

## О ТРАЕКТОРИЯХ ВЫХОДА ТРЕЩИН НА СВОБОДНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ПРИ РАСКЛИНИВАНИИ

*В. П. Ефимов, П. А. Мартынюк, Е. Н. Шер*

*Институт горного дела СО РАН,  
630091 Новосибирск*

Настоящая работа является продолжением [1], где в основном исследовалось распространение трещин гидроразрыва вблизи свободных поверхностей. Трещина гидроразрыва определялась предположением, что на ее границах касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения постоянны по ее длине. В горном деле обычно используются разрушающие технологии с рабочим органом в виде клина. Поэтому возникает необходимость в попытках адекватного описания процесса расклинивания.

В данной работе воздействие на среду клином моделируется приложением пары сосредоточенных сил, направление которых зависит от угла клина и коэффициента трения между клином и средой. Проведено сравнение результатов расчета квазистатических траекторий выхода трещин на прямолинейный откос с соответствующими экспериментальными траекториями, полученными при ударах клиньями с различными углами по образцам из органического стекла. Исследовано влияние на форму траекторий основных параметров: угла наклона зародышевой трещины, угла наклона оси клина, угла заострения клина и коэффициента трения. Показано, что используемый алгоритм расчета квазистатических траекторий вполне оправдан при описании ударного расклинивания — в экспериментах средняя скорость движения трещины 200–250 м/с. Использовался метод сингулярных интегральных уравнений [2–4].

Смоделируем воздействие клина на среду. Обозначим через  $2\beta$  угол клина, а  $\alpha_0$  — угол отклонения оси клина от вертикали, который в общем случае может и не совпадать с первоначальным направлением зародышевой трещины. Считая размер площадки контакта клина с материалом много меньше размера трещины, действующие на ней нормальные и касательные напряжения можно заменить результирующими их сосредоточенными силами  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{T}$ , направленными соответственно по нормали и по касательной к граням клина. Полагаем, что  $|\mathbf{T}| = k_t |\mathbf{N}|$  ( $k_t = \operatorname{tg} \gamma$  — коэффициент трения металл — среда). Следовательно, при расклинивании трещина развивается под воздействием сосредоточенных сил  $|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$ , приложенных к ее берегам, выходящим на свободную поверхность, причем направление сил определяется углом клина, коэффициентом трения и углом наклона оси клина.

Используемый метод решения [2, 3] хорошо работает, когда нагрузка вдоль трещины плавно меняется. Поэтому сдвинем точки приложения сосредоточенных сил с берегов трещины внутрь тела, но оставим неизменными их направления. Будем считать, что сосредоточенные силы  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  прилагаются в точках  $z_1 = (\varepsilon_1 - i\varepsilon_2)e^{i\alpha_0}$  и  $z_2 = -(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)e^{i\alpha_0}$ , где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — координаты точек приложения сил в системе координат  $x'_1 O y'_1$ , связанной с направлением оси клина (рис. 1, а). То обстоятельство, что сосредоточенные силы прилагаются не к берегам трещины, а отнесены с ее поверхности во внутренние точки  $z_1, z_2$ , представляется несущественным,

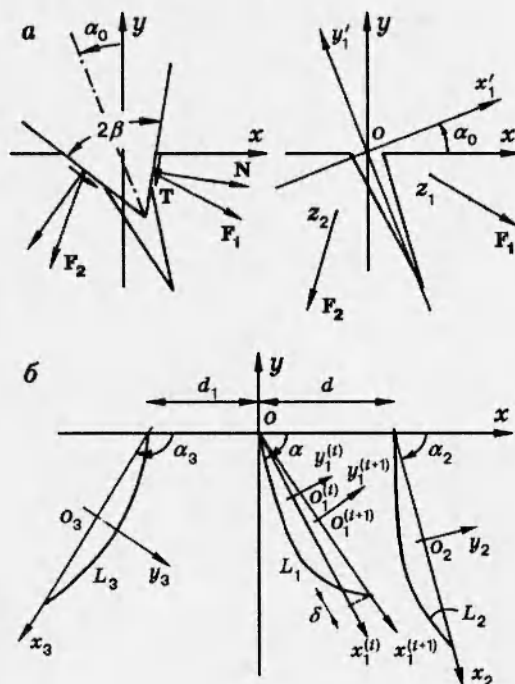


Рис. 1

так как в тестовых расчетах уже при длине трещины  $L \geq 4\epsilon_1$  ( $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ) коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины отличались от известных [2, 3] менее чем на 2%.

**Квазистатическая постановка задачи.** Рассматривается изотропная упругая полуплоскость  $y \leq 0$ , содержащая  $N$  гладких криволинейных разрезов  $L_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ), начинающихся с ее границы (рис. 1, б). Разрез  $L_1$  представляет развивающуюся трещину, а остальные разрезы ограничивают область, в которой она распространяется. Например, при  $N=2$  разрез  $L_2$  будет моделировать форму границы свободного откоса. Каждый разрез  $L_k$  отнесен к своей локальной системе координат  $x_k O_k y_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ). При этом  $(x_k^0, y_k^0)$  — начало координат  $k$ -й локальной системы в основной, а  $\alpha_k$  — угол между осями  $Ox$  и  $O_k x_k$ . Форма каждого разреза  $L_k$  в его локальной системе координат известна и задана параметрическим уравнением

$$t_k = \omega_k(\xi) = x_k(\xi) + iy_k(\xi), \quad |\xi| \leq 1, \quad t_k \in L_k.$$

