

УДК 532.59+539.3:534.1

## ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ НАГРУЗКИ ПО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ВДОЛЬ КРОМКИ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Методом Винера — Хопфа решена задача о волнах в жидкости и ледяном покрове, возникающих под действием области давления, движущейся по свободной поверхности жидкости вдоль кромки полубесконечного ледяного покрова. Нагрузкой, приложенной в некоторой области, моделируется судно на воздушной подушке, ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной постоянной толщины на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. В движущейся системе координат прогиб пластины и возвышение жидкости полагаются установившимися. Исследованы волновые силы, возвышение свободной поверхности жидкости, прогиб и деформации пластины при различных скоростях движения нагрузки. Обнаружено, что при околоскритических скоростях движения нагрузки ледяной покров оказывает существенное влияние на волновые силы (волновое сопротивление и боковую силу), действующие на движущееся по свободной поверхности тело, причем это влияние является наиболее сильным при малых расстояниях от кромки. Показано, что при некоторых значениях скорости движения, толщины льда и давления нагрузки возможно разрушение ледяного покрова вблизи кромки.

**Ключевые слова:** поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, плавающая упругая пластина, дисперсионные соотношения, критическая скорость, волновые силы, деформации, преобразование Фурье, метод Винера — Хопфа.

DOI: 10.15372/PMTF20190308

**Введение.** Изучение волновых явлений в морях и океанах с ледяным покровом представляет не только теоретический, но и практический интерес при оценке его влияния на волновые характеристики, а также на стационарные и движущиеся объекты.

Настоящая работа является продолжением работы [1], в которой методом Винера — Хопфа получено решение задачи о равномерном движении области давления по полубесконечной ледяной пластине вдоль ее кромки. В [2] решение той же задачи получено методом сращивания разложений по собственным функциям. Обзор выполненных ранее исследований приведен в работах [1, 2]. Силы волнового сопротивления, действующие при движении области с распределенным давлением по бесконечной свободной поверхности жидкости, исследовались в работах [3–7]. В [7] показано, что нереально большие значения волнового сопротивления при малых значениях числа Фруда уменьшаются при использовании сглаженных значений распределенного давления.

В данной работе постановка задачи аналогична постановке задачи в [1, 2], но нагрузка движется по свободной поверхности жидкости вблизи полубесконечного покрова. Также принят другой закон распределения давления, используется сглаженное распределение по продольной координате, предложенное в [7], что позволяет существенно облегчить вычисления. При решении использован метод Винера — Хопфа.

**1. Постановка задачи.** Ледяной покров моделируется упругой полубесконечной пластиной постоянной толщины  $h$ , плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины  $H$ . Модуль Юнга  $E$  полагается постоянным по толщине пластины [8]. Рассматривается движение пластины и жидкости под действием давления, приложенного в локальной области, движущейся с постоянной скоростью по свободной поверхности жидкости. Задача решается в линейной постановке. Введем декартову систему координат  $Oxyz$  с центром  $O$  на кромке пластины, осью  $Ox$ , перпендикулярной кромке, осью  $Oy$ , направленной вдоль кромки, и осью  $Oz$ , направленной вертикально вверх. Предполагается, что полубесконечный ледяной покров расположен на верхней границе жидкости ( $x < 0$ ), свободная поверхность занимает область  $x > 0$ , давление внешней нагрузки равно [7]

$$q(x, y) = \frac{q_0}{2} \begin{cases} \operatorname{th}(\kappa(y+b)) - \operatorname{th}(\kappa(y-b)), & |x-x_0| < a, \\ 0, & |x-x_0| > a. \end{cases}$$

Здесь  $\kappa$  — параметр сглаживания;  $2a, 2b$  — ширина и длина области, в которой приложена нагрузка;  $x_0$  — расстояние от центра области до кромки ледяного покрова;  $0 < a < x_0$ ;  $q_0 = gM/(4ab)$ ;  $M$  — масса движущегося тела;  $g$  — ускорение свободного падения. Область давления движется со скоростью  $V$  в положительном направлении оси  $Oy$ . Осадка пластины в воду не учитывается, граничные условия на верхней границе жидкости сносятся на плоскость  $z = 0$ .

Переходя в систему координат, движущуюся вместе с областью давления, и вводя безразмерные переменные, параметры и функции

$$(x', y', z', x'_0, a', b') = \frac{(x, y, z, x_0, a, b)}{H}, \quad \beta = \frac{D}{\rho g H^4}, \quad F = \frac{V}{\sqrt{gH}}, \quad \sigma = \frac{\rho_0 h}{\rho H},$$

$$q'_0 = \frac{q_0}{\rho g H}, \quad \kappa' = H\kappa, \quad \phi(x, y, z) = \frac{\varphi}{VH}, \quad W(x, y) = \frac{w}{H}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0 \quad (z < 0), \\ \phi_z &= 0 \quad (z = -1), \quad \phi_z = -W_y \quad (z = 0), \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} + F^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial q}{\partial y} \quad (z = 0, \quad x > 0), \\ \left( \beta \Delta_2^2 + 1 + \sigma F^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + F^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 0 \quad (z = 0, \quad x < 0), \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_z &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_z = 0 \quad (x = -0, \quad z = 0). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $\varphi$  — потенциал скорости течения жидкости;  $w(x, y)$  — вертикальное смещение пластины или возвышение свободной поверхности;  $\rho_0, \rho$  — плотности льда и жидкости;  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\Delta_2$  — оператор Лапласа по горизонтальным координатам; штрихи у безразмерных величин опущены. На бесконечности ставится условие затухания возмущений.

Согласно линейной теории упругости деформации пластины изменяются по толщине по линейному закону. Тензор максимальных деформаций имеет вид

$$e(x, y) = -\frac{h}{2} \begin{pmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{xy} & w_{yy} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Главные значения деформаций определяются как собственные значения матрицы (1.2). В линейной теории упругости напряжения и деформации связаны линейной зависимостью. Необходимо, чтобы деформации и напряжения не превышали предельных значений, при которых начинаются пластические деформации и разрушение. Экспериментально полученные в работе [9] критические значения максимальных деформаций для льда составляют  $4,4 \cdot 10^{-5} \div 8,5 \cdot 10^{-5}$ . В работе [10] использовалось критическое значение максимальных деформаций  $e_* = 8 \cdot 10^{-5}$ . В данной работе также используется это значение.

