

УДК 532.591+539.3

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОВЕДЕНИЕ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ БАЛКИ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА МЕЛКОВОДЬЕ

И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mail: sturova@hydro.nsc.ru

В рамках линейной теории мелкой воды исследовано нестационарное поведение свободно плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости упругой балки, составленной из шарнирно соединенных однородных участков. Нестационарное поведение балки обусловлено набеганием на нее локализованной поверхностной волны или начальной деформацией. Прогиб балки ищется в виде разложения по собственным функциям колебаний в вакууме с амплитудами, изменяющимися во времени. Задача сводится к решению бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных амплитуд. Исследовано поведение балки при различных воздействиях среды и положениях шарнира.

**Ключевые слова:** гидроупругость, плавающая составная пластина, мелкая вода, нестационарное воздействие.

Гидроупругое поведение плавающих на поверхности жидкости тел (ледовых полей, плавучих платформ, волноломов) исследуется при решении различных прикладных задач. При математическом моделировании такие тела часто рассматриваются как тонкие упругие пластины, так как их горизонтальные размеры во много раз больше толщины. Большая часть исследований поведения плавающих упругих пластин выполнены в предположении, что пластина однородна по своим структурным свойствам. Однако в действительности как ледовые поля, так и искусственные сооружения являются неоднородными. Структурная неоднородность может быть вызвана изменением вдоль пластины массы и коэффициентов жесткости, а также наличием шарнирных соединений.

Ограничимся рассмотрением наиболее простого случая пластины, составленной из шарнирно скрепленных однородных участков. Для ледовых полей соединение типа простого шарнира имеет место при свободном налегании льдин. Для искусственных сооружений такая ситуация может возникнуть в процессе соединения отдельных секций.

К настоящему времени исследование поведения составной пластины выполнено только для линейризованной задачи о рассеянии периодических волн в случае, когда течение жидкости и деформации пластины предполагаются периодическими функциями времени. В [1] изучено косое набегание поверхностных волн на упругую полубезграничную составную пластину, плавающую на свободной поверхности слоя жидкости конечной глубины. Передний участок пластины постоянной ширины с помощью упругого шарнира скреплен с основной частью и имеет характеристики, отличающиеся от ее характеристик. Плоская задача для пятизвенной балки, плавающей на поверхности слоя жидкости конечной

глубины, рассмотрена в [2]. Все звенья одинаковы и соединены между собой простыми шарнирами. Показано, что при рассеянии такой балкой набегающих поверхностных волн максимальные амплитуды прогибов возникают в точках шарнирного соединения. Поведение пятизвенной прямоугольной пластины при набегаании встречных поверхностных волн изучено в [3]. Получены оценки параметров упругости и размеров звеньев, при которых влияние шарнирного соединения является существенным. Решение для двухзвенной балки, плавающей на поверхности слоя жидкости конечной глубины, приведено в [4, 5], причем в [4] рассмотрены одинаковые звенья балки, а в [5] — звенья разной длины с различными структурными характеристиками. Поведение удлиненной двухзвенной прямоугольной пластины при косом набегаании поверхностных волн изучено в [6]. Показано, что упругость шарнирного соединения и свойства отдельных звеньев оказывают существенное влияние на гидроупругое поведение составной пластины.

В данной работе предложен метод решения линейной нестационарной задачи о поведении плавающей двухзвенной упругой балочной пластины. В качестве примеров нестационарного поведения рассмотрены следующие случаи: набегаение на пластину локализованной поверхностной волны и начальная деформация пластины. Для однородной пластины, плавающей на мелководье, эти случаи изучены в [7], а при действии произвольной внешней нагрузки — в [8].

**1. Постановка задачи.** Пусть на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости глубины  $H$  свободно плавает упругая балка длиной  $2L$ , которая состоит из двух частей, соединенных простым шарниром. Структурные характеристики обеих частей балки одинаковы. Поверхность жидкости, не покрытая балкой, является свободной. Область  $S$ , занятая жидкостью, разделяется на три части:  $S_1$  ( $|x| < L$ ),  $S_2$  ( $x < -L$ ),  $S_3$  ( $x > L$ ) ( $x$  — горизонтальная координата). Предполагается, что глубина жидкости мала по сравнению с длиной поверхностных и изгибно-гравитационных волн, и используется приближение мелкой воды. Потенциалы скоростей, описывающие движение жидкости в областях  $S_j$ , равны  $\varphi_j(x, t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), где  $t$  — время.

Предположим, что слева на балку набегающая локализованная поверхностная волна, вертикальное смещение жидкости в которой равно  $\eta_0(x, t) = f(x - \sqrt{gH}t)$ . Функция  $f(\xi)$  отлична от нуля только при  $|\xi| < c$ . Такая волна может возникнуть в результате распада начального возвышения свободной поверхности в момент  $t = t_0$  при условии, что первоначально вся жидкость находится в состоянии покоя. Как известно, в этом случае при  $t > t_0$  свободная поверхность представляет собой две одиночные волны, движущиеся без деформации в противоположных направлениях со скоростью  $\sqrt{gH}$  [9]. Амплитуды этих волн равны половине амплитуды начального возвышения, а ширина области, занятой каждой из этих волн, равна ширине области начального возвышения. Предполагается, что в момент времени  $t = 0$  балка и жидкость покоятся в областях  $S_1$  и  $S_3$ , а локализованное возмущение достигает левого края балки в области  $S_2$ . При  $t > 0$  в области  $S_1$  начинаются колебания балки и жидкости, которые вызывают расходящиеся от пластины волновые возмущения в областях  $S_2$  и  $S_3$ .