Полагаем, что граница полуплоскости свободна от напряжений. Решение задачи теории упругости, когда все контуры разрезов свободны (сосредоточенные силы прилагаются во внутренних точках тела), сводится к нахождению  $N$  неизвестных функций  $g'_k(\xi)$  из системы комплексных сингулярных уравнений [1, 3]:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 [R_{kn}(\xi, \eta) g'_k(\xi) + S_{kn}(\xi, \eta) \overline{g'_k(\xi)}] d\xi = P_n(\eta), \quad (1)$$

$$|\eta| \leq 1, \quad n = \overline{1, N}.$$

Здесь  $g'_k(\xi) = g'_k(t_k)\omega'_k(\xi)$  и  $g'_k(t_k)$  — производная от скачка смещений

$$\frac{d}{dt_k}[(u_k + iv_k)^+ - (u_k + iv_k)^-] = \frac{i(1 + \varkappa)}{2\mu} g'_k(t_k) \quad (t_k \in L_k);$$

$\varkappa = 3 - 4\nu$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона (рассматривается плоская деформация);  $\mu$  — модуль сдвига;

$$R_{kn}(\xi, \eta) = R_{kn}(T_k, T_n) = e^{i\alpha_k} [\zeta_{kn}(\xi, \eta) + \rho_n r_{kn}(\xi, \eta)];$$

$$S_{kn}(\xi, \eta) = S_{kn}(T_k, T_n) = e^{-i\alpha_k} [\overline{\zeta_{kn}(\xi, \eta)} + \rho_n s_{kn}(\xi, \eta)];$$

$$T_k = T_k(\xi) = \omega_k(\xi) e^{i\alpha_k} + z_k^0; \quad T_n = T_n(\eta) = \omega_n(\eta) e^{i\alpha_n} + z_n^0;$$

$$\zeta_{kn}(\xi, \eta) = \frac{1}{b(\xi, \eta)} - \frac{1}{a(\xi, \eta)} - \frac{a(\xi)}{a(\xi, \eta)^2};$$

$$r_{kn}(\xi, \eta) = \frac{1}{\overline{b(\xi, \eta)}} - \frac{1}{\overline{a(\xi, \eta)}} + (b(\xi, \eta) - b(\eta)) \frac{a(\xi)}{a(\xi, \eta)^3};$$

$$s_{kn}(\xi, \eta) = b(\xi, \eta) [a(\xi, \eta)^{-2} - \overline{b(\xi, \eta)}^{-2}];$$

$$a(\xi) = T_k(\xi) - \overline{T_k(\xi)}; \quad b(\eta) = T_n(\eta) - \overline{T_n(\eta)};$$

$$a(\xi, \eta) = T_k(\xi) - \overline{T_n(\eta)}; \quad b(\xi, \eta) = T_k(\xi) - T_n(\eta);$$

$$\rho_n = e^{-2i\alpha_n} \overline{\omega'_n(\eta)} / \omega'_n(\eta);$$

$$P_n(\eta) = \frac{-|F|}{2\pi(1 + \varkappa)} \sum_{s=1}^2 (-1)^s \left\{ 2\operatorname{Re} \left[ -\frac{e^{i\gamma_s}}{tz} - e^{-i\gamma_s} \frac{tz}{z\bar{t}^2} + \frac{\varkappa e^{i\gamma_s} - e^{-i\gamma_s}}{z\bar{t}} \right] + \right. \\ \left. + \rho_n \left[ e^{-i\gamma_s} \frac{tz}{z\bar{t}^2} + (\varkappa e^{-i\gamma_s} - e^{i\gamma_s}) \frac{tz}{z\bar{t}^2} + e^{i\gamma_s} \left( \frac{\varkappa}{tz} - \frac{1}{z\bar{t}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e^{i\gamma_s}}{z\bar{t}^3} (2(t\bar{z}_s + z_s\bar{t}) - t(\bar{t} + z_s) - z_s(\bar{z}_s + t)) \right] \right\}$$

$(t = T_n(\eta), \quad z\bar{t} = z_s - \bar{t}, \quad tz = t - z_s, \quad \gamma_1 = \alpha_0 - \beta - \gamma, \quad \gamma_2 = \alpha_0 + \beta + \gamma).$

Ядра сингулярных интегральных уравнений (1) удовлетворяют равенствам  $R_{kn}(-1, \eta) = S_{kn}(-1, \eta) = 0$  ( $k = \overline{1, N}$ ), так как все разрезы начинаются с границы полуплоскости [2-4]. Решение уравнений (1) ищется в виде

$$g'_k(\xi) = \varphi_k(\xi) / \sqrt{1 - \xi^2},$$

где  $\varphi_k(\xi)$  — непрерывная комплексная функция на отрезке  $[-1, 1]$ . Используя квадратурные формулы Гаусса [3], из системы (1) получаем систему из  $N(n-1)$  линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n [R_{kj}(\xi_i, \eta_m) \varphi_k(\xi_i) + S_{kj}(\xi_i, \eta_m) \overline{\varphi_k(\xi_i)}] = 2nP_j(\eta_m), \quad (2)$$

$$j = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, n-1}.$$

Величина  $n$  определяет порядок аппроксимации решения  $\varphi_k(\xi)$ , где  $\xi_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и  $\eta_m$  ( $m = \overline{1, n-1}$ ) являются нулями многочленов Чебышева  $T_n(\xi) = \cos(n \arccos \xi)$  и  $U_{n-1}(\eta) = \sin(n \arccos \eta) / \sqrt{1 - \eta^2}$ .

