

ки $q = 4\pi R h^3 G / 3\eta_0$ и для рассмотренных моделей $D_1 = 2\pi R \int_{-\infty}^{+\infty} D_f dX$, где D_f определяется по (2.6). Найдя разность $D = D_1 - D_2$, можно формально определить динамическое сопротивление мениска как силу F , развивающую мощность $D = Fv$. На единицу площади сечения капилляра приходится дополнительное давление мениска

$$(2.8) \quad p = D/\pi R^2 v.$$

Расчет p по формулам (2.2), (2.8) для капилляра $R \sim 1$ мкм в рамках модели устойчивой пленки дает близкие результаты. Это показывает, что оба рассмотренных способа определения p для достаточно широких капилляров по существу адекватны. В этом случае следует предпочесть первый способ как более простой. Однако второй способ является более строгим, и его следует предпочесть для более узких капилляров ($R \leq 0,1$ мкм), когда размеры зоны переходной кривизны становятся сравнимыми с размером мениска и использование R_m как характерного параметра мениска теряет смысл.

Поступила 9 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Chun Hun, Scriven L. E. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line.— «J. Colloid Interface Sci», 1971, vol. 35, N 1.
2. Железный Б. В. Динамика отступающего мениска жидкости в капилляре с учетом специфических свойств тонких пленок.— ПМТФ, 1976, № 3.
3. Железный Б. В. К гидродинамике наступающего мениска смачивающей жидкости.— «Докл. АН СССР», 1974, т. 249, № 1.
4. Hansen B. I., Toong T. Y. Dynamic contact angle and its relationship to forces of hydrodynamic origin.— «J. Colloid Interface Sci.», 1971, vol. 37, N 1.
5. Железный Б. В. Исследование смачивающих пленок капиллярным методом.— В кн.: Поверхностные явления в жидкостях. Вып. 3. Л., изд. Ленингр. ун-та, 1975.

УДК 532.591

О ВНУТРЕННИХ ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ТЯЖЕЛЫХ ЖИДКОСТЕЙ

С. И. Плаксин

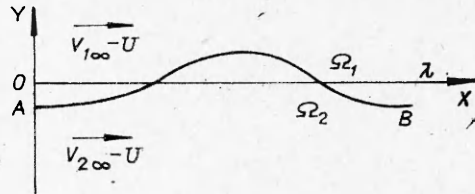
(Новосибирск)

Задаче об установившихся волнах на границе раздела двух тяжелых жидкостей посвящен ряд работ (см., например, [1, 2]). В данной работе предложен метод, основанный на сведении этой задачи к решению нелинейной задачи сопряжения.

Рассмотрим течение двух несжимаемых жидкостей различных плотностей в поле силы тяжести с заданными скоростями на бесконечном удалении от линии раздела. Будем считать движение безвихревым, а линию раздела l , перемещающуюся без изменения формы с некоторой горизонтальной скоростью U , кривой Ляпунова с периодом λ . Выберем систему коор-

динат OXY , движущуюся в направлении распространения волны, со скоростью U . Предположим, что абсолютная скорость частиц жидкости на границе раздела не совпадает со скоростью распространения волны. При этом условии волна не разрушается [3].

Поместим начало координат на среднем уровне линии раздела жидкостей, направляя ось OX по горизонтали в сторону абсолютного движения линии l , а ось OY — по вертикали вверх через одну из вершин волны (фиг. 1). Обозначим области с периодом λ , занимаемые верхней и нижней



Фиг. 1

жидкостями, через Ω_k , $k = 1, 2$. Введем комплексные переменные $Z_k = X_k + iY_k$ в областях Ω_k , соответствующие комплексные потенциалы $W_k = \Phi_k + i\Psi_k$ и комплексные скорости $V_k = dW_k/dZ_k$. Абсолютные скорости жидкостей на бесконечном удалении от линии раздела обозначим через $V_{k\infty}$, а плотности — через ρ_k ($\rho_1 < \rho_2$).

Перейдем к безразмерным величинам, полагая $V_k = v_k V_{1\infty}$, $Z_k = z_k \lambda / 2\pi$, $W_k = w_k V_{1\infty} \lambda / 2\pi$.