Нормальный прогиб балки Эйлера  $w(x, t)$  описывается уравнением

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g\rho w + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0 \quad (x \in S_1), \quad (1.1)$$

где  $D$  — коэффициент цилиндрической жесткости обеих частей балки;  $m$  — их удельная масса;  $\rho$  — плотность воды;  $g$  — ускорение свободного падения.

Согласно линейной теории мелкой воды справедливо соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -h \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \quad (x \in S_1), \quad h = H - d, \quad (1.2)$$

где  $d = m/\rho$  — осадка балки.

В областях вне балки потенциалы скоростей удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \quad (x \in S_j), \quad j = 2, 3. \quad (1.3)$$

Возвышения свободной поверхности  $\eta_2(x, t)$  и  $\eta_3(x, t)$  в областях  $S_2$  и  $S_3$  соответственно определяются из соотношений

$$\eta_j = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \quad (x \in S_j), \quad j = 2, 3.$$

Предполагается, что свободный шарнир находится в точке  $x = x_1$  ( $|x_1| < L$ ). Введем следующие обозначения:

$$w(x, t) = \begin{cases} w^-(x, t), & -L \leq x < x_1, \\ w^+(x, t), & x_1 < x \leq L. \end{cases}$$

В точке шарнирного соединения выполняются условия (подробнее см., например, [1])

$$w^- = w^+, \quad \frac{\partial^2 w^-}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w^+}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w^-}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w^+}{\partial x^3} \quad (x = x_1).$$

На концах балки ставятся условия свободного края — равенство нулю изгибающего момента и перерезывающей силы:

$$\frac{\partial^2 w^-}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w^-}{\partial x^3} = 0 \quad (x = -L), \quad \frac{\partial^2 w^+}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w^+}{\partial x^3} = 0 \quad (x = L).$$

В жидкости при  $x = \pm L$  должны выполняться условия непрерывности давления и массы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= \frac{H}{h} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & (x = -L), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= \frac{H}{h} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & (x = L). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Вдали от балки выполняются условия отсутствия возмущений

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Начальные условия имеют вид

$$w = \eta_3 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = 0, \quad \eta_2 = \eta_0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = -g\eta_0 \quad (t = 0). \quad (1.5)$$

Перейдем к безразмерным переменным, приняв в качестве единицы длины  $L$ , а в качестве единицы времени —  $\sqrt{L/g}$ .

Ниже используются следующие безразмерные коэффициенты:

$$\delta = D/(\rho g L^4), \quad \gamma = d/L.$$

**2. Метод нормальных мод.** Прогиб балки будем искать в виде разложения по собственным функциям колебаний составной балки со свободными концами в вакууме:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t) W_n(x). \quad (2.1)$$

Здесь функции  $X_n(t)$  подлежат определению, а функции  $W_n(x)$  являются решениями следующей спектральной задачи в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} W_n^{(IV)} &= \lambda_n^4 W_n \quad (|x| \leq 1), \\ (W_n^-)'' &= (W_n^-)''' = 0 \quad (x = -1), \quad (W_n^+)'' = (W_n^+)''' = 0 \quad (x = 1), \\ W_n^- &= W_n^+, \quad (W_n^-)'' = (W_n^+)'' = 0, \quad (W_n^-)''' = (W_n^+)''' \quad (x = x_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

(штрих означает дифференцирование по  $x$ ). Эти решения имеют вид

$$\begin{aligned} W_0 &= 1/\sqrt{2}, \quad W_1 = \sqrt{3/2}x, \\ W_2^- &= \sqrt{\frac{3(1-x_1)}{2(1+x_1)^3}} [1 + (2+x_1)x], \quad W_2^+ = \sqrt{\frac{3(1+x_1)}{2(1-x_1)^3}} [1 + (x_1-2)x], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_n^- &= B_n \{ \sin(\lambda_n(x+1)) + \operatorname{sh}(\lambda_n(x+1)) - D_n [\cos(\lambda_n(x+1)) + \operatorname{ch}(\lambda_n(x+1))] \}, \\ W_n^+ &= B_n C_n \{ \sin(\lambda_n(1-x)) + \operatorname{sh}(\lambda_n(1-x)) - F_n [\cos(\lambda_n(1-x)) + \operatorname{ch}(\lambda_n(1-x))] \}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{\sin z_n - \operatorname{sh} z_n}{\cos z_n - \operatorname{ch} z_n}, \quad F_n = \frac{\sin v_n - \operatorname{sh} v_n}{\cos v_n - \operatorname{ch} v_n}, \\ C_n &= \frac{(\cos v_n - \operatorname{ch} v_n)(\operatorname{sh} z_n \cos z_n - \operatorname{ch} z_n \sin z_n)}{(\cos z_n - \operatorname{ch} z_n)(\operatorname{sh} v_n \cos v_n - \operatorname{ch} v_n \sin v_n)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$B_n = \sqrt{\lambda_n / (z_n D_n^2 + v_n F_n^2 C_n^2)}, \quad z_n = \lambda_n(1+x_1), \quad v_n = \lambda_n(1-x_1).$$

Собственные значения  $\lambda_n$  определяются из уравнения

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh} z_n \cos z_n - \operatorname{ch} z_n \sin z_n)(1 - \operatorname{ch} v_n \cos v_n) + \\ + (\operatorname{sh} v_n \cos v_n - \operatorname{ch} v_n \sin v_n)(1 - \operatorname{ch} z_n \cos z_n) = 0 \quad (n \geq 3), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

В пространстве  $L^2(-1, 1)$  функции  $W_n(x)$  образуют полную ортогональную систему, нормированную следующим образом:

$$\int_{-1}^1 W_n(x) W_m(x) dx = \delta_{nm}$$

( $\delta_{nm}$  — символ Кронекера).