Для замыкания системы уравнений (2) потребуем ограниченности смещений на левых концах разрезов, выходящих на свободную поверхность, что приводит к требованию выполнения условий

$$\varphi_k(-1) = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Значения функций  $\varphi_k(\xi)$  на концах разрезов при  $\xi = \pm 1$  определяются через решение  $\varphi_k(\xi_i)$  равенствами [3]

$$\begin{aligned} \varphi_k(-1) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} \varphi_k(\xi_i) \operatorname{tg} \frac{\pi(2i-1)}{4n}, \\ \varphi_k(1) &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^i \varphi_k(\xi_i) \operatorname{ctg} \frac{\pi(2i-1)}{4n}, \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если решение системы (2), (3) известно, то, используя интегральные представления комплексных потенциалов  $\Phi(z), \Psi(z)$  для полуплоскости с разрезами [3,5] и формулы Колосова — Мусхелишвили, можно определить напряженное состояние в каждой точке рассматриваемой области. Задачи о трещинах характеризуются тем, что компоненты тензора напряжений в окрестности вершины трещины имеют особенность. В полярной системе координат, связанной с вершиной трещины, асимптотическое распределение напряжений в области правого конца криволинейной трещины дается следующими выражениями [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \frac{k_1}{4\sqrt{2r}} \left( 3 \cos \frac{\vartheta}{2} + \cos \frac{3\vartheta}{2} \right) + \frac{k_2}{4\sqrt{2r}} \left( -3 \sin \frac{\vartheta}{2} - 3 \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) + O(\sqrt{r}), \\ \sigma_{rr} &= \frac{k_1}{4\sqrt{2r}} \left( 5 \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{3\vartheta}{2} \right) + \frac{k_2}{4\sqrt{2r}} \left( -5 \sin \frac{\vartheta}{2} + 3 \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) + O(\sqrt{r}), \\ \sigma_{r\vartheta} &= \frac{k_1}{4\sqrt{2r}} \left( \sin \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) + \frac{k_2}{4\sqrt{2r}} \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + 3 \cos \frac{3\vartheta}{2} \right) + O(\sqrt{r}). \end{aligned}$$

Угол  $\vartheta > 0$ , если отсчет идет против часовой стрелки от направления касательной, проведенной в правой вершине трещины. Эти выражения полностью определяются параметрами  $k_1$  и  $k_2$ , которые называются коэффициентами интенсивности напряжений при симметричном и антисимметричном распределении напряжений относительно линии трещины. При развитии трещины в поле симметричных относительно ее нагрузок коэффициент  $k_2 = 0$ , и в силу симметрии трещина будет распространяться в своей плоскости. В общем случае, когда локальная симметрия отсутствует, будем следовать силовому  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ -критерию, предложенному в [2, 6], который успешно использовался при численных обсчетах экспериментов [7, 8]. Согласно этому критерию, направление начального развития трещины будет совпадать с плоскостью, на которой главная часть растягивающих напряжений  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  достигает своего максимального значения. Определяющий это направление угол

$$\vartheta_* = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 + 8k_2^2}}{4k_2}. \quad (5)$$

При  $k_1 \leq 0$  будем считать, что трещина не может расти дальше — берега ее налегают друг на друга. Величина критической нагрузки, определяющей предельное равновесие трещины, находится из условия, что коэффициент при особенности  $(2r)^{-1/2}$  для  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  при  $\vartheta = \vartheta_*$  равняется критическому значению коэффициента интенсивности напряжений  $K_{Ic}/\sqrt{\pi}$ ,

являющегося характеристикой упругохрупкого материала:

$$\frac{1}{4} \cos^3 \left( \frac{\vartheta_*}{2} \right) \left[ k_1 + 3\sqrt{k_1^2 + 8k_2^2} \right] = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi}}. \quad (6)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений для первой трещины по решению системы (2) — (4) определяются формулой [3]

$$k_1 - ik_2 = -\sqrt{|\omega'_1|} \frac{\varphi_1(1)}{\omega'_1(1)},$$

где  $\varphi_1(1)$  дается выражением (4), а коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  находятся только для первой трещины, траектория которой рассчитывается.

Пусть на  $i$ -м шаге развития трещины  $L_1$  ее форма  $\omega_1^{(i)}(\xi)$  известна, тогда, найдя решение системы уравнений (2), (3), по формуле (5) определяем угол  $\vartheta_*$ , указывающий направление дальнейшего распространения трещины. Задавая интервал приращения и описывая новую форму трещины с учетом увеличения ее длины, т. е. вводя новую функцию  $\omega_1^{(i+1)}(\xi)$  ( $|\xi| \leq 1$ ) для этой трещины, получаем исходные данные для расчета следующего шага ее продвижения. При расчетах пологих траекторий, когда  $|\omega'_1(\xi)| < \infty$ , удобно пользоваться алгоритмом, описанным в [3, 4], где на каждом шаге приращения участок траектории аппроксимируется кубической параболой. Коэффициенты многочлена находятся из условий плавности продолжения и отсутствия точек перегиба на участке продвижения. В рассматриваемом случае траектории достаточно «крутые» и, кроме того, нагрузка по длине трещины меняется довольно сильно.