**2. Решение задачи.** Вводя преобразование Фурье по переменным  $x$  и  $y$ :

$$\Phi(\alpha, s, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} dy \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y, z) e^{i\alpha x} dx,$$

из уравнения Лапласа и условия непротекания на дне получаем

$$\Phi(\alpha, s, z) = C(\alpha, s)Z(\alpha, s, z), \quad Z(\alpha, s, z) = \text{ch}((z+1)\sqrt{\alpha^2 + s^2}) / \text{ch}(\sqrt{\alpha^2 + s^2}), \quad (2.1)$$

где  $C(\alpha, s)$  — неизвестная функция.

Применяя метод Винера — Хопфа [11] и вводя функции  $D_{\pm}$ ,  $G_{\pm}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} D_-(\alpha, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} dy \int_{-\infty}^0 (\phi_z + F^2 \phi_{yy}) e^{i\alpha x} dx, \\ D_+(\alpha, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} dy \int_0^{\infty} (\phi_z + F^2 \phi_{yy}) e^{i\alpha x} dx, \\ G_-(\alpha, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} dy \int_{-\infty}^0 \left[ \left( \beta \Delta_2^2 + 1 + \sigma F^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_z + F^2 \phi_{yy} \right] e^{i\alpha x} dx, \\ G_+(\alpha, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} dy \int_0^{\infty} \left[ \left( \beta \Delta_2^2 + 1 + \sigma F^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_z + F^2 \phi_{yy} \right] e^{i\alpha x} dx, \end{aligned}$$

из уравнений (1.1) получаем

$$G_-(\alpha, s) = 0, \quad D_+(\alpha, s) = isQ(\alpha, s); \quad (2.2)$$

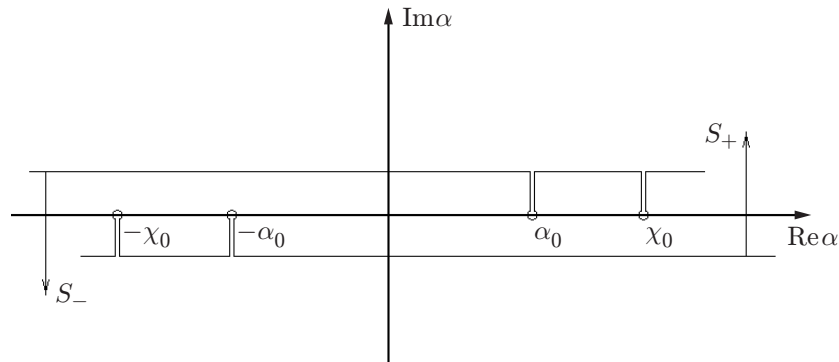
$$Q(\alpha, s) = \int_{x_0-a}^{x_0+a} dx \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) e^{i(\alpha x - sy)} dy = \frac{2q_0 e^{i\alpha x_0} \sin(\alpha a) \pi \sin(sb)}{\alpha \kappa \text{sh}(\pi s / (2\kappa))}$$

и из представления (2.1) находим

$$D(\alpha, s) = D_- + D_+ = C(\alpha, s)K_1(\alpha, s), \quad G(\alpha, s) = G_- + G_+ = C(\alpha, s)K_2(\alpha, s), \quad (2.3)$$

где  $K_1(\alpha, s)$ ,  $K_2(\alpha, s)$  — дисперсионные функции для жидкости со свободной поверхностью и жидкости, находящейся под упругой пластиной:

$$\begin{aligned} K_1(\alpha, s) &= \sqrt{\alpha^2 + s^2} \text{th}(\sqrt{\alpha^2 + s^2}) - F^2 s^2, \\ K_2(\alpha, s) &= [\beta(\alpha^2 + s^2)^2 + 1 - \sigma F^2 s^2] \sqrt{\alpha^2 + s^2} \text{th}(\sqrt{\alpha^2 + s^2}) - F^2 s^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рис. 1. Области  $S_+$  и  $S_-$  аналитичности функций

Известно, что дисперсионное соотношение для гравитационных волн

$$K_1(\gamma) \equiv \gamma \operatorname{th} \gamma - F^2 s^2 = 0$$

при фиксированном значении  $s$  имеет два действительных корня  $\pm\gamma_0(s)$  и счетное множество мнимых корней  $\pm\gamma_m(s)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Дисперсионное соотношение для изгибно-гравитационных волн под упругой пластиной

$$K_2(\mu) \equiv (\beta\mu^4 + 1 - \sigma F^2 s^2)\mu \operatorname{th} \mu - F^2 s^2 = 0$$

имеет два действительных корня  $\pm\mu_0(s)$ , четыре комплексных корня, которые обозначим  $\pm\mu_{-1}(s)$ ,  $\pm\mu_{-2}(s)$ ,  $\mu_{-2} = -\bar{\mu}_{-1}$  (черта означает комплексное сопряжение), и счетное множество чисто мнимых корней  $\pm\mu_m(s)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Тогда корни дисперсионных соотношений (2.4) соответственно равны  $\pm\chi_m$ ,  $\pm\alpha_m$ :

$$\chi_m(s) = \sqrt{\gamma_m^2(s) - s^2}, \quad \alpha_m(s) = \sqrt{\mu_m^2(s) - s^2}.$$

В последних выражениях значения комплексных корней выбираются в верхней полуплоскости. Если  $|s| < \gamma_0(s)$ , то  $\chi_0(s)$  — вещественный корень, в противном случае все корни чисто мнимые. Если  $|s| < \mu_0(s)$ , то  $\alpha_0(s)$  — вещественный корень, в противном случае все корни комплексные.

Будем рассматривать следующие области аналитичности функций в комплексной плоскости  $\alpha$ :  $S_+ = \{\alpha: \operatorname{Im} \alpha > -\lambda_0\}$ , за исключением возможных вещественных полюсов  $-\alpha_0$ ,  $-\chi_0$ , и  $S_- = \{\alpha: \operatorname{Im} \alpha < \lambda_0\}$ , за исключением возможных вещественных полюсов  $\alpha_0$ ,  $\chi_0$  (рис. 1). Здесь  $\lambda_0$  — минимальное значение мнимой части невещественных корней  $\alpha_m$ ,  $\chi_m$ ; функции с индексами “+” и “-” аналитичны по  $\alpha$  в областях  $S_+$  и  $S_-$  соответственно.

