ПМТФ, № 4, 1967

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ В ЗЕРНИСТОМ СЛОЕ С НЕПРАВИЛЬНОЙ УПАКОВКОЙ

С. И. Кучанов, Л. М. Письмен

(Москва)

При исследовании продольного [1–4] и поперечного [5] перемешивания потока в зернистом слое, описываемом ячеистой моделью, до сих пор предполагалось, что все ячейки идентичны, а параметры функции распределения времени пребывания в отдельной ячейке (далее называемой микрораспределением) строго фиксированы. В реальном зернистом слое с неправильной упаковкой зерен условие идентичности ячеек, очевидно, нарушается, и параметры микрораспределения могут рассматриваться как случайные величины. В настоящей работе исследуется влияние разброса параметров микрораспределения на характеристики процесса продольного и поперечного переноса нейтральной примеси в зернистом слое.

Сохраняя общую структуру ячеистой модели [5], будем предполагать, что газ или жидкость, проходя сквозь слой, перетекает из ячеек каждого горизонтального уровня в ячейки следующего уровня вниз по течению, смещаясь при этом случайным образом в поперечном направлении. Очевидно, что частица примеси, проходя зернистый слой, успевает побывать при этом в одной ячейке из каждого горизонтального уровня. Отказавшись от предположения об идентичности ячеек, будем считать слой однородным, а параметры ячеек, последовательно проходимых частицей примеси,— статистически независимыми. Это допущение означает, что ячейки с различными значениями параметров «хорошо перемешаны», так что внутри слоя нет флуктуаций с протяженностью, значительно превышающей размер ячейки.

Пусть функция распределения времени пребывания в ячейке (микрораспределение) $f(t|s)$ и соответствующая характеристическая функция

$$g(p\,|\,s) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t\,|\,\mathrm{s})\,dt \tag{0.1}$$

зависят от случайного вектора s. Компонентами этого вектора являются различные параметры микрораспределения, меняющиеся случайным образом от ячейки к ячейке. В простейшем случае ячеек идеального смешения есть только один такой параметр — среднее время пребывания в ячейке $s = V / v$, где V — объем ячейки и v — объемная скорость протекающего через него потока. Распределение случайного вектора s будем характеризовать функцией распределения $\varphi(\mathrm{s})$, определяющей плотность вероятности попадания частицы примеси в ячейку с данным значением вектора s. Функцию $\varphi(\mathrm{s})$ будем далее называть параметрическим распределением. Другой характеристикой распределения вектора s могла бы быть функния $\psi(\mathrm{s})$, определяющая плотность вероятности найти данное значение вектора s в ячейке, наугад выбранной из слоя. Первая характеристика удобней для наших целей, так как она непосредственно связана с движением потока и является в некотором смысле динамической, в отличие от второй — статической. Обе функции распределения между собой связаны соотношением

$$\varphi(\mathrm{s}) = \frac{\langle v_\mathrm{s}\rangle}{v_0}\psi(\mathrm{s}), \qquad \varphi(s) = \frac{s_0}{s}\psi(s) \quad \text{при } v_s \sim s^{-1} \tag{0.2}$$

где $\langle v_\mathrm{s}\rangle$ — средняя объемная скорость потока в ячейках с данным значением вектора s, v_0 — средняя объемная скорость потока во всех ячейках и s_0 — усредненное по всем ячейкам значение среднего времени пребывания в ячейке s. Вторая из формул (0.2) получается в частном случае идеального смешения в предположении, что объем ячейки и объемная скорость проходящего через нее потока некоррелированы. Согласно (0.2), вероятность попадания частицы примеси в ячейки с малыми средними временами пребывания будет значительно больше, чем доля таких ячеек в слое. Обратное положение будет иметь место для ячеек с большими значениями s.

1. Продольный перенос. Рассмотрим сначала процесс продольного переноса нейтральной примеси. Пусть индекс k указывает номер горизонтальной плоскости вдоль по направлению движения потока. Требуется определить вероятность того, что частица примеси, запущенная в одну из ячеек плоскости $k = 0$, выйдет из любой ячейки плоскости $k = n$ спустя время t. Соответствующую плотность вероятности назовем макрораспределением и обозначим через $F_n(t)$. Важнейшие характеристики макрораспределения, которые будут нас интересовать,— это его дисперсия и коэффициент асимметрии, характеризующий отклонение макрораспределения от нормального закона. Эти величины легче всего найти, исходя из характеристической функции макрораспределения $G_n(p)$, связанной с $F_n(t)$ соотношением, аналогичным (0.1).