Тестовые расчеты показали, что достаточно высокую точность вычислений при минимальном числе узловых точек  $n$  можно обеспечить, если начало координат локальной системы помещать в центре разреза. Используется следующий алгоритм построения траектории. Считается, что на  $i$ -м шаге форма трещины  $\omega_1^{(i)}(\xi)$  описана в локальной системе координат  $x_1^{(i)}, O_1^{(i)}, y_1^{(i)}$ , в которой концы трещины при  $\xi = \pm 1$  определяются координатами  $(\pm x_{0i}, 0)$ . По найденному решению и заданному приращению  $\delta$  определяется форма удлиненной трещины, которая записывается как  $\omega_1^{(i+1)}(\xi)$  в новой локальной системе координат, ось  $O_1^{(i+1)}, x_1^{(i+1)}$  которой проходит по хорде, соединяющей концы трещины, а точка начала координат делит отрезок хорды пополам. Во всех расчетах начальная зародышевая трещина длиной  $2l_0$  предполагалась прямолинейной и обычно  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = l_0$ .

**Результаты расчетов и их сравнение с экспериментом.** В экспериментах использовались образцы из органического стекла размерами  $100 \times 100 \times 10$  мм. Расклинивание осуществлялось падением клина с высоты 200 мм. Использовались клинья с углами  $2\beta = 30; 45; 60^\circ$ . Угол наклона начальной трещины  $\alpha$  регулировался специальными отфрезерованными подставками под образцы. Удар наносился не в середину стороны квадрата, а на расстоянии 40 мм от его правого края. На клине устанавливался специальный датчик ускорения, что позволяло регистрировать величину осевой силы во времени. Привязка значений силы к соответствующим длинам трещины проводилась при помощи тонких проволочек, которые разрывались при пересечении их трещиной. В экспериментах начальный угол распространения трещины  $\alpha$  определялся с точностью порядка  $5^\circ$ . Кроме того, часто поверхность трещины была неортогональна плоскостям образца, так что формы траекторий на лицевой и тыльной стороне образца несколько отличались друг от друга.

Отметим, что в экспериментах формы траекторий при статическом расклинивании и при ударном, где трещина двигалась со средней скоро-

стью примерно  $200 \div 250$  м/с, при одинаковых начальных углах наклона трещины практически совпадают. Это обстоятельство позволяет надеяться на правомочность применения квазистатических расчетов траекторий развития трещин при ударном расклинивании. В таких расчетах учитывается только изменение локального поля напряжений в окрестности вершины трещины, вызванное ее удлинением и искривлением, и пренебрегается влиянием динамических факторов.

Были проведены расчеты при  $N = 3$ , в которых прямолинейные разрезы  $L_2$  и  $L_3$  моделировали вертикальные границы образца, при этом  $d_1 = 1,5d$  (рис. 1,б) (в экспериментах удар наносился на расстоянии  $d = 40$  мм от правой вершины пластинки). Полученные расчетные траектории отличались по своим параметрам не более чем на 5 % от траекторий при  $N = 2$ , где разрез  $L_2$  моделировал правый прямолинейный вертикальный откос. Приведенные ниже результаты найдены при  $N = 2$ , и функция  $T_2(\xi)$  определялась равенством

$$T_2(\xi) = \omega_2(\xi)e^{-i\pi/2} + z_2^0 = d - il_2(\xi + 1), \quad |\xi| \leq 1, \quad l_2 = 2d.$$

В расчетах единственным свободным параметром является коэффициент трения. В качестве эталонных были выбраны экспериментальные траектории, полученные при расклинивании клином с углом  $2\beta = 45^\circ$ , начальным углом наклона зародышевой трещины  $\alpha = -80^\circ$  и  $\alpha_0 = 10^\circ$ , т. е. предполагалось, что ось клина совпадает с осью зародышевой трещины. Проведены расчеты с различными значениями  $k_t$ ; результаты их с указанными значениями  $2\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_0$  представлены на рис. 2,а, где штриховыми линиями показаны эталонные траектории, а сплошными 1–6 — расчетные траектории при  $k_t = 0,10; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30; 0,40$ . Из рис. 2,а видно, что экспериментальные траектории лежат между расчетными, полученными при  $k_t = 0,3$  и  $0,4$ . В дальнейших расчетах принимается значение  $k_t = 0,3$ , которое не противоречит экспериментально наблюдаемому [9] и позволяет описать все экспериментальные траектории расчетными с точностью порядка 5 %.

Введем отношение  $H/d$ , характеризующее геометрию откалываемого куска ( $d$  — расстояние от устья трещины до вершины откоса,  $H$  — расстояние от вершины откоса до точки выхода трещины на его поверхность). Для примера на рис. 2,б штриховыми и сплошными линиями изображены экспериментальные и расчетные траектории при различных углах клина. Здесь линии 1 соответствуют следующим параметрам:  $2\beta = 30^\circ$ ,  $\alpha = -73^\circ$ ,  $\alpha_0 = 17^\circ$ ,  $H/d = 1,17$ ; 2 —  $2\beta = 45^\circ$ ,  $\alpha = -75^\circ$ ,  $\alpha_0 = 15^\circ$ ,  $H/d = 1,40$ ; 3 —  $2\beta = 60^\circ$ ,  $\alpha = -82^\circ$ ,  $\alpha_0 = 8^\circ$ ,  $H/d = 1,68$ . Приведены экспериментальные величины отношений  $H/d$ .