При сделанных предположениях задача состоит в определении профиля волны и аналитических в Ω_k функций v_k , удовлетворяющих кинематическому, динамическому условиям на l и условию на бесконечном удалении от линии раздела:

$$\begin{aligned} \psi_1 = \psi_2 = 0 \text{ на } l; \\ (1) \quad \text{Im}(z) = [m_1 |v_1(z)|^2 - (1 + m_1) |v_2(z)|^2] \text{Fr} / 2\gamma^2 + c, \quad z \in l; \\ v_1 \rightarrow 1 - \gamma, \quad y_1 \rightarrow \infty; \quad v_2 \rightarrow \delta - \gamma, \quad y_2 \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

где $\text{Fr} = U^2 2\pi / g\lambda$; $m_1 = \rho_1 / (\rho_2 - \rho_1)$; $\gamma = U / V_{1\infty}$; $\delta = V_{2\infty} / V_{1\infty}$; g — ускорение силы тяжести; c — некоторый функционал.

Рассмотрим вспомогательную плоскость комплексного переменного u . Пусть область D^+ есть внутренность единичного круга с центром в точке $u = 0$, а D^- — внешность круга с разрезами от нуля до единицы и от единицы до бесконечности соответственно. Отобразим область $D^+(D^-)$ на $\Omega_1(\Omega_2)$ таким образом, что точки A, B (см. фиг. 1) соответствуют точкам $e^{i0}, e^{i2\pi}$, бесконечно удаленная точка области Ω_1 — точке $u = 0$, а бесконечно удаленная точка области Ω_2 соответствует бесконечно удаленной точке плоскости u . Искомое отображение $f_1(u)(f_2(u))$ имеет вид [4]

$$f_1(u) = -i(\ln u + \omega_1(u)) \quad (f_2(u) = -i(\ln u + \omega_2(u))),$$

где ω_1 — функция, регулярная внутри круга $|u| < 1$ (ω_2 — функция, регулярная вне $|u| \leq 1$). При этом профиль волны перейдет в окружность L единичного радиуса. Используя теорему Келлога [5, 6] и гладкость линии l , можно показать, что функции $df_k/d\tau$ удовлетворяют на L условию Гельдера с показателем α ($0 < \alpha \leq 1$), $df_k/d\tau \neq 0$ на L , df_1/du непрерывна при $u \neq 0$ в круге $|u| \leq 1$, df_2/du непрерывна вне $|u| < 1$ и имеет место

$$(2) \quad \lim_{|u| \rightarrow \tau} df_k/du = df_k/d\tau$$

(здесь и ниже под $d/d\tau$ понимаются производные предельных значений, $\tau = e^{i\sigma}$, $\sigma \in [0, 2\pi]$).

Введем функцию сдвига $\beta(t) = \tau$ ($t = e^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$)

$$(3) \quad \beta(t) = f_2^{-1}(f_1(t)).$$

Дифференцируя соотношение (3), получаем

$$(4) \quad \beta'(t)df_2(\beta(t))/d\tau = df_1(t)/dt.$$

Ввиду указанного соответствия точек при построении конформных отображений уравнение (3) эквивалентно (4) и условиям

$$(5) \quad \beta(e^{i0}) = e^{i0}, \quad \beta(e^{i2\pi}) = e^{i2\pi}.$$

Таким образом, β — диффеоморфизм L на себя, и в силу свойств $df_n/d\tau$ функция $\beta'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Введем функции

$$\Gamma^+(u) = 1 + u d\omega_1/du, \quad \Gamma^-(u) = 1 + u d\omega_2/du.$$

Используя свойство (2), перепишем (4) в виде

$$(6) \quad \Gamma^-(\beta(t)) = \frac{\beta(t)}{t\beta'(t)} \Gamma^+(t).$$

Известно, что комплексные потенциалы рассматриваемых течений выражаются формулами [4]

$$w_1 = -i(1 - \gamma) \ln u, \quad w_2 = -i(\delta - \gamma) \ln u.$$

Тогда квадраты скоростей в одной и той же точке волны имеют вид

$$(7) \quad |v_1|^2 = \frac{(1 - \gamma)^2}{|\Gamma^+(t)|^2}, \quad |v_2|^2 = \frac{(\delta - \gamma)^2}{|\Gamma^-(\beta(t))|^2}.$$