Исключая из соотношений (2.2), (2.3)  $C(\alpha, s)$ , выводим уравнение

$$D_-(\alpha, s) + isQ(\alpha, s) = G_+(\alpha, s)K(\alpha, s), \quad K(\alpha, s) = K_1(\alpha, s)/K_2(\alpha, s). \quad (2.5)$$

В соответствии с методом Винера — Хопфа факторизуем функцию  $K(\alpha, s)$ :

$$K(\alpha, s) = K_-(\alpha, s)K_+(\alpha, s).$$

Функции  $K_-$  и  $K_+$  аналитичны по  $\alpha$  соответственно в нижней и верхней полуплоскостях и определяются формулами

$$K_{\pm}(\alpha, s) = \frac{\mu_{-1}\mu_{-2}}{(\alpha \pm \alpha_{-1})(\alpha \pm \alpha_{-2})} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha \pm \chi_j)\mu_j}{(\alpha \pm \alpha_j)\gamma_j}.$$

При  $|\alpha| \rightarrow \infty$  имеем  $K_{\pm}(\alpha, s) = O(|\alpha|^{-2})$ .

Разделив левую и правую части уравнения (2.5) на  $K_-(\alpha, s)$ , получаем

$$\frac{D_-(\alpha, s)}{K_-(\alpha, s)} + is \frac{Q(\alpha, s)}{K_-(\alpha, s)} = G_+(\alpha, s)K_+(\alpha, s). \quad (2.6)$$

Правая часть уравнения (2.6) аналитична по  $\alpha$  в верхней полуплоскости, первый член в левой части аналитичен в нижней полуплоскости, а второй член представляет собой дробь, в числителе которой содержится функция  $Q(\alpha, s)$ , аналитическая в верхней полуплоскости, а в знаменателе — функция  $K_-(\alpha, s)$ , аналитическая по  $\alpha$  в нижней полуплоскости. Эту дробь необходимо представить в виде суммы двух функций, одна из которых аналитична в верхней полуплоскости, а другая — в нижней полуплоскости. В данной работе, в отличие от работы [1], функция  $(K_-(\alpha, s))^{-1} = O(\alpha^2)$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Поэтому введем функции  $N_{\pm}(\alpha, s)$  следующим образом:

$$N_{\pm}(\alpha, s) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha \pm \chi_j)\mu_j}{(\alpha \pm \alpha_j)\gamma_j}, \quad N_{\pm}(\alpha, s) = K_{\pm}(\alpha, s) \frac{(\alpha \pm \alpha_{-1})(\alpha \pm \alpha_{-2})}{\mu_{-1}\mu_{-2}},$$

$$N_{\pm}(\alpha, s) = O(1) \quad \text{при} \quad |\alpha| \rightarrow \infty.$$

Представим второй член в левой части уравнения (2.6) в виде

$$is \frac{Q(\alpha, s)}{K_-(\alpha, s)} = q_1(s)P_2(\alpha) \frac{\psi(\alpha)}{N_-(\alpha, s)}, \quad q_1(s) = \frac{\pi q_0 s \sin(sb)}{\varkappa \operatorname{sh}(\pi s/(2\varkappa))},$$

$$P_2(\alpha) = \frac{(\alpha - \alpha_{-1})(\alpha - \alpha_{-2})}{\mu_{-1}\mu_{-2}}, \quad \psi(\alpha) = \frac{e^{i\alpha(x_0+a)} - e^{i\alpha(x_0-a)}}{\alpha}.$$

С использованием представления [11]

$$\frac{\psi(\alpha)}{N_-(\alpha, s)} = L_-(\alpha, s) + L_+(\alpha, s), \quad L_{\pm}(\alpha, s) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\lambda}^{\infty \mp i\lambda} \frac{\psi(\zeta)}{N_-(\zeta, s)(\zeta - \alpha)} d\zeta,$$

где функции  $L_{\pm}$  аналитичны по  $\alpha$  соответственно в верхней и нижней полуплоскостях;  $\lambda < \lambda_0$ , получаем уравнение

$$D_-(\alpha, s)/K_-(\alpha, s) + q_1(s)P_2(\alpha)L_-(\alpha, s) = G_+(\alpha, s)K_+(\alpha, s) - q_1(s)P_2(\alpha)L_+(\alpha, s),$$

в левой части которого содержится функция, аналитическая в нижней полуплоскости, а в правой части — функция, аналитическая в верхней полуплоскости. Следовательно, эти функции представляют аналитическую функцию во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля данная функция является полиномом, степень которого определяется поведением функции на бесконечности по  $\alpha$ . Имеем  $L_{\pm}(\alpha, s) = O(|\alpha|^{-1})$  при  $|\alpha| \rightarrow \infty$ . Вблизи кромки пластины градиент потенциала имеет интегрируемую особенность  $O(r^{-\varepsilon})$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ;  $r$  — расстояние до кромки пластины). Тогда при  $|\alpha| \rightarrow \infty$   $G_+(\alpha, s) = O(|\alpha|^{\varepsilon+3})$ ,  $D_-(\alpha, s) = O(|\alpha|^{\varepsilon-1})$  [12]. Следовательно, степень полинома равна единице и

$$G_+(\alpha, s)K_+(\alpha, s) - q_1(s)P_2(\alpha)L_+(\alpha, s) = q_1(s)(a_1(s) + a_2(s)\alpha),$$

где  $a_1(s)$ ,  $a_2(s)$  — неизвестные функции, которые определяются из условий на кромке пластины.