На рис. 2,в представлена серия расчетных траекторий для углов клина  $2\beta = 10; 20; 30; 45; 60; 80^\circ$  (соответственно линии 1–6). Они получены при одинаковых начальных параметрах  $k_t = 0,3$ ,  $\alpha = -80^\circ$ ,  $\alpha_0 = 10^\circ$ , для сравнения штриховой линией нанесена экспериментальная траектория при  $2\beta = 45^\circ$ . Из рис. 2,а,б следует, что увеличение значений  $k_t$  и  $2\beta$  приводит к возрастанию отношения  $H/d$ . Это объясняется тем обстоятельством, что с увеличением значений  $k_t$  и  $2\beta$  угол между направлением действия сосредоточенных сил и осью клина уменьшается, следовательно, возрастают сжимающие составляющие сосредоточенных сил, направленные вдоль трещины, которые как бы стремятся распрямить ее. Это подтверждает и следующий пример расчета.

На рис. 2,г штриховая линия изображает экспериментальную траекторию при  $2\beta = 45^\circ$ ,  $\alpha = -72^\circ$ ,  $\alpha_0 = 18^\circ$ ,  $H/d = 1,30$ , а сплошные линии — расчетные траектории. Траектория 1 получена при  $k_t = 2\beta = 0$  — бесконечно тонкий клин без трения, сосредоточенные силы направлены

по нормали к оси зародышевой трещины,  $H/d = 0,8$ , траектория 2 — при  $2\beta = 0$ ,  $k_t = 0,3$  — бесконечно тонкий клин с трением, сосредоточенные силы отклонены от нормали к оси зародышевой трещины к вершине клина на угол  $\gamma = \text{arctg } k_t$ ,  $H/d = 0,98$ , траектория 3 — при  $2\beta = 45^\circ$ ,  $k_t = 0$  — клин с углом  $2\beta = 45^\circ$  без трения, сосредоточенные силы отклонены в том же направлении на угол  $\beta$ ,  $H/d = 1,03$ . Заметим, что  $\text{arctg } k_t < \beta$ . Траектория 4 посчитана при  $2\beta = 45^\circ$  и  $k_t = 0,3$ , сосредоточенные силы отклонены от нормали к оси клина (к его вершине) на угол  $\beta + \gamma$ ,  $H/d = 1,28$ . Этот пример расчета еще раз показывает, что для получения адекватных результатов при описании расклинивания необходимо учитывать угол клина и коэффициент трения.