В случае если шарнирное соединение расположено в середине балки ( $x_1 = 0$ ), система собственных функций  $W_n(x)$  распадается на четные и нечетные по  $x$  составляющие. При  $k \geq 1$  функции  $W_{2k+1}(x)$  совпадают с нечетными собственными функциями для однородной балки (см., например, [8]):

$$W_{2k+1}(x) = \frac{\sin(\lambda_{2k+1}x) + S_{2k+1} \operatorname{sh}(\lambda_{2k+1}x)}{\sqrt{1 - S_{2k+1}^2}}, \quad S_{2k+1} = \frac{\cos \lambda_{2k+1}}{\operatorname{ch} \lambda_{2k+1}}.$$

Собственные значения  $\lambda_{2k+1}$  определяются из уравнения  $\operatorname{tg} \lambda_{2k+1} = \operatorname{th} \lambda_{2k+1}$ . При  $k \geq 2$  функции  $W_{2k}(x)$  имеют вид

$$W_{2k}(x) = B_{2k} \{ \sin(\lambda_{2k}(1 - |x|)) + \operatorname{sh}(\lambda_{2k}(1 - |x|)) - \\ - D_{2k} [ \cos(\lambda_{2k}(1 - |x|)) + \operatorname{ch}(\lambda_{2k}(1 - |x|)) ] \},$$

где значения  $B_{2k}$  и  $D_{2k}$  определяются из соотношений (2.3) при  $z_{2k} = v_{2k} = \lambda_{2k}$ . Собственные значения  $\lambda_{2k}$  удовлетворяют уравнению  $\cos \lambda_{2k} \operatorname{ch} \lambda_{2k} = 1$ .

Подставляя разложения (2.1) в (1.1) и начальные условия (1.5), умножая полученные соотношения на  $W_m(x)$  и интегрируя их по  $x$  от  $-1$  до  $1$ , получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\gamma \ddot{X}_m + (\delta \lambda_m^4 + 1) X_m + f_m(t) = 0, \quad X_m(0) = \dot{X}_m(0) = 0,$$

где

$$f_m(t) = \int_{-1}^1 W_m \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dx,$$

точка сверху означает дифференцирование по времени.

Решение для  $\varphi_1(x, t)$  ищем в виде

$$\varphi_1(x, t) = -\frac{1}{h} \left[ V(t) + xU(t) + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{2}(x+1)\right) \right]. \quad (2.5)$$

Подставляя это разложение в (1.2), умножая полученное соотношение на  $\sin[m\pi(x+1)/2]$  и интегрируя по  $x$  от  $-1$  до  $1$ , получаем

$$Q_m(t) = -\frac{4}{\pi^2 m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{X}_n(t) P_{nm},$$

где

$$P_{nm} = \int_{-1}^1 W_n(x) \sin\left(\frac{m\pi}{2}(x+1)\right) dx.$$

Значения  $P_{nm}$  вычислены аналитически, но выражения для них здесь не приводятся из-за их громоздкости. Функции  $V(t)$  и  $U(t)$  определяются из условий согласования (1.4).

Рассмотрим поведение решения в областях  $S_2$  и  $S_3$ . Решение для  $\varphi_2(x, t)$  ищем в виде

$$\varphi_2(x, t) = \varphi_0(x, t) + \psi(x, t),$$

где  $\varphi_0(x, t)$  — потенциал набегающей волны, который определяется из соотношения

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = \frac{\eta_0}{\sqrt{H}}.$$

Функция  $\psi(x, t)$  описывает потенциал скоростей отраженной волны. Согласно уравнению (1.3) решение для  $\psi(x, t)$  можно искать в виде

$$\psi(x, t) = \begin{cases} A((x+1)/\sqrt{H} + t), & -(1 + \sqrt{H}t) < x < -1, \\ 0, & x < -(1 + \sqrt{H}t). \end{cases} \quad (2.6)$$

Аналогичное представление имеет место для функции  $\varphi_3(x, t)$ , описывающей потенциал скоростей проходящей волны:

$$\varphi_3(x, t) = \begin{cases} B(t - (x - 1)/\sqrt{H}), & 1 < x < 1 + \sqrt{H}t, \\ 0, & x > 1 + \sqrt{H}t. \end{cases} \quad (2.7)$$

Функции  $A(\xi)$ ,  $B(\xi)$  в (2.6), (2.7) являются неизвестными. Используя условия согласования (1.4), для этих функций получим дифференциальные уравнения

$$\dot{A} = \frac{1}{\sqrt{H}} \left( \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{X}_n R_n - U \right) - \alpha(t), \quad \dot{B} = \frac{1}{\sqrt{H}} \left( U - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{X}_n Z_n \right) \quad (2.8)$$

с начальными условиями  $A(0) = B(0) = 0$ , где

$$\alpha(t) = \eta_0(-1, t), \quad R_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{nk}}{k}, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{P_{nk}}{k}.$$