В результате получаем

$$\Phi(x, s, z) = \frac{q_1(s)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} Z(\alpha, s, z)}{K_+(\alpha, s)K_2(\alpha, s)} [a_1 + a_2\alpha + P_2(\alpha)L_+(\alpha, s)] d\alpha,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, s, 0) = \frac{q_1(s)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} \sqrt{\alpha^2 + s^2} \operatorname{th}(\sqrt{\alpha^2 + s^2})}{K_+(\alpha, s)K_2(\alpha, s)} [a_1 + a_2\alpha + P_2(\alpha)L_+(\alpha, s)] d\alpha.$$

Все интегралы по  $\alpha$  вычисляем с помощью теории вычетов. При  $x < 0$  находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, s, 0) = iq_1(s) \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_j x} \mu_j \operatorname{th} \mu_j}{K_+(\alpha_j, s)K_2'(\alpha_j, s)} [a_1(s) + a_2(s)\alpha_j + P_2(\alpha_j)L_+(\alpha_j, s)],$$

$$L_-(\alpha, s) = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(\chi_m)}{N_-'(\chi_m, s)(\chi_m - \alpha)}, \quad L_+(\alpha, s) = \frac{\psi(\alpha)}{N_-(\alpha, s)} - L_-(\alpha, s),$$

$$N_-'(\chi_m, s) = \frac{\chi_m K_1'(\gamma_m) P_2(\chi_m)}{\gamma_m K_2(\chi_m, s) K_+(\chi_m, s)},$$

где штрих означает производную по первой переменной.

Из краевых условий на кромке пластины получаем систему уравнений для определения функций  $a_1(s)$ ,  $a_2(s)$

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + \nu s^2) \mu_j \operatorname{th} \mu_j}{K_+(\alpha_j, s)K_2'(\alpha_j, s)} [a_1 + a_2\alpha_j + P_2(\alpha_j)L_+(\alpha_j, s)] = 0,$$

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j(\alpha_j^2 + (2 - \nu)s^2) \mu_j \operatorname{th} \mu_j}{K_+(\alpha_j, s)K_2'(\alpha_j, s)} [a_1 + a_2\alpha_j + P_2(\alpha_j)L_+(\alpha_j, s)] = 0.$$

Ряды по  $j$  можно вычислить точно. Выполним подстановку

$$\mu_j \operatorname{th} \mu_j = - \frac{K_1(\alpha_j, s)}{\beta(\alpha_j^2 + s^2)^2 - \sigma F^2 s^2} \quad (2.7)$$

и преобразуем полученные соотношения, выражая их через вычеты в корнях многочлена в знаменателе формулы (2.7)

$$\eta_k = \pm(\pm\sqrt{\delta/\beta} - s^2)^{1/2}, \quad \delta = \sigma F^2 s^2.$$

Учитывая, что  $K_+(-\eta_k, s) = K_-(\eta_k, s) = 1/K_+(\eta_k, s)$ , так как  $K(\eta_k, s) = 1$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений второго порядка

$$\sum_{j=1}^2 A_{ij} a_j = B_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.8)$$

где коэффициенты матрицы и правые части имеют вид

$$A_{11} = \frac{1}{4\beta} \sum_{k=1}^2 \frac{\eta_k^2 + \nu s^2}{\eta_k(\eta_k^2 + s^2)} \left( K_+(\eta_k, s) - \frac{1}{K_+(\eta_k, s)} \right),$$

$$A_{12} = -\frac{1}{4\beta} \sum_{k=1}^2 \frac{\eta_k^2 + \nu s^2}{\eta_k^2 + s^2} \left( K_+(\eta_k, s) + \frac{1}{K_+(\eta_k, s)} \right),$$

$$A_{21} = \frac{1}{4\beta} \sum_{k=1}^2 \frac{\eta_k^2 + (2 - \nu)s^2}{\eta_k^2 + s^2} \left( K_+(\eta_k, s) + \frac{1}{K_+(\eta_k, s)} \right),$$

$$\begin{aligned}
A_{22} &= -\frac{1}{4\beta} \sum_{k=1}^2 \frac{\eta_k(\eta_k^2 + (2-\nu)s^2)}{\eta_k^2 + s^2} \left( K_+(\eta_k, s) - \frac{1}{K_+(\eta_k, s)} \right), \\
B_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(\chi_m)}{N'_-(\chi_m, s)} \sum_{k=1}^2 \frac{\eta_k^2 + \nu s^2}{\eta_k(\eta_k^2 + s^2)} \left( \frac{P_2(\eta_k)}{K_+(\eta_k, s)(\chi_m - \eta_k)} - \frac{K_+(\eta_k, s)P_2(-\eta_k)}{\eta_k + \chi_m} \right), \\
B_2 &= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(\chi_m)}{N'_-(\chi_m, s)} \sum_{k=1}^2 \frac{\eta_k^2 + (2-\nu)s^2}{\eta_k^2 + s^2} \left( \frac{P_2(\eta_k)}{K_+(\eta_k, s)(\chi_m - \eta_k)} + \frac{K_+(\eta_k, s)P_2(-\eta_k)}{\chi_m + \eta_k} \right).
\end{aligned}$$

В этих выражениях ряды сходятся по экспоненциальному закону. При  $s = (\delta/\beta)^{1/4}$  коэффициенты  $A_{11}$  и  $B_1$  имеют корневую особенность,  $\eta_1 = 0$ . Поэтому первое уравнение в системе (2.8) умножим на  $\eta_1$ .

Анализ дисперсионных соотношений показывает, что при любых скоростях движения нагрузки существует значение  $s_0$ , такое что  $\gamma_0(s_0) = s_0$ ,  $\gamma_0(s) < |s|$  при  $|s| < s_0$  и  $\gamma_0(s) > |s|$  при  $|s| > s_0$ . При  $V \geq \sqrt{gH}$   $s_0 = 0$ . Таким образом, при  $s > s_0$  корень  $\chi_0(s)$  вещественный, следовательно, в жидкости распространяются волны. Если скорость движения нагрузки меньше минимальной фазовой скорости изгибно-гравитационных волн  $c_m$ , то  $\mu_0(s) < |s|$  для любых значений  $s$ . Если  $c_m < V < \sqrt{gH}$ , то существуют два значения  $s_1$  и  $s_2$ , такие что  $\mu_0(s_n) = s_n$ ,  $n = 1, 2$ ,  $\mu_0(s) > |s|$  при  $s_1 < |s| < s_2$ . При  $V > \sqrt{gH}$   $s_1 = 0$ , т. е.  $\mu_0(s) > |s|$  при  $|s| < s_2$  и  $\mu_0(s) < |s|$  при  $|s| > s_2$ . Для пластины корень  $\alpha_0$  является вещественным только при сверхкритических скоростях при  $s_1 < s < s_2$ .