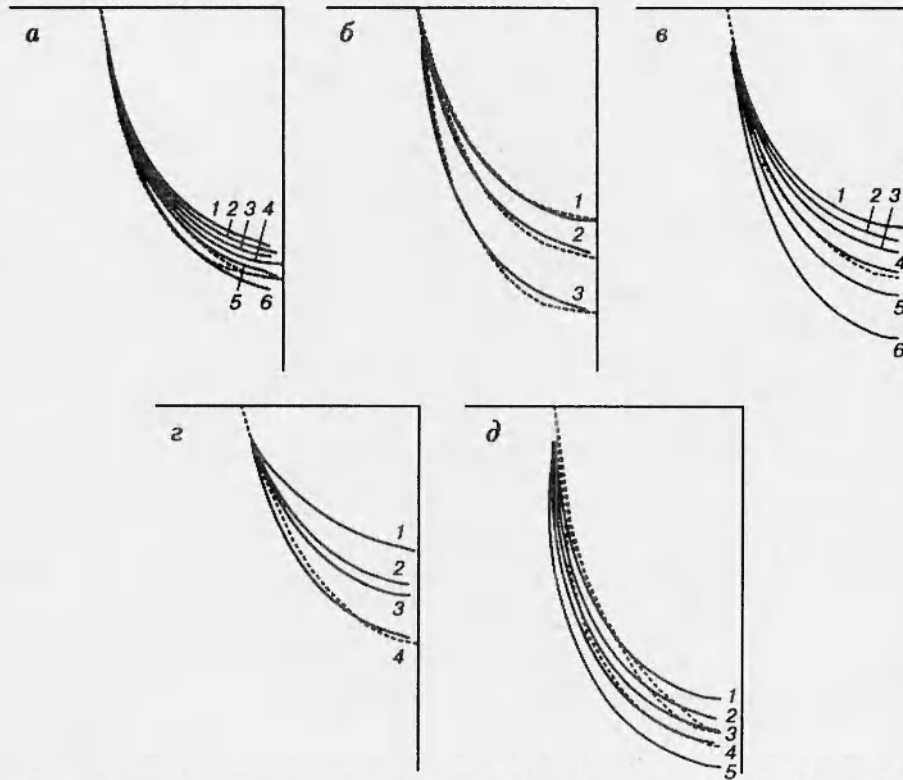


Рис. 2

Как уже отмечалось выше, начальный угол захода трещины  $\alpha$  измерялся в экспериментах с известной точностью, поэтому интересно оценить, как влияет малое изменение угла  $\alpha$  на форму откалываемого куска. С другой стороны, возможна несоосность между направлением воздействия клина и направлением заходной трещины, т. е. нарушение условия  $\alpha_0 = \pi/2 + \alpha$ . Расчеты показали, что эти два фактора оказывают при малых отклонениях одинаковое влияние на форму траектории, т. е. траектории, полученные при  $\alpha_1 = \alpha \pm \delta\alpha$  и при выполнении условия соосности клина и направления зародышевой трещины, и траектории, посчитанные при угле наклона зародышевой трещины  $\alpha$  и  $\alpha_0^1 = \alpha_0 \pm \delta\alpha$ , где нарушено условие соосности на величину  $\pm\delta\alpha$ , практически совпадают. Так, если  $2\beta = 60^\circ$ ,  $\alpha = -77^\circ$ ,  $\alpha_0 = 13^\circ$ , то  $H/d = 1,84$ . При  $\delta\alpha = \pm 3^\circ$  получаем значения  $H/d$ , отличающиеся от исходного примерно на 5 %.

Влияние таких отклонений продемонстрировано на рис. 2, г. Здесь

штриховыми линиями показаны экспериментальные траектории, отвечающие  $2\beta = 45^\circ$ ,  $\alpha = -90^\circ$ ,  $\alpha_0 = 0$ , при этом  $H/d = 1,80 \div 1,88$ . Расчетная траектория 3 соответствует этим начальным данным. Траектории 2, 4 посчитаны с выполненным условием соосности при  $\alpha = -88$  и  $-92^\circ$  соответственно, траектория 1 — при  $\alpha = -90^\circ$ ,  $\alpha_0 = 5^\circ$ , а траектория 5 — при  $\alpha = -85^\circ$ ,  $\alpha_0 = -5^\circ$ . В последнем случае угол между направлением закольной трещины  $\alpha = -85^\circ$  и направлением оси клина составляет  $10^\circ$ . По-видимому, некоторое отличие в экспериментальных траекториях можно объяснить влиянием этих факторов.

По формуле (6) определяем величину  $k_p = K_{Ic}\sqrt{L}/F\sqrt{\pi}$ , описывающую предельное равновесие. Зная ее, можно построить зависимость предельной величины осевой силы  $F_*$ , необходимой для продвижения трещины на каждом шаге, от отношения  $L/d$ , где  $L$  — длина хорды, соединяющей концы растущей трещины. Сила  $F_*$ , которая фиксировалась в эксперименте, определялась равенством

$$F_* = \frac{K_{Ic}}{k_p} \sqrt{\frac{d}{\pi}} \frac{\sqrt{L} 2 \cos \beta [\operatorname{tg} \beta + k_t]}{\sqrt{1 + k_t^2}}$$

Расчеты проводились при  $k_t = 0,3$ ,  $K_{Ic} = 1,02 \cdot 10^6$  Н/м<sup>3/2</sup> — статическое значение для органического стекла.

На рис. 3 представлены такие зависимости для трещины, соответствующей исходным данным  $2\beta = 60^\circ$ ,  $\alpha = -77^\circ$ ,  $\alpha_0 = 13^\circ$ . Верхняя и нижняя кривые отвечают изменению угла наклона  $\alpha$  на  $\pm 3^\circ$ . Экспериментальные значения  $F_*$  определены в интервале изменения отношения  $L/d$  от 0,55 до 1,10. Если в первой точке при  $L/d = 0,55$  сила  $F_*$  в экспериментах принимает значения  $3,16 \div 2,08 \cdot 10^5$  Н/м, то в последующих точках разброс существенно меньше — на рис. 3 он показан вертикальными линиями. Естественно,

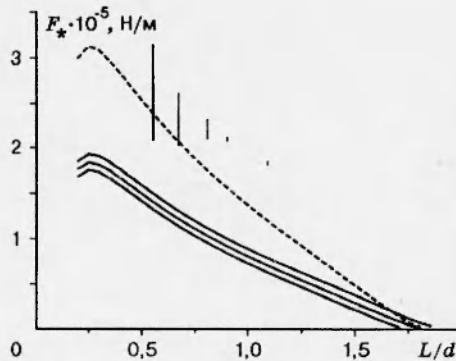


Рис. 3

трудно ожидать в квазистатических расчетах количественного совпадения изменения предельной осевой нагрузки с экспериментальной зависимостью. Можно несколько приблизиться к экспериментальным значениям, учитывая динамику следующим образом. Так как средняя скорость движения трещины на отмеченном интервале порядка 230 м/с, то можно взять в качестве  $K_{Ic}$  его динамическое значение, которое соответствует этой скорости [9] и превосходит статическое в 1,7 раза. Штриховая линия на рис. 3 отвечает такому динамическому значению  $K_{Ic}^d$ .

Отметим, что в расчетах с увеличением угла клина максимальное значение  $F_*$  быстро возрастает. Так, при  $k_t = 0,3$ ,  $\alpha = -80^\circ$ ,  $\alpha_0 = 10^\circ$  угол клина  $2\beta = 10; 30; 60; 80; 90^\circ$  соответствует  $F_* = (0,54; 0,92; 1,93; 3,55; 5,26) \cdot 10^5$  Н/м. Но при  $2\beta = 95 \div 100^\circ$  коэффициент интенсивности напряжений  $k_1$  становится отрицательным, т. е. клинья с большими углами не могут расклинивать образец.

