho_1\rangle^{n_0}_{i,j} - \langle\widehat{\rho}_1\rangle^{n_0}_{i,j}|/\max\{|\langle\rho_1\rangle^{n_0}_{i,j}|, |\langle\widehat{\rho}_1\rangle^{n_0}_{i,j}|\}, \ \delta\psi = \max_{i,j} |\psi^{n_0}_{i,j} - \widehat{\psi}^{n_0}_{i,j}|/\max_{i,j}\{|\psi^{n_0}_{i,j}|, |\widehat{\psi}^{n_0}_{i,j}|\}.$$

Здесь знаком $\widehat{\ }$ помечены величины, полученные с применением упрощенной модели; номер временного слоя n_0 выбран так, чтобы значения времени соответствовали приведенным в табл. 5. В столбцах 2, 4 представлены результаты сопоставления расчетных данных, полученных по полной и упрощенной моделям, когда начальные условия для последней ставились на основе решения полной задачи при $t = 3$. В столбцах 3, 5 сопоставляются данные расчетов, в которых упрощенная модель использовалась при $t \geqslant 4$. Применение диффузионной модели при $t \geqslant 3$ приводит, в частности, к отклонениям (в сравнении с полной моделью) не более 20 % в осевых значениях энергии турбулентности.

Отклонения в табл. 5 существенно превышают соответствующие случаю линейной стратификации [20, 21], что объясняется наличием в пикноклине слабого взаимодействия турбулентности в следе и генерируемых следом волновых движений. Тем не менее это взаимодействие невелико, и упрощенные модели целесообразно использовать для численного анализа течения.

Обратимся вновь к результатам рис. 8,*а*. Поскольку задача о динамике внутренних волн, генерируемых при коллапсе турбулентного следа в пикноклине, может рассматриваться как задача Коши для уравнений Эйлера в приближении Буссинеска, естественно попытаться оценить параметры этих волн с использованием асимптотического соотноше-

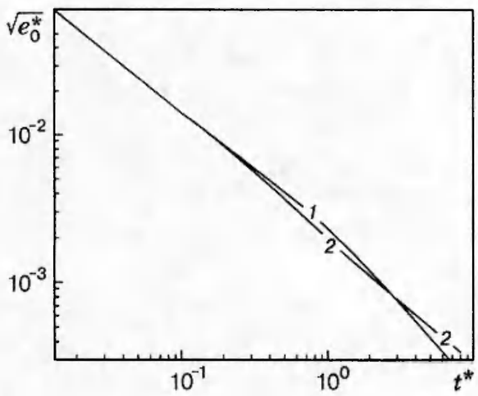

Рис. 10

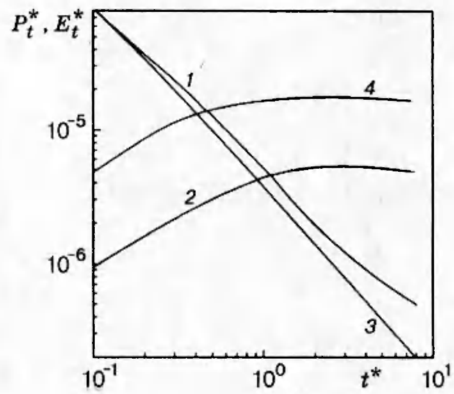

Рис. 11

ния [38], связывающего максимальную амплитуду $\bar{A}$ и скорость распространения волны $\bar{c}$:

$$(\bar{c})^2 = \frac{\beta^2}{2}\left(1 + \frac{3}{5}\frac{\bar{A}}{\beta}\right). \tag{6.1}$$

Как следует из численных расчетов, $c = cT_*/D = 0{,}15$, $T_* = 1/\sqrt{ag}$, $\bar{A} = A/D = 0{,}39$. Соотношение (6.1) дает для $A = 0{,}39$ величину $c_a = 0{,}13$, что свидетельствует, как и в [5], о возможности применения (6.1) для приближенных оценок.