Определим на интервале $[0, 2\pi]$ вещественную функцию $q(s)$ равенством

$$(8) \quad \beta(t) = e^{iq(s)}.$$

Из формул (1), (6)–(8) и очевидного равенства

$$t\beta'(t)/\beta(t) = q'(s)$$

выразим функцию сдвига $\beta(t)$ через $\Gamma^+(t)$

(9)

$$\beta(t) = \exp \left(\int_{e^{i0}}^t \sqrt{\mu + \nu \left(c + \operatorname{Im} \left(i \int_{e^{i0}}^{\tau} \frac{\Gamma^+(x)}{x} dx \right) - b \right) |\Gamma^+(\tau)|^2 \frac{d\tau}{\tau}} \right),$$

где

$$\mu = \frac{m_1(1 - \gamma)^2}{(1 + m_1)(\delta - \gamma)^2}, \quad \nu = \frac{2\gamma^2}{\operatorname{Fr}(1 + m_1)(\delta - \gamma)^2},$$

а вещественная постоянная b определяется из условия, что начало коор-

динат находится на среднем уровне жидкостей

$$(10) \quad \int_0^{\lambda} Y_l dX = 0.$$

В свою очередь постоянную c определим из уравнения

$$(11) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L \sqrt{\mu + \nu \left(c + \operatorname{Im} \left(i \int_{\sigma^{i0}}^{\tau} \frac{\Gamma^+(x)}{x} dx \right) - b \right)} |\Gamma^+(\tau)|^2 \frac{d\tau}{\tau} = 1,$$

полученного из второго условия (5).

Таким образом, исходная задача сводится к решению нелинейной задачи сопряжения. Последняя состоит в определении функции $\Gamma^+(u)$, аналитической внутри $|u| < 1$, и функции $\Gamma^-(u)$, аналитической вне $|u| \leq 1$, предельные значения которых непрерывны по Гельдеру и удовлетворяют соотношению (6). При этом функция $\beta(t)$ и постоянные b , c определяются из (9)–(11).

В силу предположения о неравенстве нулю относительной скорости в точках волны из (6), (7), (9), (11) следует, что функция $\beta(t)$, определенная равенством (9), взаимно однозначно отображает L на себя с сохранением направления и имеет отличную от нуля производную β' . А так как $\Gamma^+(t)$, $\Gamma^-(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, то β' также удовлетворяет этому условию.

Воспользовавшись тем, что $\Gamma^+(t)$, $\Gamma^-(t)$ являются предельными значениями соответствующих аналитических функций, сведем (6) к интегральному уравнению [7]

$$(12) \quad \frac{\Gamma^+(t)}{t} + \frac{1}{2\pi i} \int_L K(t, \tau) \frac{\Gamma^+(\tau)}{\tau} d\tau = \frac{1}{t},$$

где

$$K(t, \tau) = \beta'(t) / |\beta(\tau) - \beta(t)| - 1/(\tau - t).$$

Введя функцию $F(t)$ равенством

$$\Gamma^+(t) = F(t) + 1,$$

представим (12) в операторном виде

$$(13) \quad F = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{z}{\tau} K(t, \tau) (F(\tau) + 1) d\tau = R(F, \mu, \nu).$$

При любых значениях параметров μ и ν уравнение (13) имеет тривиальное решение $F_0 = 0$ (при этом $c = (1 - \mu)/\nu$, $b = 0$), которому соответствует равномерный поток.

Вычислим производную Фреше $R'(F_0, \mu, \nu; F)$ оператора $R(F, \mu, \nu)$ в точке F_0 и рассмотрим линеаризованное в нуле уравнение

$$F(t) = (1 - \mu)F(t)/2 + (\omega_1(t) - \omega_1(0))\nu/4$$

или

$$(14) \quad F(t) = \frac{\nu}{2(1 + \mu)} \int_0^t \frac{1}{u} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\tau)}{\tau - u} d\tau du.$$

Спектр оператора, стоящего в правой части (14), состоит из собственных значений $2(1 + \mu)/\nu = 1/h$ кратности единицы.

Соответствующие собственные функции суть t^h , где h — целое положительное число. Решение уравнения (14) имеет вид at , где a — безразмерная амплитуда, а число Фруда

$$(15) \quad \text{Fr} = \gamma^2 / (m_1(1 - \gamma)^2 + (1 + m_1)(\delta - \gamma)^2)h.$$

Это совпадает с известными результатами теории внутренних волн [8]. В частности, при $m_1 = 0$, $\delta = 0$ имеем $U^2 = g\lambda/2\pi$. Отметим, что полный обход L соответствует одной волне. Поэтому достаточно ограничиться значением $h = 1$.