Используя полученные соотношения, для определения колебаний балки запишем окончательно систему ОДУ в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \gamma \delta_{nm} + \frac{4}{\pi^2 h} T_{nm} \right) \ddot{X}_n + (\delta \lambda_m^4 + 1) X_m - \sqrt{2} \left( \alpha(t) + \frac{1}{\pi \sqrt{H}} \sum_{n=0}^{\infty} (Z_n - R_n) \dot{X}_n \right) \delta_{0m} + \\ + \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \alpha(t) + \frac{1}{\sqrt{H}} \left( U - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (Z_n + R_n) \dot{X}_n \right) \right] \delta_{m1} = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\dot{U} = -h \left[ \alpha(t) + \frac{1}{\sqrt{H}} \left( U - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (Z_n + R_n) \dot{X}_n \right) \right],$$

где

$$T_{mn} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{nk} P_{mk}}{k^2}.$$

Определив функции  $X_n(t)$  и  $U(t)$ , можно найти все характеристики движения жидкости и упругой балки. Например, в области  $S_2$  вертикальные возвышения свободной поверхности равны

$$\begin{aligned} \eta_2(x, t) = \eta_0(x, t) + \zeta(x, t), \\ \zeta(x, t) = \begin{cases} -\dot{A}((x + 1)/\sqrt{H} + t), & -(1 + \sqrt{H}t) < x < -1, \\ 0, & x < -(1 + \sqrt{H}t), \end{cases} \end{aligned}$$

а в области  $S_3$  —

$$\eta_3(x, t) = \begin{cases} -\dot{B}(t - (x - 1)/\sqrt{H}), & 1 < x < 1 + \sqrt{H}t, \\ 0, & x > 1 + \sqrt{H}t \end{cases}$$

(функции  $\dot{A}(\xi)$  и  $\dot{B}(\xi)$  определены в (2.8)).

**3. Энергетическое соотношение.** Определим изменение во времени энергии проходящей и отраженной волн. Полная энергия набегающей волны равна [9]

$$E_0 = \int_{-(1+2c)}^{-1} \eta_0^2(x, 0) dx.$$

Эта энергия передается колебаниям упругой пластины и рассеянными (проходящей и отраженной) поверхностным волнам. При  $t \rightarrow \infty$  колебания пластины затухают, и она возвращается в исходное горизонтальное положение. Энергия отраженной волны равна

$$E_r(t) = \int_{-(1+\sqrt{H}t)}^{-1} \zeta^2(x, t) dx = \sqrt{H} \int_0^t \dot{A}^2(\xi) d\xi,$$

а энергия проходящей волны —

$$E_t(t) = \int_1^{1+\sqrt{H}t} \eta_3^2(x, t) dx = \sqrt{H} \int_0^t \dot{B}^2(\xi) d\xi.$$

В данной задаче отсутствует диссипация энергии, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = E_0, \quad E(t) = E_r(t) + E_t(t).$$

Выполнение этого равенства может служить критерием точности используемого метода решения.

**4. Результаты расчетов.** Используя метод редукции, бесконечные ряды в разложениях (2.1), (2.5) заменим суммами с числом членов  $N$  и  $K$  соответственно. Система ОДУ (2.9) решалась численно методом Рунге — Кутты четвертого порядка.

На рис. 1 представлены собственные значения  $\lambda_n$ , определенные из решения уравнения (2.4), для мод с номерами  $n = 3, \dots, 8$  в зависимости от координаты шарнира  $x_1$ . При  $x_1 \rightarrow 1$  собственные значения соответствуют однородной балке. При  $x_1 = 0$  собственные значения с нечетными номерами  $\lambda_{2k+1}$  при  $k \geq 1$  совпадают с собственными значениями для антисимметричных мод однородной балки (штриховые линии на рис. 1). Отметим, что для однородной балки существует только две собственные функции при нулевом собственном значении (так называемые твердотельные моды (см., например, [8])). Добавление каждого следующего шарнира приводит к увеличению кратности нулевого собственного значения и соответственно числа собственных функций. Например, для пятизвенной балки существует шесть собственных функций при нулевом собственном значении [3].

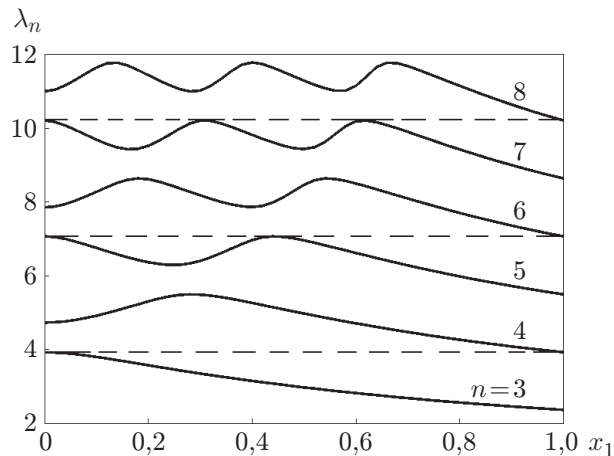


Рис. 1. Зависимость собственных значений  $\lambda_n$  ( $n = 3, \dots, 8$ ) от координаты шарнира  $x_1$ :