Рассмотрим некоторую случайную траекторию частицы примеси, проходящую через ячейки со значениями s_k ($k = 1,2,\ldots, n$) случайного вектора s. Функция распределения времени пребывания, соответствующая этой траектории, определяется тем же способом, что и для одномерной цепи ячеек. Так как времена пребывания в последовательно проходимых ячейках взаимонезависимы, характеристическая функция для данной траектории имеет вид

$$G_n(p \mid \mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2, \ldots, \mathrm{s}_n) = \prod_{k=1}^{n} g(p \mid \mathrm{s}_k) \tag{1.1}$$

Чтобы найти характеристическую функцию макрораспределения, достаточно провести суммирование по всем траекториям

$$\langle G_n(p)\rangle = \int \ldots \int \varphi(\mathrm{s}_1, \ldots, \mathrm{s}_n) \prod_{k=1}^{n} g(p \mid \mathrm{s}_k)\, d\mathrm{s}_k \tag{1.2}$$

где интегрирование проводится по всей области изменения вектора s. Строго говоря, под $\langle G_n(p)\rangle$, определенной таким образом, следует понимать характеристическую функцию макрораспределения, усредненную по ансамблю реализаций зернистого слоя. Однако, если число ячеек в слое достаточно велико, эта функция будет практически одинаковой для всех его реализаций.

Согласно сделанному выше предположению о статистической независимости параметров последовательно проходимых ячеек,

$$\varphi(\mathrm{s}_1, \ldots, \mathrm{s}_n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(\mathrm{s}_k), \qquad \langle G_n(p)\rangle = \left[\int g(p \mid \mathrm{s})\, \varphi(\mathrm{s})\, d\mathrm{s}\right]^n = \langle g(p \mid \mathrm{s})\rangle^n \tag{1.3}$$

где угловые скобки обозначают усреднение по параметрическому распределению. Рассмотрим следующие основные характеристики макрораспределения: среднее время пребывания в слое, дисперсию, третий центральный момент и коэффициент асимметрии Sk_n, характеризующий отклонение макрораспределения от нормального закона. Три первых величины совпадают с семивариантами макрораспределения $\varkappa_j$ ($j = 1, 2, 3$), а последняя равна $\varkappa_3, \varkappa_2^{-3/2}$. Воспользовавшись формулой для семивариантов случайной величины

$$\varkappa_n = (-1)^j \left[\frac{d^j}{dp^j} \ln \langle G_n(p) \rangle\right]_{p=0} = (-1)^j n \left[\frac{d^j}{dp^j} \ln \langle g(p \mid \mathrm{s}) \rangle\right]_{p=0} \tag{1.4}$$

и формулой для моментов характеристической функции микрораспределения,

$$\alpha_j(\mathrm{s}) = (-1)^j \left[\frac{d^j g(p \mid \mathrm{s})}{dp^j}\right]_{p=0} \tag{1.5}$$

находим

$$\varkappa_{1n} = -n \left[\frac{d}{dp} \ln \langle g(p \mid \mathrm{s}) \rangle\right]_{p=0} = n \langle \alpha_1(\mathrm{s}) \rangle$$

$$\varkappa_{2n} = n \left[\langle \alpha_2(\mathrm{s}) \rangle - \langle \alpha_1(\mathrm{s}) \rangle^2\right]$$

$$\varkappa_{3n} = n \left[\langle \alpha_3(\mathrm{s}) \rangle - 3 \langle \alpha_2(\mathrm{s}) \rangle \langle \alpha_1(\mathrm{s}) \rangle + 2 \langle \alpha_1(\mathrm{s}) \rangle^3\right] \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Sk}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\langle \alpha_3 \rangle - 3 \langle \alpha_2 \rangle \langle \alpha_1 \rangle + 2 \langle \alpha_1 \rangle^3}{(\langle \alpha_2 \rangle - \langle \alpha_1 \rangle^2)^{3/2}}$$

Таким образом, характеристики макрораспределения связаны со средними моментами микрораспределения.