Решение нелинейного уравнения (12) ищется методом итераций. На каждой итерации решается линейное уравнение, в ядре которого функция $\beta(t)$ определяется равенством (9), где Γ^+ является решением предыдущей итерации. Для численного решения линейного уравнения (12) на n -й итерации удобно перейти к уравнению с вещественным ядром

$$(16) \quad \Gamma_n^+(s) + \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} K_1(s, \sigma) \Gamma_n^+(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} (1 + q'(s)),$$

где $K_1(s, \sigma) = q'(s) \operatorname{ctg} \frac{q(\sigma) - q(s)}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2}$, а $q(\sigma)$ выражается с помощью Γ_{n-1}^+ из (8), (9). При условии, что Γ_{n-1}^+ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α , в силу свойств функции $\beta(t)$ ($q(s)$) ядро уравнения (16) имеет в точке $s = \sigma$ особенность порядка ниже первого

$$|K_1(s, \sigma)| < M / |s - \sigma|^{1-\alpha},$$

где M — некоторая постоянная, зависящая от Γ_{n-1}^+ . Кроме того, для Γ_{n-1}^+ , удовлетворяющей условию Гельдера, решение уравнения Γ_n^+ также удовлетворяет этому условию.

Ограничимся рассмотрением волн, для которых $1/2 < \alpha \leq 1$. Квадратично суммируемое ядро $K_1(s, \sigma)$ представим рядом Фурье

$$K_1(s, \sigma) = \sum_{p,m=0}^{\infty} k_{pm} \eta_p(\sigma) \eta_m(s),$$

где

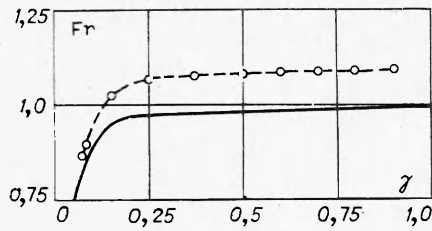
$$\eta_0 = 1/\sqrt{2\pi}; \quad \eta_{2m-1} = \sin(ms)/\sqrt{\pi}; \quad \eta_{2m} = \cos(ms)/\sqrt{\pi}.$$

Уравнение (16) решаем методом моментов [9], отыскивая решение в виде

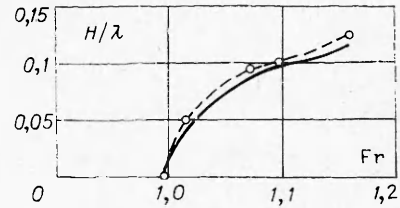
$$\Gamma_n^+(s) = 1 + \sum_{m=1}^{n+1} (a_m^{(n)} + ib_m^{(n)}) e^{ims}.$$

Для нахождения коэффициентов $a_m^{(n)}$, $b_m^{(n)}$ получаем систему линейных алгебраических уравнений. В качестве начального приближения возьмем решение уравнения (14). Постоянную c_n находим из уравнения (11). Сходимость метода итераций контролируем стремлением к нулю величин $c_n - c_{n-1}$, $\|\Gamma_n^+ - \Gamma_{n-1}^+\|_{L_2}$. Итерации заканчиваются при выполнении уравнения (11) с точностью до 10^{-6} .

Вычисления проводились при $\delta = 0$, $m_1 = 0,00129$. В этом случае нижняя жидкость на бесконечной глубине является неподвижной. Результаты вычислений показывают, что уравнение (15) в плоскости (γ, Fr) определяет кривую разветвления, в каждой точке которой от тривиального решения ответвляется нетривиальное, соответствующее волновому



Фиг. 2

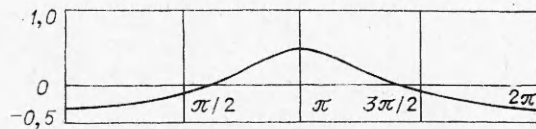


Фиг. 3

движению (фиг. 2, сплошная линия). Нетривиальное решение характеризуется величиной H/λ , где H — высота волны. Изменение величины H/λ в зависимости от Fr при значении $\gamma = 0,6$ показано на фиг. 3 штриховой линией. Эта зависимость хорошо согласуется с результатами работы [1], показанными на фиг. 3 сплошной линией. Все полученные решения описывают волны с вертикальной осью симметрии. На фиг. 2 штриховой ли-