штриховые линии — собственные значения для антисимметричных мод однородной балки

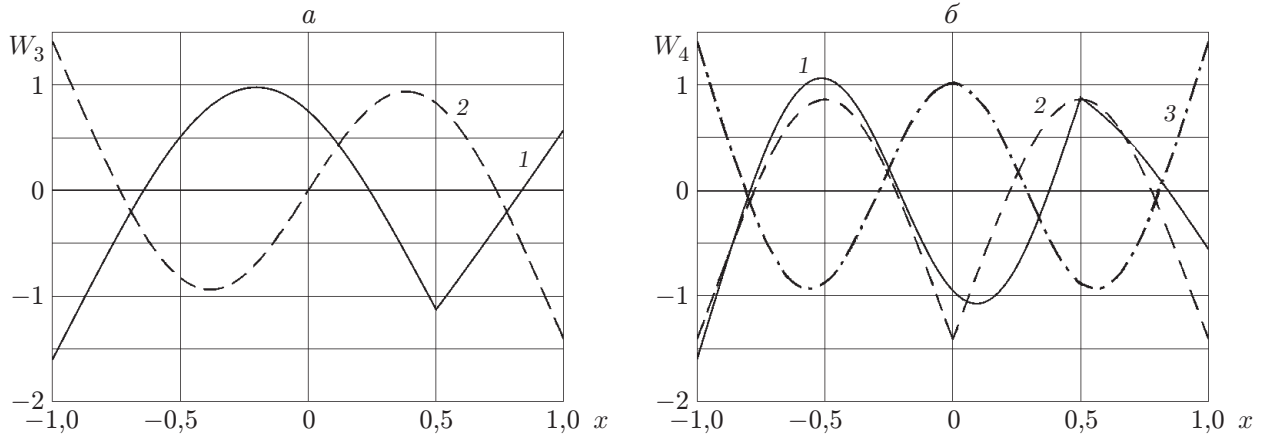


Рис. 2. Собственные функции  $W_3(x)$  (а) и  $W_4(x)$  (б):  
1, 2 — составная балка (1 —  $x_1/L = 0,5$ ; 2 —  $x_1 = 0$ ); 3 — однородная балка

На рис. 2 представлены собственные функции  $W_n(x)$  ( $n = 3, 4$ ). Как указано выше, при  $x_1 = 0$  антисимметричные собственные функции совпадают с соответствующими собственными функциями для однородной балки. При  $x_1 = 0,5$  значения собственных чисел равны  $\lambda_3 = 2,9745$ ,  $\lambda_4 = 4,9772$ , при  $x_1 = 0$  —  $\lambda_3 = 3,9266$ ,  $\lambda_4 = 4,7300$ , в случае однородной балки  $\lambda_4 = 5,4978$ . При наличии шарнира функции  $W_n(x)$  в точке  $x = x_1$  имеют излом, причем максимальные абсолютные значения этих функций могут иметь место как на концах балки, так и в точке шарнирного соединения.

В численных расчетах использовались следующие исходные размерные параметры:  $L = 500$  м,  $d = 5$  м,  $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $H = 20$  м. Во всех проведенных расчетах число мод колебаний балки  $N = 25$ , число гармоник в (2.5)  $K = 200$ , дальнейшее увеличение значений  $N$  и  $K$  практически не оказывает влияния на результат.

Форма локализованной поверхностной волны, набегающей на упругую балку, выбрана в виде

$$f(\xi) = \begin{cases} (a/2)(1 + \cos(\pi\xi/c)), & |\xi| < c, \\ 0, & |\xi| > c, \end{cases}$$

где  $\xi = x - t\sqrt{gH} - x_0$ . Полная энергия такой волны постоянна во времени и равна

$$E_0 = \rho g \int_{-c}^c f^2(\xi) d\xi = \frac{3}{4} \rho g a^2 c.$$

На рис. 3 представлены формы свободной поверхности и балки при  $x_0/L = -1,25$ ,  $c/L = 0,25$  в момент времени  $t\sqrt{g/L} = 10$ . Этот момент времени соответствует прохождению исходной волны под балкой, что приводит к ее деформациям. Видно, что прогибы балки, а также форма свободной поверхности существенно зависят от наличия и положения шарнирного соединения.

В таблице приведены безразмерные значения коэффициентов  $X_0, X_1, \dots, X_7$  и функции  $u$  при  $t\sqrt{g/L} = 10$  для четырех вариантов балки, представленных на рис. 3. Наибольшие значения имеют коэффициенты  $X_0$  и  $X_1$ , которые соответствуют так называемым твердотельным модам. Абсолютные значения функции  $u$  близки к значениям коэффициента  $X_3$ . Из таблицы следует, что с увеличением  $n$  абсолютные значения  $X_n$  достаточно быстро уменьшаются.