Рассмотрим конкретный случай ячеек идеального смешения. Здесь существует единственный случайный параметр —среднее время пребывания в ячейке s. При этом

$$g(p \mid s) = (1 + ps)^{-1}, \ \alpha_1 = s, \ \alpha_2 = 2s^2, \ \alpha_3 = 6s^3 \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.6), находим

$$\varkappa_{1n} = n \langle s \rangle = n \int_0^\infty s\varphi(s)\, ds = ns_0$$

$$\varkappa_{2n} = n (2 \langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2) = n (2\nu_2 + s_0^2) = ns_0^2 (1 + 2\gamma)$$

$$\varkappa_{3n} = 2n (3\nu_3 + 6\nu_2 \mathrm{s}_0 + \mathrm{s}_0^3) \tag{1.8}$$

$$\mathrm{Sk}_n = \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{s}_0^3 + 6\mathrm{s}_0\nu_2 + 3\nu_3}{(\mathrm{s}_0^2 + 2\nu_2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{1 + 6\gamma + 3\sigma\gamma^{3/2}}{(1 + 2\gamma)^{3/2}}$$

$$\gamma = \nu_2 \mathrm{s}_0^{-2}, \quad \sigma = \nu_3 \nu_2^{-3/2}, \quad \nu_j = \int_0^\infty (\mathrm{s} - \mathrm{s}_0)^j \varphi(\mathrm{s})\, d\mathrm{s}$$

где ν_j — j-й центральный момент параметрического распределения, а γ и σ — соответственно дисперсия и коэффициент асимметрии этого распределения.

В системе идентичных ячеек дисперсия макрораспределения равна ns_0^2. Из (1.8) видно, что прирост дисперсии макрораспределения за счет неоднородности ячеек пропорционален дисперсии параметрического распределения ν_2. Исследуя выражение для коэффициента асимметрии макрораспределения в (1.8), нетрудно заметить, что в двух предельных случаях эта формула допускает упрощения

$$\mathrm{Sk}_n = \frac{2}{\sqrt{n}}(1 + 3\gamma^{3/2}\sigma) \quad \text{при } \gamma \ll 1, \qquad \mathrm{Sk}_n = \frac{3\sigma}{\sqrt{2n}} \quad \text{при } \gamma \gg 1 \tag{1.9}$$

Пусть m — такое число ячеек по длине слоя, что $\mathrm{Sk}_m = 1$. Очевидно, что если число ячеек по длине слоя значительно превышает m, то макрораспределение близко к нормальному. Формулы (1.9) позволяют выразить число m через характеристики параметрического распределения. Из формул (1.9) видно, что число m может быть велико по сравнению с единицей только в том случае, если параметрическое распределение сильно асимметрично. При этом положительная асимметрия параметрического распределения, соответствующая наличию в слое значительного числа ячеек с очень большими средними временами пребывания (т. е. почти застойных), приводит к положительной асимметрии макрораспределения, соответствующей появлению макрораспределений с длинными «хвостами».

Влияние характеристик параметрического распределения на форму макрораспределения можно наглядно проследить на примере бимодального распределения

$$\varphi(s) = a\delta(s - s_1) + (1 - a)\,\delta(s - s_2) = a\delta(s - s_0 - (1 - a)\Delta s) + \\ + (1 - a\delta)(s - s_0 - a\Delta s) \tag{1.10}$$

Здесь $\Delta s = s_2 - s_1$ — разность между средними временами пребывания s_1 и s_2 в двух группах ячеек, a — вероятность попадания в ячейки первой группы и $\delta(s - s_i)$ — δ-функция Дирака.