Таким образом, в настоящей работе построена численная модель динамики безымпульсного турбулентного следа в пикноклине. Рассмотрены простая модифицированная $(e - \varepsilon)$-модель турбулентности и столь же простой (но достаточно надежный) конечно-разностный алгоритм решения. Совершенствование математической модели и ее дискретного аналога составляет предмет дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 93-01-17925, 95-01-00910).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Schooley A. H., Stewart R. W.** Experiments with a self-propelled body submerged in a fluid with vertical density gradient // J. Fluid Mech. 1963. V. 15, N 1. P. 83–96.
2. **Merrit G. E.** Wake growth and collapse in stratified flow // AIAA J. 1974. V. 12, N 7. P. 940–949.
3. **Lin J. T., Pao Y. H.** Wakes in stratified fluids // Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. V. 11. P. 317–336.
4. **Hassid S.** Collapse of turbulent wakes in stable stratified media // J. Hydronautics. 1980. V. 14, N 1. P. 25–32.
5. **Gilreath H. E., Brandt A.** Experiments on the generation of internal waves in a stratified fluid // AIAA J. 1985. V. 23. P. 693–700.
6. **Сысоева Е. Я., Чашечкин Ю. Д.** Вихревая структура следа за сферой в стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1986. № 2. С. 40–46.
7. **Hopfinger E. J., Flor J. B., Chomaz J. M., Bonneton P.** Internal waves generated by a moving sphere and its wake in stratified fluid // Exps Fluids. 1991. V. 11. P. 255–261.
8. **Lin Q., Boyer D. L., Fernando J. S.** Turbulent wakes of linearly stratified flow past a sphere // Phys. Fluids A. 1992. V. 4, N 8. P. 1687–1696.
9. **Chomaz J. M., Bonneton P., Butet A., Hopfinger E. J.** Vertical diffusion of the far wake of a sphere moving in a stratified fluid // Phys. Fluids A. 1993. V. 5, N 11. P. 2799–2806.
10. **Bonneton P., Chomaz J. M., Hopfinger E. J.** Internal waves produced by the turbulent wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 23–40.
11. **Shishkina O. D.** The wake regimes influence on hydrodynamic characteristics of the submerged sphere in the stratified fluid // Preprints of the 4th Int. Symp. on Stratified Flows, Grenoble, June 29 — July 2, 1994. Grenoble: Grenoble Inst. of Mech., 1994. V. 3, sess. A5, N 39.
12. **Chashechkin Yu. D.** Internal waves, vortices, and turbulence in a wake past a bluff body in continuously stratified liquid // Preprints of the 4th Int. Symp. on Stratified Flows, Grenoble, June 29 — July 2, 1994. Grenoble: Grenoble Inst. of Mech., 1994. V. 2, sess. B4, N 29.
13. **Spedding G. R., Browand F. K., Fincham A. M.** The structure and long-time evolution of bluff body wakes in a stable stratification // Preprints of the 4th Int. Symp.

on Stratified Flows, Grenoble, June 29 — July 2, 1994. Grenoble: Grenoble Inst. of Mech., 1994. V. 2, sess. B4, N 196.