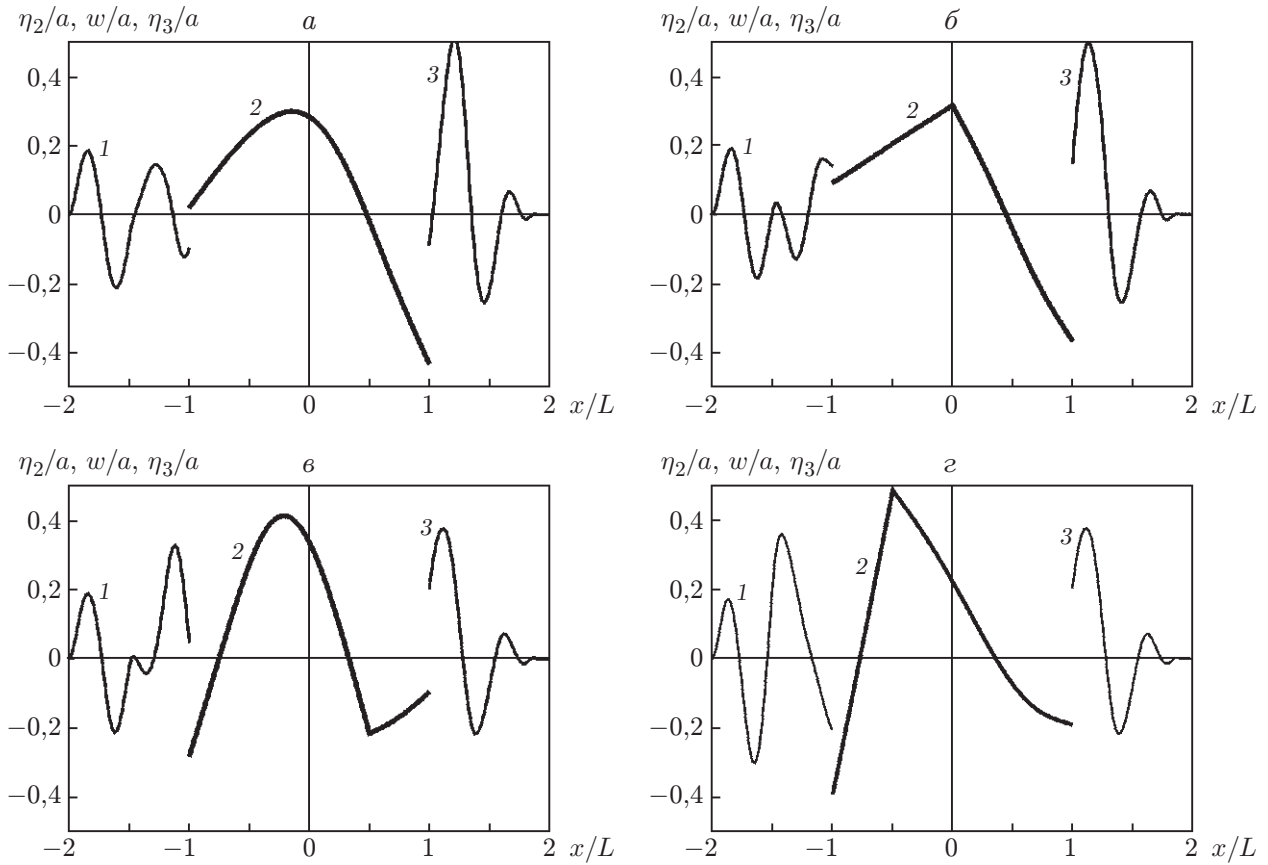


Рис. 3. Формы свободной поверхности и балки при  $t\sqrt{g/L} = 10$ :  
 а — однородная балка; б-г — составная балка (б —  $x_1 = 0$ ; в —  $x_1/L = 0,5$ ; г —  $x_1/L = -0,5$ ); 1 —  $\eta_2/a$ ; 2 —  $w/a$ ; 3 —  $\eta_3/a$

Безразмерные значения коэффициентов  $X_0, X_1, \dots, X_7$  и функции  $u$  при  $t\sqrt{g/L} = 10$  для четырех вариантов балки

Коэффициент	Однородная балка	Составная балка		
		$x_1 = 0$	$x_1/L = 0,5$	$x_1/L = -0,5$
$X_0$	0,164 28	0,179 29	0,155 91	0,172 70
$X_1$	0,145 78	0,146 35	0,206 38	0,175 65
$X_2$	-0,050 50	-0,045 62	-0,017 29	-0,053 48
$X_3$	0,019 49	0,020 07	-0,020 95	0,029 31
$X_4$	-0,003 09	0,011 53	0,000 14	0,011 75
$X_5$	0,000 23	0,000 23	-0,002 72	-0,000 98
$X_6$	0,000 11	0,000 43	-0,000 04	0,000 01
$X_7$	-0,000 01	-0,000 01	-0,000 31	-0,000 05
$u$	-0,015 83	-0,018 83	-0,022 62	-0,020 83

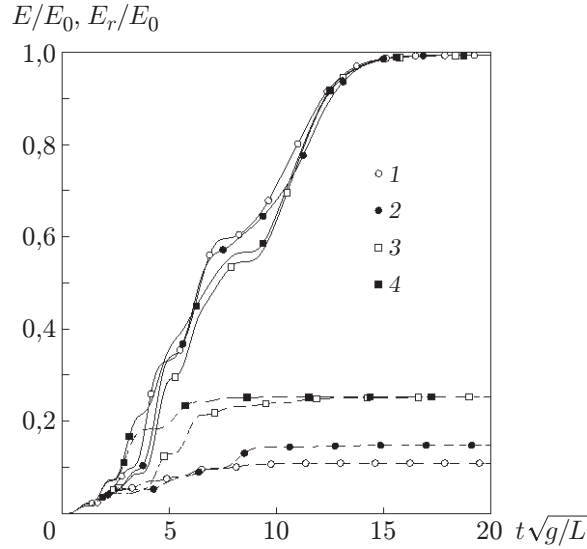


Рис. 4. Зависимости суммарной энергии  $E/E_0$  (сплошные линии) и энергии отраженной волны  $E_r/E_0$  (штриховые линии) от времени:  
 1 — однородная балка; 2–4 — составная балка (2 —  $x_1 = 0$ ; 3 —  $x_1/L = 0,5$ ; 4 —  $x_1/L = -0,5$ )