Для распределения (1.10) имеем

$$\nu_2 = \Delta s^2 a(1 - a), \qquad \nu_3 = \Delta s^3 a(1 - a)(2a - 1), \qquad \gamma = \beta^2(1 - a)\,a,$$

$$\sigma = (2a - 1)/\sqrt{a(1 - a)}, \qquad \beta = s_0^{-1}\Delta s \tag{1.11}$$

Поскольку s_1 должно быть положительным, то всегда $\beta^{-1} > 1 - a$. Формулы для дисперсии и коэффициента асимметрии макрораспределения принимают теперь вид

$$\varkappa_{2n} = ns_0^2\,[1 + 2\beta^2 a(1 - a)]$$

$$\mathrm{Sk}_n = \frac{2}{\sqrt{n}}\,\frac{1 + 6\beta^2 a(1 - a)\,[1 + \beta(a - 1/2)]}{[1 + 2\beta^2 a(1 - a)]^{3/2}} \tag{1.12}$$

При $\beta \ll 1$ дисперсия и коэффициент асимметрии макрораспределения практически те же, что в аналогичной системе идентичных ячеек. В случае $\beta \gg 1$ характеристики макрораспределения существенно зависят от величины a. Можно вывести из (1.12) следующие приближенные формулы для трех различных областей изменения a:

$$\varkappa_{2n}/ns_0^2 = 2\beta^2(1 - a) \sim \beta \gg 1$$

$$\mathrm{Sk}_n = 3/\sqrt{n(1 - a)} \sim \sqrt{\beta/n} \quad \text{при } \beta^{-2} \ll 1 - a \lesssim \beta^{-1} \tag{1.13}$$

$$\varkappa_{2n}/ns_0^2 \sim 1, \quad \mathrm{Sk}_n = 3\beta^3(1 - a)/\sqrt{n} \sim \beta/\sqrt{n} \quad \text{при } \beta^{-3} \ll 1 - a \lesssim \beta^{-2} \tag{1.14}$$

$$\varkappa_{2n}/ns_0^2 = 1, \quad \mathrm{Sk}_n = 2/\sqrt{n} \quad \text{при } 1 - a \lesssim \beta^{-3} \tag{1.15}$$

В первой области, согласно формуле (1.13), разброс параметров ячеек приводит к значительному увеличению дисперсии макрораспределения, по сравнению с системой идентичных ячеек. При этом $m \sim \beta$, и нормальное распределения может устанавливаться только в достаточно длинном слое. Во второй области, где справедливы формулы (1.14), дисперсия макрораспределения имеет тот же порядок, что и соответствующая величина для системы идентичных ячеек, но асимметрия макрораспределения значительна, так что $m \sim \beta^2$, и приближение к нормальному закону идет весьма медленно. Наконец, при еще меньшей доле ячеек, с большими средними временами пребывания, согласно (1.15), как дисперсия, так и коэффициент асимметрии макрораспределения становятся такими же, как в системе идентичных ячеек, и неоднородность слоя перестает проявляться.

Приведенные результаты можно использовать для определения характеристик макрораспределения по экспериментальным наблюдениям функции распределения времени пребывания в слое. При обработке экспериментальных данных может, однако, возникнуть вопрос: обязано ли увеличение дисперсии и асимметрии макрораспределения неоднородности ячеек или задержке нейтральной примеси в застойных зонах [3,4]. Для решения этого вопроса можно воспользоваться следующими критериями. Во-первых, влияние застойных зон всегда приводит, наряду с увеличением дисперсии, к появлению асимметричных (при умеренном n) макрораспределений. В то же время разброс параметров ячеек может вызвать увеличение дисперсии макрораспределения, не приводя к существенному отклонению его формы от нормального закона. Во-вторых, действие застойных зон существенно связано с природой потока и проявляется в жидкостях гораздо сильнее, чем в газах [4]. Если же асимметрия макрораспределения вызвана асимметрией параметрического распределения, то этот эффект будет чисто гидродинамическим и должен быть при равных условиях одинаковым для жидких и газовых потоков.

2. Поперечный перенос. Рассмотрим задачу о поперечном переносе примеси, запущенной в некоторую ячейку слоя. Под макрораспределением $F_n(x, t)$ будем теперь понимать вероятность найти частицу примеси, запущенную в ячейку с координатой $x = 0$ в горизонтальной плоскости $k = 0$ в момент $t = 0$, в ячейке с координатой x в плоскости $k = n$ в момент t (так как горизонтальные плоскости изотропны, достаточно следить за поперечным смещением частицы только вдоль одной координатной оси x). Все интересующие нас свойства макрораспределения можно найти из анализа двумерной характеристической функции

$$G_n(\lambda, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, dx \int_0^{\infty} e^{-pt} F_n(x, t)\, dt \qquad (2.1)$$

Двумерная характеристическая функция для траектории, проходящей через n ячеек зернистого слоя, будет произведением двумерных характеристических функций следующих элементарных событий: (а) n переходов из ячейки k-й горизонтальной плоскости в ячейку $(k + 1)$-й плоскости $(k = 0, 1,\ldots, n)$ с поперечным смещением на расстояние l_k под случайным углом α к оси x и (б) задержка в n-й ячейке.