После решения системы (2.8) находим прогиб пластины и возвышение свободной поверхности. При  $x < 0$

$$\begin{aligned}
W(x, y) &= -\frac{q_0}{2\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isy} \sin(sb)}{\operatorname{sh}(\pi s/(2\kappa))} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_j x} \mu_j \operatorname{th} \mu_j}{K_+(\alpha_j, s) K'_2(\alpha_j, s)} \times \\
&\quad \times \left( a_1 + a_2 \alpha_j + P_2(\alpha_j) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(\chi_m)}{N'_-(\chi_m, s)(\chi_m - \alpha_j)} \right) ds,
\end{aligned}$$

при  $x > 0$

$$\begin{aligned}
W(x, y) &= -\frac{q_0 F^2}{2\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isy} s^2 \sin(sb)}{\operatorname{sh}(\pi s/(2\kappa))} \left[ \Lambda(x, s) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{i\chi_j x} K_+(\chi_j, s)}{K'_1(\chi_j, s)} \left( a_1 - a_2 \chi_j + P_2(-\chi_j) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(\chi_m)}{N'_-(\chi_m, s)(\chi_m + \chi_j)} \right) \right] ds, \quad (2.9)
\end{aligned}$$

$$\Lambda(x, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\chi_j K'_1(\chi_j, s)} \begin{cases} e^{i\chi_j(x_0-x+a)} - e^{i\chi_j(x_0-x-a)}, & 0 < x < x_0 - a, \\ e^{i\chi_j(x_0-x+a)} + e^{i\chi_j(x-x_0+a)} - 2, & |x - x_0| < a, \\ e^{i\chi_j(x-x_0+a)} - e^{i\chi_j(x-x_0-a)}, & x > x_0 + a. \end{cases}$$

В формуле (2.9) первое слагаемое  $\Lambda(x, s)$  представляет собой возвышение бесконечной свободной поверхности жидкости при движении области давления, а второе учитывает влияние кромки и взаимодействие с изгибно-гравитационными волнами. При обращении преобразования Фурье подынтегральные функции экспоненциально затухают при  $s \rightarrow \infty$ .

Так как  $\chi_0 = \sqrt{\gamma_0^2(s) - s^2}$ , то  $\chi_0(s) = 0$  при  $\gamma_0(s) = s$  и выражение (2.9) содержит корневую интегрируемую особенность при  $s = s_0$ . Путем замены переменной интегрирования

подынтегральную функцию можно сделать регулярной. Замена переменной проводится следующим образом. Область интегрирования делится на два участка:

$$1) 0 < s < s_0: s = s_0 \sin \zeta, 0 < \zeta < \pi/2;$$

$$2) s > s_0: s = s_0 \operatorname{ch} \zeta, 0 < \zeta < \infty.$$

Действующие на движущееся тело боковая сила  $R_x$  и сила волнового сопротивления  $R_y$ , а также их безразмерные коэффициенты  $A_x, A_y$  вычисляются по формулам

$$(R_x, R_y) = - \int_S q(x, y)(w_x, w_y) dx dy, \quad (A_x, A_y) = - \frac{g\rho}{2aq_0^2} (R_x, R_y).$$

**3. Результаты численных расчетов.** Выполнены численные расчеты для полубесконечного ледяного покрова при следующих входных параметрах:  $E = 5$  ГПа,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_0 = 900$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 1/3$ ,  $q_0 = 1000$  Н/м<sup>2</sup>,  $a = 10$  м,  $b = 20$  м,  $H = 100$  м,  $\kappa = 5/b$ . Расстояние от центра области нагрузки до кромки ледяного покрова принималось равным  $x_0 = 30, 50$  м. Скорость движения нагрузки менялась в диапазоне от 10 до 30 м/с. Толщина пластины составляла 0,5; 1,0; 2,0 м, при этом значения критической скорости изгибно-гравитационных волн равны  $c_m = 12,062; 15,585; 20,086$  м/с соответственно.

Проведенные расчеты показали, что максимальные вертикальные смещения жидкости достигаются за областью нагрузки на некотором расстоянии от нее. Амплитуды прогиба пластины максимальны на кромке и затухают по мере удаления от нее, при докритических скоростях  $V < c_m$  затухание волн происходит по экспоненциальному закону. При докритических скоростях прогибы льда малы и при малых скоростях движения нагрузки практически не видны. С ростом скорости амплитуды прогиба пластины увеличиваются. При сверхкритических скоростях волны в жидкости под пластиной распространяются не только за нагрузкой, но и перед ней, затухание амплитуды волн при удалении от края слабое, порядка  $O(r^{-1/2})$  [13].

На рис. 2 показаны прогиб ледяного покрова толщиной 2 м и возвышение жидкости при  $x_0 = 50$  м,  $V = 18$  м/с (докритическая скорость) и  $V = 21$  м/с (сверхкритическая скорость). На рис. 3 представлены зависимости вертикальных смещений льда и свободной поверхности от координаты  $y$  на кромке. Видно, что при скорости  $V = 21$  м/с амплитуды вертикальных смещений свободной поверхности меньше, чем при  $V = 18$  м/с, а пластины — больше, так как изгибно-гравитационные волны поглощают большее количество энергии. Вертикальные смещения свободной поверхности жидкости и пластины на кромке различаются, смещения жидкости представляют собой суперпозицию собственных коротких волн и длинных волн, отраженных от кромки пластины. Амплитуды волн в жидкости со свободной поверхностью значительно больше амплитуд прогиба пластины.

Деформации пластины максимальны на кромке. На рис. 4 представлены зависимости безразмерных максимальных деформаций  $e_m/e_*$  на кромке от координаты  $y$  для пластин толщиной  $h = 0,5; 1,0$  м при докритических и околоскритических скоростях. Для пластины толщиной  $h = 0,5$  м скорость  $V = 10$  м/с является докритической, а  $V = 12,5$  м/с — сверхкритической и околоскритической. Для пластины толщиной  $h = 1$  м скорость  $V = 12$  м/с является докритической, а  $V = 15$  м/с — околоскритической, незначительно меньшей критической. Разрушения ледяного покрова следует ожидать при околоскритических скоростях. Для пластины толщиной  $h = 2$  м при данной величине нагрузки максимальные деформации не превышали критического значения при любых скоростях.