Как показано в работе [10], действие пары сосредоточенных сил  $Y$ , направленных вниз и приложенных к границе свободной полуплоскости в точках, симметричных относительно устья ортогональной к поверхности свободной трещины, эквивалентно действию пары сил  $2Y/\pi$ , направлен-



ных горизонтально и стремящихся сжать трещину. Поэтому при расклинивании полуплоскости эффективные горизонтальные составляющие сосредоточенных сил с увеличением угла клина уменьшаются и становятся равными нулю, когда  $\text{tg}(\beta + \gamma) = \pi/2$ . Таким образом, если  $k_t = 0,3$ , то клинья с углами  $2\beta > 82^\circ$  не могут продвигать трещину. По-видимому, аналогичное объяснение справедливо и для рассматриваемого случая. Заметим, что расчетные траектории, представленные на рис. 2, посчитаны для  $l_0/d = 0,1$ . С уменьшением этого отношения траектории фактически совпадают.

Дополнительно отметим, что при расклинивании острым ножом, когда трещина выходит на вертикальный откос (экспериментальные данные для органического стекла предоставлены А. Ф. Ревуженко),  $H/d = 1,27 \div 1,73$ . Если считать, что  $2\beta = 20^\circ$ ,  $k_t = 0,3$ , то при отклонении начальной трещины от вертикали на  $\pm 5^\circ$  расчетная величина  $H/d = 1,40 \div 1,73$ , в то время как при  $2\beta = k_t = 0$  отношение  $H/d$  меняется в интервале  $1,11 \div 1,43$ .

**Траектории выхода трещин на свободную плоскость при расклинивании.** Выше исследовался вариант, когда трещины выходят на свободный вертикальный откос. Оценим, насколько существенно присутствие свободной границы вертикального откоса. С этой целью рассмотрим предельный случай, когда  $d \rightarrow \infty$ , т. е.  $N = 1$  и имеем просто свободную полуплоскость, с границы которой начинает развиваться трещина. Здесь, как и раньше, предполагаем, что в первоначальный момент зародышевая трещина длиной  $2l_0$  прямолинейная, при этом

$$T_1^{(1)}(\xi) = \omega_1^{(1)}(\xi)e^{i\alpha} + z_1^0 = l_0(1 + \xi)e^{i\alpha}, \quad |\xi| \leq 1.$$

Проследим, как влияют основные параметры расклинивания ( $2\beta$ ,  $k_t$ ,  $\alpha$ ) на форму траектории.

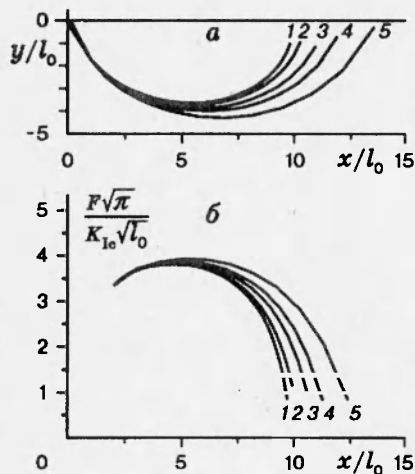


Рис. 4

Если для «пологих» траекторий выхода трещин гидроразрыва на свободную поверхность [1] при изменении шага приращения  $\delta$  в широких пределах форма траекторий оставалась практически неизменной, то в настоящем случае для «крутых» траекторий она существенно зависит от выбора шага приращения  $\bar{\delta} = \delta/l_0$ . На рис. 4, а линиями 1–5 приведены расчетные траектории при  $\bar{\delta} = 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 1,0$ , соответствующие исходным параметрам  $2\beta = 10^\circ$ ,  $k_t = 0,3$ ,  $\alpha = -60^\circ$ ,  $\alpha_0 = 30^\circ$ . Видно, что при  $\bar{\delta} \rightarrow 0$  траектории сходятся к предельной и характерные размеры траекторий изменяются линейно относительно  $\bar{\delta}$ . Основные параметры предельной траектории меньше расчетных при  $\bar{\delta} = 0,1$  менее чем на 5%. Как меняется при этом безразмерная величина предельной силы  $\bar{F} = \sqrt{\pi} F / K_{Ic} \sqrt{l_0}$  в зависимости от  $L/l_0$ , показано на рис. 4, б линиями 1–5. Здесь имеется небольшой начальный участок устойчивого развития трещины. Максимальные значения  $\bar{F}$  слабо зависят от выбора  $\bar{\delta}$ : так, при  $\bar{\delta} \rightarrow 0$   $\bar{F} = 3,79$ , а при  $\bar{\delta} = 1,0$   $\bar{F} = 3,94$ . Возникшая ситуация — сильная зависимость формы траектории выхода наклонной трещины на свободную поверхность от величины шага приращения — обусловлена геометрией задачи, а не выбором вида нагружения, заставляющего двигаться трещину.