Сказанное оправдано тем, что все упомянутые элементарные события взаимно независимы.

Время пребывания в отдельной ячейке, равное интервалу между двумя последовательными переходами, и направление поперечного смещения также, очевидно, независимы, и потому двумерная характеристическая функция каждого из событий (а) будет произведением одномерных.

Считая, что угол направления поперечного смещения с осью x распределен равномерно в интервале $(0, \pi)$, находим, что вероятность смещения вдоль оси x на расстояние от x до $x + dx$ при одном переходе с шагом l_k определяется следующим выражением

$$dx / \pi\sqrt{l_k^2 - x^2}, \qquad -l_k \leqslant x \leqslant l_k \qquad (2.2)$$

Отсюда находим координатную характеристическую функцию события (а)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l_k}^{l_k}\frac{e^{i\lambda x}\,dx}{\sqrt{l_k^2-x^2}}=J_0(\lambda l_k) \tag{2.3}$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого индекса.

Соответствующая временная характеристическая функция совпадает с характеристической функцией микрораспределения $g(p\,|\,s_k)$. Характеристическая функция события (б) имеет только временной множитель и равна $(1-g)\,/\,p$.

Рассмотрим фиксированную траекторию, проходящую через ячейки со значениями s_k вектора параметров и идущую с поперечным смещением на расстояние l_k при каждом переходе. Для этой траектории двумерная характеристическая функция равна в силу вышесказанного

$$G_n(\lambda, p\,|\,s_0, s_1, \ldots, s_n)=\frac{1}{p}\,[1-g(p\,|\,s_n)]\prod_{k=0}^{n-1}g(p\,|\,s_k)\,J_0(\lambda l_k) \tag{2.4}$$

Чтобы найти двумерную характеристическую функцию макрораспределения, усредненную по ансамблю реализаций зернистого слоя, надо провести суммирование по всем возможным траекториям. Используя, как и в п. 1, предположение об однородности слоя, приводящее к взаимной независимости параметров s_k и l_k в последовательно проходимых ячейках, имеем

$$\langle G_n(\lambda, p)\rangle = p^{-1}\,[1-\langle g(p\,|\,s)\rangle]\,\langle g(p\,|\,s)\,J_0(\lambda l)\rangle^n \tag{2.5}$$

где, как и раньше, угловые скобки обозначают усреднение по параметрическому распределению, так что

$$\langle a(p, \lambda\,|\,s, l)\rangle = \int a(p, \lambda\,|\,s, l)\,\varphi(s, l)\,ds\,dl \tag{2.6}$$

Здесь интегрирование проводится по всей области изменения значения параметров s, l.

При исследовании процесса поперечного переноса рассмотрим, как и в работе [5], вероятность обнаружения частицы в данный момент времени в ячейке с заданной поперечной координатой, независимо от ее положения по продольной оси. Чтобы найти соответствующую двумерную функцию поперечного макрораспределения, необходимо просуммировать (2.5) по n

$$\langle G(\lambda, p)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle G_n(\lambda, p)\rangle = \frac{1}{p}\,\frac{1-\langle g(p\,|\,s)\rangle}{1-\langle g(p\,|\,s)\,J_0(\lambda l)\rangle} \tag{2.7}$$

Дифференцируя (2.7), нетрудно найти трансформанты Лапласа моментов поперечного макрораспределения

$$\mu_j(p)=i^{-j}\left[\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\langle G(\lambda, p)\rangle\right]_{\lambda=0} \tag{2.8}$$

В силу симметрии, только четные моменты отличны от нуля. В частности, для дисперсии поперечного макрораспределения имеем

$$\mu_2(p)=\frac{\langle l^2 g(p\,|\,s)\rangle}{2p\,(1-\langle g(p\,|\,s)\rangle)} \tag{2.9}$$