На рис. 4 для четырех вариантов балки представлены зависимости суммарной энергии проходящей и отраженной волн  $E$  и полной энергии отраженной волны  $E_r$  от времени. Видно, что для всех исследуемых вариантов балки предельное значение суммарной энергии достигается при  $t\sqrt{g/L} \approx 15$ . К этому моменту колебания балки прекращаются и значительная часть первоначальной энергии набегающей волны трансформируется в энергию проходящей волны. Наибольшее рассеяние энергии в отраженной волне имеет место при  $x_1/L = \pm 0,5$  и составляет около 25 % первоначальной энергии, тогда как для однородной балки это значение приблизительно равно 10 %. Промежуточное значение энергии отраженной волны (приблизительно равное 15 %) имеет место при  $x_1 = 0$ . Следовательно, наличие шарнирного соединения может оказывать существенное влияние на трансформацию набегающей волны.

Рассмотрим также нестационарное поведение балки при ее начальной деформации в покоящейся жидкости. Начальные условия для этой задачи имеют вид

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

$$\varphi_j(x, 0) = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad \eta_2(x, 0) = \eta_3(x, 0) = 0.$$

Функция  $w_0(x)$  выбрана в виде

$$w_0(x) = (a/2)(1 + \cos(\pi x/L)).$$

В данной задаче внешняя нагрузка отсутствует и система ОДУ для определения колебаний балки совпадает с системой (2.9) при условии, что  $\alpha(t) \equiv 0$ . Начальные условия для  $X_m(0)$  задаются соотношениями

$$X_m(0) = \int_{-1}^1 w_0(x) W_m(x) dx, \quad \dot{X}_m(0) = 0.$$

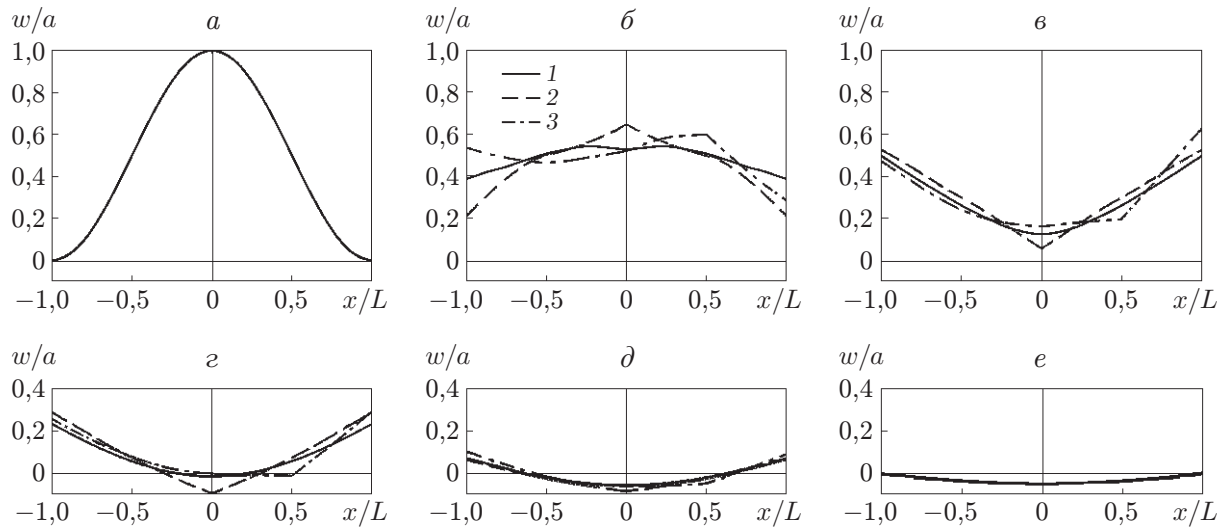


Рис. 5. Деформации балки, вызванные ее начальным возмущением:

$a - t\sqrt{g/L} = 0$ ;  $b - t\sqrt{g/L} = 2,5$ ;  $c - t\sqrt{g/L} = 5$ ;  $d - t\sqrt{g/L} = 7,5$ ;  $e - t\sqrt{g/L} = 10$ ;  
 $f - t\sqrt{g/L} = 12,5$ ; 1 — однородная балка; 2, 3 — составная балка (2 —  $x_1 = 0$ ; 3 —  $x_1/L = 0,5$ )

На рис. 5 показано изменение нормального прогиба балки во времени. Видно, что влияние шарнирного соединения существенно только в начальные моменты времени, при этом прогибы составной балки более значительны, чем прогибы однородной балки (рис. 5, б-г). С увеличением времени колебания балки затухают и наличие шарнира практически перестает оказывать влияние (рис. 5, е).

В данной задаче представляет интерес также исследование поведения собственных значений системы ОДУ (2.9), которую после редуцирования можно записать в матричной форме

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{C}\mathbf{Y} + \mathbf{F}(t),$$

где  $\mathbf{Y} = \{X_0, X_1, \dots, X_{N-1}; \dot{X}_0, \dot{X}_1, \dots, \dot{X}_{N-1}; U\}^T$ ;  $\mathbf{C}$  — квадратная матрица порядка  $2N + 1$  с постоянными элементами; вектор  $\mathbf{F}(t)$  определяется нестационарной нагрузкой.