На рис. 5 приведены зависимости коэффициентов волновых сил  $A_x, A_y$  от скорости движения нагрузки для различных толщин льда, а также зависимость коэффициента  $A_{y0}$  от скорости  $V$  для бесконечной свободной поверхности (в этом случае боковая сила вследствие симметрии равна нулю) при  $x_0 = 50$  м. Поскольку при докритических скоростях



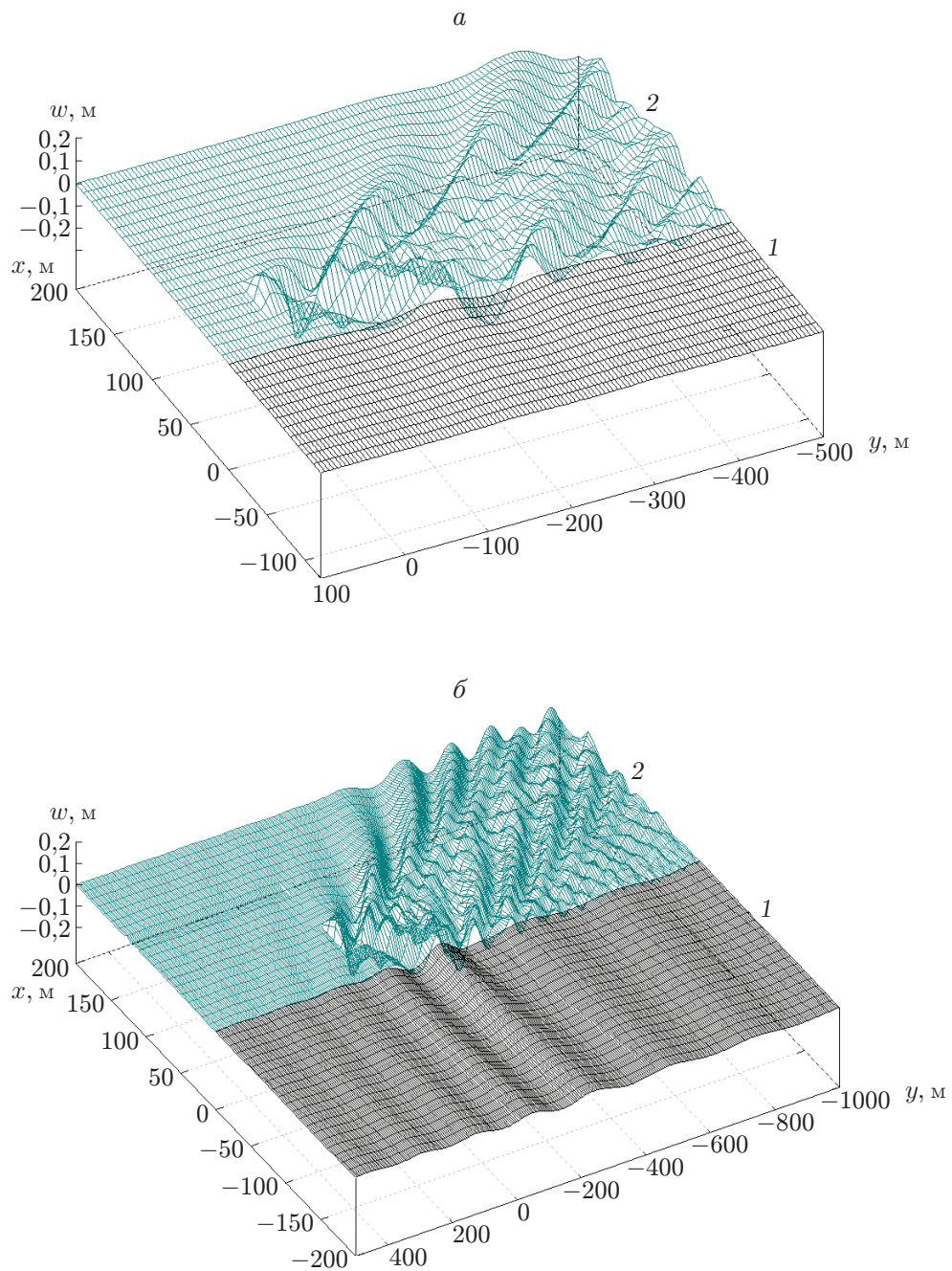


Рис. 2. Распространение волн в пластине толщиной  $h = 2 \text{ м}$  (1) и жидкости (2) при  $x_0 = 50 \text{ м}$ :  
 $a$  —  $V = 18 \text{ м/с}$ ,  $b$  —  $V = 21 \text{ м/с}$

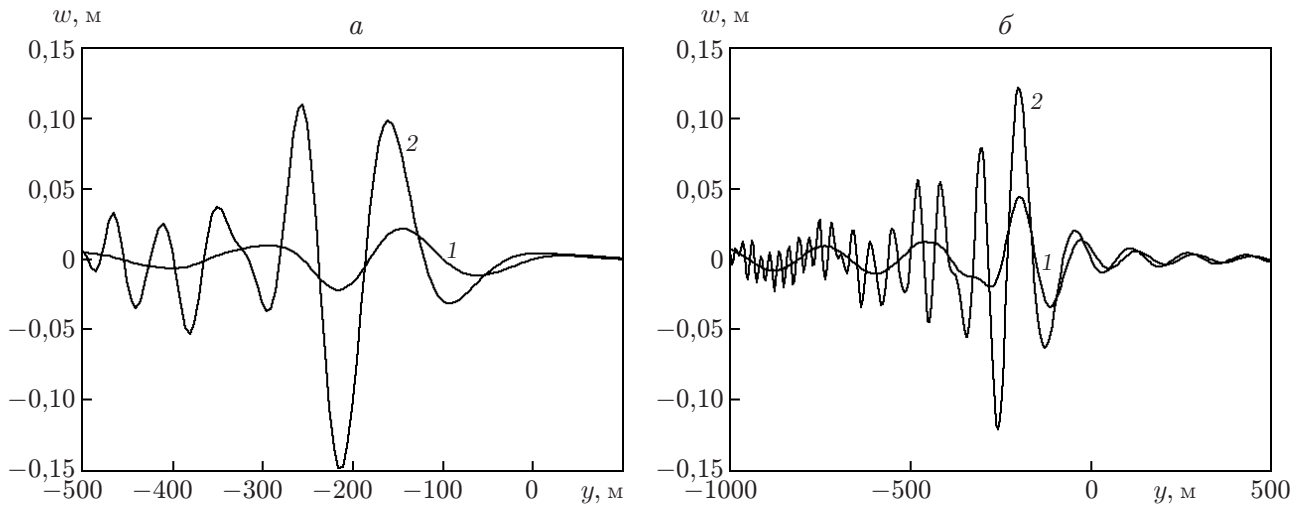


Рис. 3. Зависимости вертикальных смещений пластины толщиной  $h = 2$  м (1) и жидкости (2) на кромке от координаты  $y$  при  $x_0 = 50$  м:  
 а —  $V = 18$  м/с, б —  $V = 21$  м/с