Если считать параметры микрораспределения фиксированными и положить $l = \sqrt{2}$, эта формула совпадает с соответствующим выражением из [5]. Как было показано в работе [5], функция (2.9) не имеет особенностей в правой полуплоскости и на мнимой оси, а в точке $p = 0$ имеет полюс второго порядка. Следовательно, асимптотическое выражение для дисперсии $\mu_2(t)$ имеет вид

$$\mu_2(t) = \operatorname{Res}\left[\frac{e^{pt}\langle l^2 g(p\,|\,s)\rangle}{2p(1-\langle g(p\,|\,s)\rangle)}\right]_{p=0} = \frac{\langle l^2\rangle}{2}\frac{t}{\langle\alpha_1\rangle} + \frac{\langle l^2\rangle}{2}\frac{\langle\alpha_2\rangle}{2\langle\alpha_1\rangle^2} - \frac{\langle l^2\alpha_1\rangle}{2\langle\alpha_1\rangle} \tag{2.10}$$

где α_i — моменты микрораспределения, определенные согласно (1.5).

Аналогичным образом определяется асимптотическое выражение для четвертого момента поперечного макрораспределения. При этом, как и в работе [5], оказывается, что коэффициент эксцесса поперечного распределения стремится к нулю при $t \to \infty$. Таким образом, на достаточно больших временах устанавливается нормальное распределение с дисперсией $t < l^2 >/2s_0$, не зависящей ни от формы микрораспределения, ни от формы параметрического распределения и определяющейся только среднеквадратичным поперечным смещением при каждом переходе (т. е. средней структурой упаковки слоя) и средним по слою значением среднего времени пребывания в ячейке s_0. Форма параметрического распределения может влиять на время установления нормального закона.

Функцию макрораспределения в стационарном режиме $< F_n(x) >$ можно получить из функции $< F_n(x, t) >$, проинтегрировав ее по t от 0 до ∞. Соответствующая характеристическая функция $< G_n(\lambda) >$ сразу получается из (2.5), если положить там $p = 0$

$$\langle G_n(\lambda)\rangle = s_0^{-1}\langle G_n(0, \lambda)\rangle = \langle J_0(\lambda l)\rangle^n \tag{2.11}$$

Из (2.11) видно, что в стационарном режиме вид функции микрораспределения, а тем более разброс ее параметров, несуществен. Нетрудно найти из (2.11) дисперсию, четвертый момент и коэффициент эксцесса стационарного макрораспределения

$$\mu_{2n} = {}^1\!/_2\, n\langle l^2\rangle, \quad \mu_{4n} = {}^3\!/_8\, n\langle l^4\rangle + {}^3\!/_4\, n(n-1)\langle l^2\rangle^2$$

$$\mathrm{Ex}_n = \frac{\mu_{4n}}{\mu_{2n}^2} - 3 = \frac{3}{2n}\left(\frac{\langle l^4\rangle}{\langle l^2\rangle^2} - 2\right) = \frac{3}{2n}(\chi+1) \quad \left(\chi = \frac{\langle l^4\rangle}{\langle l^2\rangle^2} - 3\right) \tag{2.12}$$

где χ — эксцесс распределения длины шага l. Очевидно, при $< l^4 > \sim < l^2 >^2$ на умеренных расстояниях от точки впуска примеси всегда устанавливается нормальное распределение с дисперсией, пропорциональной n и $< l^2 >$. Только при значительном эксцессе распределения длины шага (что физически маловероятно) нормальное распределение будет устанавливаться на больших расстояниях от точки впуска примеси.

Авторы благодарят В. Г. Левича за интерес к работе и полезные обсуждения.

Поступила 7 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Kramers H., Alberda G. Frequensy response analysis of continuous flow systems. Chem. Engng. Sci., 1953, vol. 2, No. 3.
2. Amundson N. R., Aris R. Some remarks on longitudinal mixing or diffusion in fixed beds. Amer. Instit. Chem. Engrs. J., 1957, vol. 3, p. 280.
3. Левич В. Г., Письмен Л. М., Кучанов С. Гидродинамическое перемешивание в зернистом слое. Физическая модель застойных зон. Докл. АН СССР, 1966, т. 168, № 2.
4. Письмен Л. М., Кучанов С. И., Левич В. Г. Поперечная диффузия в зернистом слое. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 3.