Собственные значения и собственные векторы матрицы  $\mathbf{C}$  часто называются “мокрыми” модами, в отличие от собственных значений и собственных функций задачи (2.2), называемых “сухими” модами. Свойства “сухих” мод определяются только структурными особенностями балки, в то время как свойства “мокрых” мод зависят также от свойств жидкости, но не зависят от типа нестационарной нагрузки.

Собственные значения матрицы  $\mathbf{C}$  определены численно. Эта матрица имеет одно чисто вещественное собственное значение  $\mu_0$  и  $2N$  комплексно-сопряженных собственных значений  $\mu_k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ ). Вещественные части всех собственных значений отрицательны. Пронумеруем собственные значения по мере возрастания их мнимой части:  $\text{Im } \mu_k < \text{Im } \mu_{k+1}$ . Знак номера  $k$  соответствует знаку мнимой части собственного значения.

На рис. 6 представлены зависимости вещественных и мнимых частей значений  $\mu_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) от координаты шарнира. Видно, что влияние значения  $x_1$  на низшие “мокрые” моды достаточно слабое. Этим можно объяснить тот факт, что при свободных колебаниях балки, вызванных ее начальным возмущением, влияние положения шарнира значительно только при малых временах, когда существенный вклад вносят высшие моды. С увеличением времени влияние этих мод ослабевает, так как они затухают быстрее, чем низшие моды.

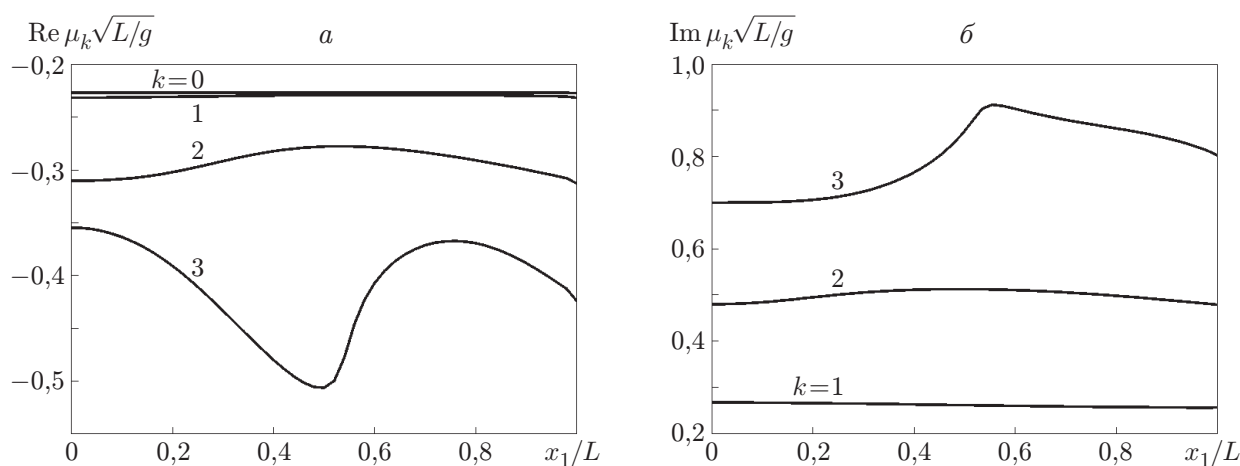


Рис. 6. Зависимости вещественных (а) и мнимых (б) частей собственных значений  $\mu_k$  матрицы  $C$  от координаты шарнира для мод с номерами  $k = 0, 1, 2, 3$

С использованием результатов [10] предложенный метод решения нестационарной задачи может быть распространен на случай составной балки, плавающей на поверхности слоя жидкости бесконечной глубины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Стурова И. В. Дифракция поверхностных волн на неоднородной упругой пластине // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4. С. 42–48.
2. Xia D., Kim J. W., Ertekin R. C. On the hydroelastic behavior of two-dimensional articulated plates // Marine Structures. 2000. V. 13, N 4/5. P. 261–278.
3. Newman J. N. Efficient hydrodynamic analysis of very large floating structures // Marine Structures. 2005. V. 18, N 2. P. 169–180.
4. Karmakar D., Sahoo T. Scattering of waves by articulated floating elastic plates in water of infinite depth // Marine Structures. 2005. V. 18, N 5/6. P. 451–471.
5. Khabakhpasheva T. I., Korobkin A. A. Hydroelastic behaviour of compound floating plate in waves // J. Engng Math. 2002. V. 44, N 1. P. 21–40.
6. Fu S., Moan T., Chen X., Cui W. Hydroelastic analysis of flexible floating structures with rigid-hinge-mode // Proc. of the 4th Intern. conf. on hydroelasticity in marine technology, Wuxi (China), 10–14 Sept. 2006. Beijing: Nat. Defense Industry Press, 2006. P. 235–244.
7. Meylan M. H. Spectral solution of time-dependent shallow water hydroelasticity // J. Fluid Mech. 2002. V. 454. P. 387–402.
8. Стурова И. В. Нестационарное поведение плавающей на мелководье упругой балки под действием внешней нагрузки // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 3. С. 88–98.
9. Черкесов Л. В. Введение в гидродинамику и теорию волн / Л. В. Черкесов, В. А. Иванов, С. М. Хартиев. СПб.: Гидрометеоздат, 1992.
10. Стурова И. В. Нестационарное поведение упругой балки, плавающей на поверхности бесконечно глубокой жидкости // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 1. С. 85–94.

Поступила в редакцию 19/II 2008 г.,  
в окончательном варианте — 11/VI 2008 г.