Номер итерации	$c_n \cdot 10^{+5}$	$\ \Gamma_n^+ - \Gamma_{n-1}^+\ _{L_2}^2 \cdot 10^{+6}$	$2\pi - q(2\pi)$	$q(\pi)$		Номер итерации	$c_n \cdot 10^{+5}$	$\ \Gamma_n^+ - \Gamma_{n-1}^+\ _{L_2}^2 \cdot 10^{+6}$	$2\pi - q(2\pi)$	$q(\pi)$
1	57500	80	$38 \cdot 10^{-3}$	3,12		4	58172	49	$96 \cdot 10^{-7}$	3,14
2	58000	90	$87 \cdot 10^{-4}$	3,13		5	58185	37	$72 \cdot 10^{-7}$	3,14
3	58156	68	$61 \cdot 10^{-6}$	3,14		6	58199	29	$79 \cdot 10^{-8}$	3,14

нией показаны значения параметров γ и Fr , при которых решению уравнения (12) соответствует волновое движение с $H/\lambda = 0,1$. В таблице приведены расчетные значения величин $c_n, \|\Gamma_n^+ - \Gamma_{n-1}^+\|_{L_2}^2, 2\pi - q(2\pi), q(\pi)$



Фиг. 4

в зависимости от номера итерации при значениях $Fr = 1,16, \gamma = 0,6$. Полученный при этом профиль волны показан на фиг. 4.

Автор выражает благодарность Д. Н. Горелову за постановку задачи и ее обсуждение и В. А. Селезневу за внимание к работе.

Поступила 14 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. Точное определение установившихся волн конечной амплитуды на поверхности раздела двух жидкостей конечной глубины. Собр. соч. Т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1949.
2. Снixa С. Р. П. Точная теория установившихся волн на свободной поверхности и поверхности раздела двух жидкостей. — «Докл. АН СССР», 1966, т. 168, № 1.

3. Дэвис Т. В. Теория симметричных гравитационных волн конечной амплитуды. Г.— В кн.: Теория поверхностных волн. М., ИЛ, 1959.
4. Некрасов А. Н. Точная теория волны установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. Собр. соч. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 4-е. М., «Наука», 1973.
6. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Изд. 2-е. М., «Наука», 1966.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1963.
8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. Изд. 6-е. М., Физматгиз, 1963.
9. Иванов В. В. О применении метода моментов и смешанного метода к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений.— «Докл. АН СССР», 1957, т. 114, № 5.

УДК 532.516

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ВОЛНОВОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. Л. Уринцев
(Ростов-на-Дону)

Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости рассматривалось в работах [1, 2]. Существование нелинейных стационарных волн на поверхности вязкой жидкости, стекающей вдоль вертикальной стенки, впервые было строго доказано в работе [3]. Рассмотрению различных режимов течения в падающих пленках посвящена одна из глав монографии [4].

Линейная задача устойчивости плоскопараллельного течения со свободной границей изучалась на основе уравнений Навье — Стокса в [5—9]. Нелинейная задача в рамках уравнения П. Л. Капицы [1] исследовалась в [10—14]; уравнение Кортевега — де-Фриза и близкие к нему для описания движения тонкой пленки жидкости использовались в работах [15, 16]. Нелинейные режимы течения в жидкой пленке и нелинейная устойчивость на основе полной системы уравнений Навье — Стокса в приближении длинных волн изучались в [17—20]. В двух последних работах была вычислена константа Ландау при помощи модифицированного метода Рейнольдса и Поттера [21] и сделан вывод об отсутствии длинноволновых подкритических движений.

1. Волновые режимы вблизи порога устойчивости. Рассмотрим слой вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ и вязкости ν , стекающей под действием силы тяжести $g = 981 \text{ см/с}^2$ по плоской поверхности, наклоненной к горизонту под углом χ . На свободной поверхности жидкости пусть действует поверхностное натяжение с коэффициентом T . Будем также считать заданным массовый расход жидкости Γ , определяемый как осредненное по времени значение массы жидкости, протекающей через поперечное сечение и приходящееся на единицу ширины слоя. В качестве масштабов длины, времени и массы выберем соответственно величины $(\nu^2/g)^{1/3}$, $(\nu/g^2)^{1/3}$, $\rho\nu^2/g$ и введем безразмерные параметры

$$\text{Re} = \Gamma/\nu\rho, \quad \gamma = (T/\nu\rho)(\nu g)^{-1/3},$$

первый из которых есть число Рейнольдса, основанное на расходе, а второй характеризует физические свойства жидкости. В такой постановке зависящая от числа Рейнольдса средняя толщина слоя считается неиз-