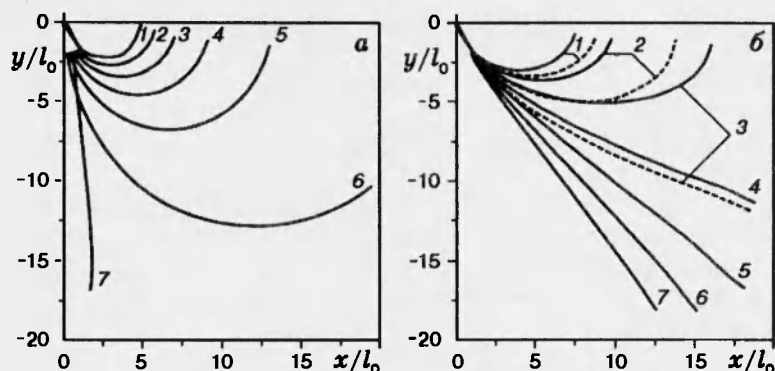


Рис. 5

Дополнительные расчеты показали, что такая зависимость от  $\delta$  имеет место и для трещин гидроразрыва.

На рис. 5,а представлены расчетные траектории выхода наклонных трещин на свободную поверхность под воздействием пары сосредоточенных сил, направленных ортогонально зародышевой щели, при минимальном значении  $\delta = 0,1$ . Линии 1–6 соответствуют углам наклона начальной трещины  $\alpha = -60^\circ; -65^\circ; -70^\circ; -75^\circ; -80^\circ; -85^\circ$ . В этих расчетах предполагалось, что  $2\beta = k_t = 0$ , линия 7 — траектория, для которой  $\alpha = -75^\circ$ ,  $\alpha_0 = 0$ . При таком выборе сосредоточенные силы прилагались в точках  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = -1 - i$ , и направление их было параллельно свободной поверхности. Этот вариант еще раз показывает стабилизирующее влияние направления действия сосредоточенных сил.

Отметим, что соответствующие траектории трещин гидроразрыва очень близки к траекториям 1–6. Кроме того, при  $2\beta = k_t = 0$  и  $\alpha_0 = \alpha + \pi/2$  все наклонные трещины выходят на свободную поверхность. При  $\alpha = -60^\circ$  зависимость  $F$  от  $L/l_0$  не имеет максимума, т. е. для дальнейшего продвижения трещины достаточны значения сил, которые меньше отвечающих началу движения. Для углов  $\alpha < -60^\circ$  появляются начальные участки устойчивого роста трещины — для ее дальнейшего роста требуются большие значения  $F$ . С приближением  $\alpha$  к  $-\pi/2$  максимальные значения  $\bar{F}$  возрастают и увеличиваются размеры интервалов устойчивого развития трещины.

На рис. 5,б для  $\alpha = -60^\circ$ ,  $\alpha_0 = 30^\circ$  и определенного выше коэффициента трения  $k_t = 0,3$  сплошными линиями 1–7 представлена серия расчетных траекторий, иллюстрирующая изменение их формы в зависимости от угла клина  $2\beta = 0; 10; 20; 30; 40; 50; 60^\circ$ . Для сравнения штриховыми линиями 1–3 показаны траектории, соответствующие углу клина  $2\beta = 40^\circ$  при  $k_t = 0; 0,1; 0,2$ . Как отмечено выше, с увеличением значений  $k_t$  и  $2\beta$  происходит как бы распрямление траекторий трещин. Из рис. 5,б следует, что при  $k_t = 0,3$  даже для начальной трещины с углом наклона  $\alpha = -60^\circ$  лишь клинья с малыми углами  $2\beta$  выкалывают кусок, а с увеличением угла клина трещины стремятся распространяться прямолинейно. Последнее существенно отличает эти траектории от траекторий выхода трещин на свободный вертикальный откос (рис. 2,а–д), а также от траекторий, представленных на рис. 5,а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Т. Е., Мартынюк П. А. Траектории выхода трещин на свобод-

- ную поверхность // Физ.-техн. пробл. разработки полезн. ископаемых. 1990. № 2. С. 15–25.
2. **Панасюк В. В.** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968.
  3. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981.
  4. **Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.** Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев: Наук. думка, 1989.
  5. **Мартынюк П. А.** Траектории распространения трещин вблизи свободных плоскостей и границы кругового отверстия. Новосибирск, 1989. Деп. в ВИНТИ 28.04.89, № 2843–В89.
  6. **Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т.** Определение предельных усилий при растяжении пластины с дугообразной трещиной // Вопросы механики реального твердого тела. 1964. № 3.
  7. **Ярема С. Я., Иваницкая Г. Е., Майстренко А. Л., Зборомирский А. И.** Развитие трещины в твердом сплаве при комбинированной деформации I и II видов // Пробл. прочности. 1984. № 8. С. 51–56.
  8. **Панасюк В. В., Зборомирский А. И., Иваницкая Г. Е., Ярема С. Я.** Применимость  $\sigma_c$ -критерия для прогноза криволинейной траектории трещины // Пробл. прочности. 1986. № 9. С. 3–7.
  9. **Ефимов В. П.** Динамическая калибровка измерения трещиностойкости хрупких материалов методом расклинивания // Физ.-техн. пробл. разработки полезн. ископаемых. 1990. № 4. С. 89–92.
  10. **Ефимов В. П., Мартынюк П. А., Шер Е. Н.** Учет влияния вертикальных сил при расклинивании // Физ.-техн. пробл. разработки полезн. ископаемых. 1992. № 3. С. 32–36.

*Поступила в редакцию 27/XII 1994 г.*

---