14. **Voisin B.** Rayonnement des ondes internes de gravite. Application aux corps en mouvement. University Pierre et Marie Curie, 1991. Ph. doctor thesis.
15. **Онуфриев А. Т.** Турбулентный след в стратифицированной среде // ПМТФ. 1970. № 5. С. 68–72.
16. **Lewellen W. S., Teske M. E, Donaldson C. Dup.** Examples of variable density flows computed by second-order closure description of turbulence // AIAA J. 1976. V. 14. P. 382–387.
17. **Даниленко А. Ю., Костин В. И., Толстых А. И.** О неявном алгоритме расчета течений однородной и неоднородной жидкости. М., 1985 (Препр. / ВЦ АН СССР).
18. **Chernykh G. G., Fedorova N. N., Moshkin N. P.** Numerical simulation of turbulent wakes // Russian J. Theoret. and Appl. Mech. 1992. V. 2. P. 295–304.
19. **Глушко Г. С., Гумилевский А. Г., Полежаев В. И.** Эволюция турбулентных следов за шарообразными телами в устойчиво стратифицированных средах // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 1. С. 13–22.
20. **Chernykh G. G., Moshkin N. P., Voropayeva O. F.** Turbulent wakes in stratified fluids: results of numerical experiments // Preprints of the 4th Int. Symp. on Stratified Flows, Grenoble, June 29 — July 2, 1994. Grenoble: Grenoble Inst. of Mech., 1994. V. 1, sess. A2, N 103.
21. **Chernykh G. G., Moshkin N. P., Voropayeva O. F.** Numerical models of momentumless turbulent wakes in stratified media // Proc. of the 7th Int. Conf. on the Meth. of Aerophys. Res., Novosibirsk, Aug. 22–26, 1994. Novosibirsk: Inst. Theoret. Appl. Mech., 1994. Pt 1. P. 58–63.
22. **Shetz J. A.** Injection and Mixing in Turbulent Flow. N. Y.: American Inst. of Aeronautics and Astronautics, 1980.
23. **Васильев О. Ф., Кузнецов Б. Г., Лыткин Ю. М., Черных Г. Г.** Развитие области турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // Междунар. симпоз. по стратифицированным течениям. Новосибирск, 1972.
24. **Трохан А. М., Чашечкин Ю. Д.** Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости импульсным гидродинамически линейным источником (двумерная задача) // Теория дифракции и распространения волн: Краткие тезисы докл. VII Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Ростов-на-Дону, 1977. Т. 3. С. 186–189.
25. **Kao T. W., Pao H. P.** Wake collapse in the thermocline and internal solitary waves // J. Fluid Mech. 1980. V. 97, pt 1. P. 115–127.
26. **Chernykh G. G., Lytkin Y. M., Sturova I. V.** Numerical simulation of internal waves induced by the collapse of turbulent mixed region in stratified medium // Proc. of Int. Symp. on Refined Modeling of Flows, Paris, Sept. 7–10, 1982. Paris, 1982. P. 671–679.
27. **Попов В. А.** Развитие области частично перемешанной жидкости в тонкослоистой стратифицированной среде // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22, № 4. С. 389–394.
28. **Chernykh G. G., Filippova O. F., Zudin A. N.** Evolution of local density perturbation in stratified medium: results of numerical experiments // Proc. of the 1st Soviet Union — Japan Symp. on Computational Fluid Dynamics, Khabarovsk, Sept. 9–16, 1988. M.: Computer Center USSR AS, 1989. Pt 1. P. 128–133.
29. **Воропаева О. Ф., Черных Г. Г.** Эволюция зоны турбулентного смешения в жидкости с нелинейной стратификацией // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1989. Т. 3(20), № 5. С. 3–29.

30. **Flor J. B., Fernando H. J. S., Heijst G. J. F.** The evolution of an isolated turbulent region in a two-layer fluid // Phys. Fluids. 1994. V. 6, N 1. P. 287–296.
31. **Скурин Л. И.** Квазиодномерная модель эволюции в стратифицированной среде турбулентной области следа за телом // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22, № 4. С. 373–379.
32. **Rodi W.** Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // J. Geoph. Res. 1987. V. 92, N C5. P. 5305–5328.
33. **Яненко Н. Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
34. **Деменков А. Г., Черных Г. Г.** О численном моделировании струйных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вычислительные технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1995. Т. 4, № 12. С. 119–131.
35. **Самарский А. А., Соболь И. М.** Примеры расчета температурных волн // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, № 4. С. 702–719.
36. **Сабельников В. А.** О некоторых особенностях турбулентных течений с нулевым избыточным импульсом // Уч. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6, № 4. С. 71–74.
37. **Алексенко Н. В., Костомаха В. А.** Экспериментальное исследование динамики безымпульсного турбулентного струйного течения // ПМТФ. 1987. № 1. С. 65–69.
38. **Benjamin T. B.** Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid Mech. 1967. V. 29, N 3. P. 559-592.

Поступила в редакцию 20/X 1995 г.,
в окончательном варианте — 20/XII 1995 г.