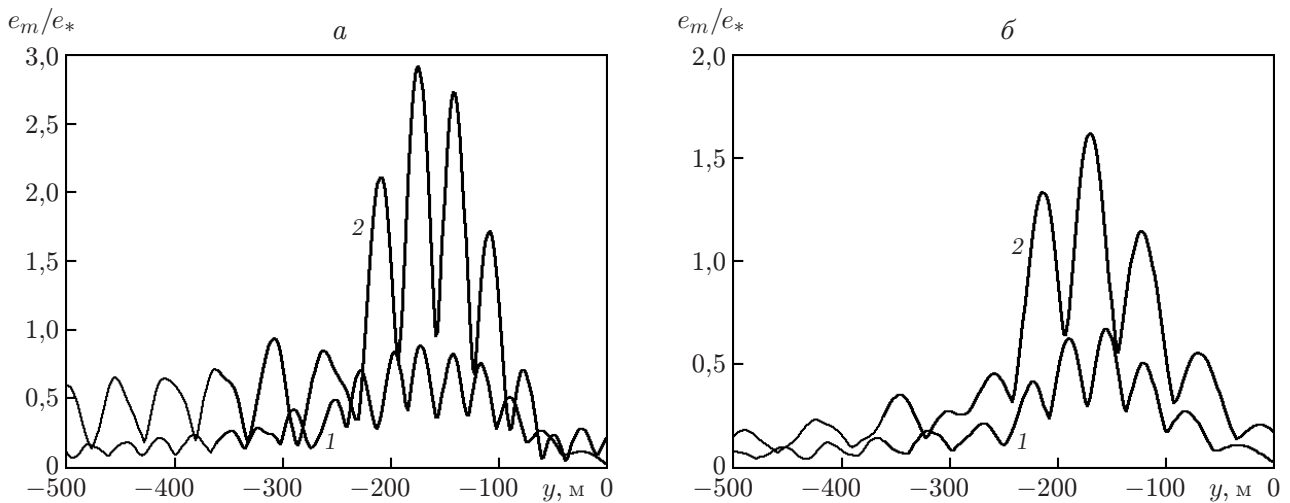


Рис. 4. Зависимость безразмерных деформаций пластины  $e_m/e_*$  на кромке от координаты  $y$  при  $x_0 = 50$  м:  
 а —  $h = 0,5$  м (1 —  $V = 10$  м/с, 2 —  $V = 12,5$  м/с); б —  $h = 1$  м (1 —  $V = 12$  м/с, 2 —  $V = 15$  м/с)

возмущения распространяются только за нагрузкой, влияния ледяного покрова на волновые силы не наблюдается. При сверхкритических скоростях изгибно-гравитационные волны распространяются не только за нагрузкой, но и перед ней, создают возмущения в жидкости вблизи области нагрузки и оказывают влияние на волновые силы.

Из приведенных выше результатов расчетов следует, что вблизи ледяного покрова при околоскритических скоростях на судно на воздушной подушке действуют волновые силы, которые значительно отличаются от сил на бесконечной свободной поверхности, зависимость этих сил от скорости имеет осциллирующий характер. При дальнейшем увеличении скорости длина и амплитуда изгибно-гравитационных волн в области перед нагрузкой уменьшаются, при этом влияние ледяного покрова на волновые силы ослабевает. Влияние

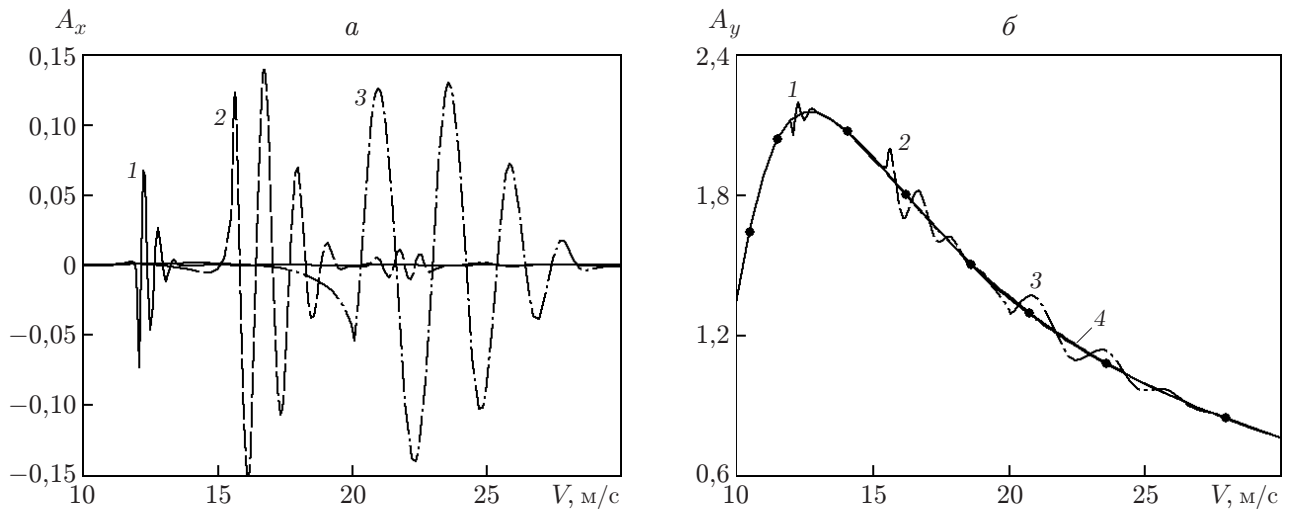


Рис. 5. Зависимости коэффициентов волновых сил  $A_x$  (а) и  $A_y$ ,  $A_{y0}$  (б), действующих на движущееся тело, от скорости при  $x_0 = 50$  м и различных толщинах пластин:

1 —  $h = 0,5$  м, 2 —  $h = 1$  м, 3 —  $h = 2$  м, 4 —  $A_{y0}(V)$

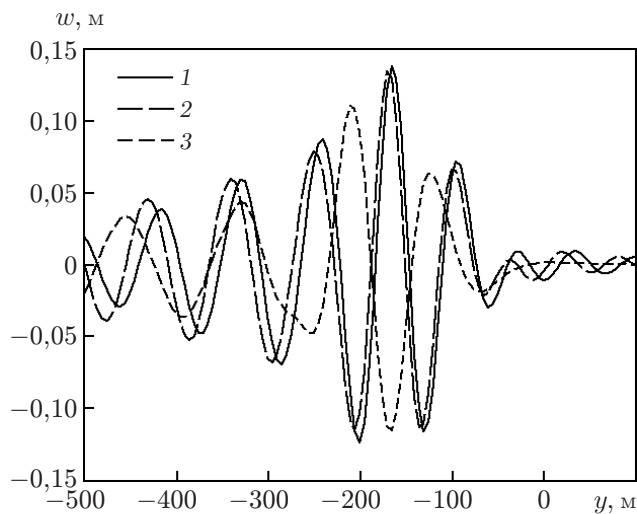


Рис. 6. Зависимость прогиба ледяной пластины толщиной  $h = 0,5$  м от координаты  $y$  при  $x_0 = 50$  м и различных значениях скорости движения нагрузки: 1 —  $V = 12,1$  м/с, 2 —  $V = 12,25$  м/с, 3 —  $V = 14$  м/с

ледяного покрова на волновые силы увеличивается с ростом толщины льда. При уменьшении расстояния от центра области приложения нагрузки до кромки ледяного покрова характер зависимости волновых сил от скорости остается тем же, но амплитуды осцилляций увеличиваются. При толщинах ледяного покрова  $h = 0,5; 1,0; 2,0$  м и  $x_0 = 50$  м максимальное отличие коэффициента волнового сопротивления  $A_y$  от  $A_{y0}$  составляет 2,4; 6,4; 6,6 %, при  $x_0 = 30$  м — 6,5; 12,0; 12,6 % соответственно. При толщинах ледяного покрова  $h = 0,5; 1,0; 2,0$  м и  $x_0 = 50$  м максимальное отличие коэффициента боковой силы  $A_x$  от величины коэффициента волнового сопротивления  $A_{y0}$  составляет 3, 6, 12 %, при  $x_0 = 30$  м — 7,8; 10,0; 15,0 % соответственно.

На рис. 6 показана зависимость прогиба кромки ледяной пластины толщиной  $h = 0,5$  м от координаты  $y$  при  $x_0 = 50$  м и скоростях  $V = 12,10; 12,25; 14,00$  м/с. Скорости  $V = 12,10; 12,25$  м/с соответствуют минимальному и максимальному значениям волновых сил вблизи критической скорости. Из рис. 6 следует, что при  $V = 12,10; 12,25$  м/с в области перед нагрузкой распространяются изгибно-гравитационные волны достаточно

большой амплитуды, которые возмущают жидкость, а при скорости  $V = 14$  м/с волны, распространяющиеся в этой области, почти не видны. Поэтому при  $V = 14$  м/с волновые силы незначительно отличаются от значений волновых сил, которые наблюдаются для бесконечной свободной поверхности.

**Заключение.** Методом Винера — Хопфа получено аналитическое решение задачи (в виде рядов и квадратур) о возбуждении волн нагрузкой, равномерно движущейся по свободной поверхности жидкости конечной глубины вдоль кромки полубесконечного ледяного покрова. Исследовано влияние скорости нагрузки на волновые силы и на характер генерируемых гравитационных и изгибно-гравитационных волн, а также на деформации в пластине. Обнаружено, что при околокритических скоростях движения нагрузки ледяной покров оказывает значительное влияние на волновые силы, действующие на движущееся по свободной поверхности тело, особенно при малых расстояниях от центра нагрузки до кромки ледяного покрова. Показано, что максимальные прогибы и деформации льда происходят при околокритических скоростях движения нагрузки, при этом возможно разрушение льда.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Ткачева Л. А.** Поведение полубесконечного ледяного покрова при равномерном движении нагрузки // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 2. С. 82–98.
2. **Стурова И. В.** Движение внешней нагрузки по полубесконечному ледяному покрову в докритическом режиме // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2018. № 1. С. 51–60.
3. **Havelock T. H.** The theory of wave resistance // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1939. V. 138. P. 339–348.
4. **Сретенский Л. Н.** К теории волнового сопротивления. Жуковский: Центр. аэрогидродинам. ин-т, 1939. (Тр. Центр. аэрогидродинам. ин-та; Т. 458).
5. **Newman J. N., Poole F. A. P.** The wave resistance of a moving pressure distribution in a canal // Schiffstechnik. 1962. Bd 9. S. 21–26.
6. **Barratt M. J.** The wave drag of a hovercraft // J. Fluid Mech. 1965. V. 22, N 1. P. 39–47.
7. **Doctors L. J., Sharma S. D.** The wave resistance of an air-cushion vehicle in steady and accelerated motion // J. Ship Res. 1972. V. 16, N 4. P. 248–260.
8. **Kerr A. D., Palmer W. T.** The deformations and stresses in floating ice plates // Acta Mech. 1972. V. 15. P. 57–72.
9. **Squire V., Martin S.** A field study of the physical properties, response to swell, and subsequent fracture of a single ice floe in the winter Bering sea: Tech. report / Univ. of Washington; N 18. Washington, 1980.
10. **Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A.** The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Appl. Ocean Res. 2016. V. 59. P. 313–326.
11. **Нобл Б.** Метод Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
12. **Гельфанд И. М.** Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. М.: Физматгиз, 1958.
13. **Davys J. W., Hosking R. J., Sneyd A. D.** Waves due to steadily moving source on a floating ice plate // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 269–287.

*Поступила в редакцию 19/VII 2018 г.,  
после доработки — 4/X 2018 г.  
Принята к публикации 29/X 2018 г.*