

ОБ УРАВНЕНИИ ТЕРМОЭЛЕКТРОННОЙ ЭМИССИИ В ПЛАЗМУ

*И. Н. Острецов, В. А. Петросов, А. А. Поротников,
Б. Б. Родневич*

(Москва)

Рассматривается уравнение термоэлектронной эмиссии с горячих катодов в присутствии низкотемпературной плазмы. Получена функция распределения для величины напряженности электрического поля на поверхности катода с учетом влияния индивидуальных полей отдельных ионов, движущихся в прикатодном слое. Найдена плотность тока термоэмиссии, обусловленная флуктуациями поля, которая оказалась существенно выше, чем вычисленная по формуле Ричардсона с поправкой Шоттки.

Классическая формула Ричардсона с поправкой Шоттки для плотности тока термоэмиссии

$$j_0 = AT^2 \exp \left[- \frac{e\varphi_0}{kT} + \frac{e \sqrt{eE}}{kT} \right] \quad (1)$$

где A — термоэмиссионная постоянная, T — температура катода, e — заряд электрона, φ_0 — работа выхода, k — постоянная Больцмана, E — напряженность поля на катоде, применима, если известна величина напряженности электрического поля у поверхности катода. В случае эмиссии электронов в вакуум поле E определяется как действующее в данный момент времени поле в данной точке катода. В случае эмиссии электронов в плазму для вычисления плотности тока также часто используют формулу (1), в которой под величиной E понимают среднее электрическое поле на поверхности катода, найденное из решения уравнения Пуассона в предположениях Маккоуна. Такая процедура нахождения плотности тока эмиссии в присутствии плазмы вызывает большие сомнения. В работе [1] было предложено при вычислении тока термоэмиссии по формуле (1) учитывать помимо среднего поля индивидуальные поля отдельных ионов, движущихся в прикатодной области. Остановимся на этом подробнее.

Между «горячим» катодом и нейтральной плазмой находится область нескомпенсированного объемного заряда ионов. Ионы, двигаясь к катоду, создают на его поверхности флуктуирующее электрическое поле, величина которого в каждой точке катода зависит от числа ионов, находящихся вблизи нее, и от их расположения. Подчеркнем, что на величину электрического поля в произвольной точке катода оказывают влияние только те ионы, заряд которых не скомпенсирован для этой точки, т. е. ионы, находящиеся в слое экранирования катода. В случае низкотемпературной плазмы, когда концентрация заряженных частиц находится в диапазоне от 10^{13} до 10^{18} см⁻³, лишь небольшое число ионов будет определять величину и направление электрического поля в произвольной точке катода; тогда флуктуации электрического поля на поверхности катода будут значительными и использование величины среднего поля в формуле (1) весьма проблематично, тем более что зависимость j от E сильно нелинейная.

Чтобы вычислить плотность тока термоэмиссии, используя формулу (1), строго говоря, необходимо для произвольной точки катода знать зависимость напряженности электрического поля от времени $E(t)$. Если же

поле E является случайной величиной, которая в каждый определенный момент времени может принимать значения от своей минимальной величины до максимальной E_* , то можно обойтись и без знания функции $E(t)$. Такой вероятностный подход, по-видимому, можно считать приемлемым, так как поле в произвольной точке катода создается ионами, координаты которых являются случайными величинами. Таким образом, для описания процесса термоэлектронной эмиссии в плазму необходимо знать функцию распределения электрического поля у поверхности катода $f(E)$.

Найдем функцию распределения $f(E)$ при следующих предположениях:

- 1) рассматриваемая точка катода находится далеко от боковых границ разряда, т. е. краевые эффекты не существенны;
- 2) поверхность катода плоская и без шероховатостей;
- 3) все ионы рекомбинируют на поверхности катода;
- 4) вероятность нахождения иона в любой фиксированной области прикатодного пространства пропорциональна объему этой области и не зависит от того, находятся там уже ионы или нет;
- 5) концентрация ионов в прикатодной области считается постоянной;
- 6) напряженность электрического поля в данной точке катода зависит только от положения «ближайшего» к этой точке иона.

Поместим в рассматриваемую точку катода начало координат, оси x и y расположим в плоскости катода, а ось z направим перпендикулярно ей в сторону плазмы.

Если в точке с координатами $\mathbf{r}(x, y, z)$ находится положительный ион с зарядом q , то в точке $(0, 0, 0)$ он создает с учетом своего зеркального изображения поле

$$\mathbf{E} = -\frac{qr}{r^2 \cdot \mathbf{r}} - \frac{qr_1}{r_1^2 \mathbf{r}_1}$$

Абсолютная величина составляющей поля вдоль оси z равна

$$E_z = \frac{2q}{r^2} \frac{z}{r}$$

Рассмотрим две поверхности S_1 и S_2 , уравнения которых имеют вид

$$E = 2qz(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \quad (2)$$

$$E - dE = 2qz(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) характеризуют поверхности с постоянными составляющими поля вдоль оси z . Объем тела, заключенного внутри поверхности S_1 , равен

$$V_1 = \frac{4\pi}{15} \left(\frac{2q}{E} \right)^{3/2} \quad (4)$$

Объем тела, заключенного между поверхностями S_1 и S_2 , равен

$$V_2 = \frac{2\pi}{5} \frac{(2q)^{3/2}}{E^{3/2}} dE \quad (5)$$

Чтобы составляющая напряженности электрического поля вдоль оси z была в диапазоне от E до $E - dE$, необходимо выполнение двух условий: нет ни одного иона внутри поверхности S_1 и есть один ион между поверхностями S_1 и S_2 , т. е.

$$p(E - dE \leq E_z \leq E) = f(E) dE = p_1 p_2 \quad (6)$$

где p_1 — вероятность того, что внутри поверхности S_1 нет ни одного иона, p_2 — вероятность того, что между поверхностями S_1 и S_2 есть один ион.

Рассмотрим куб, центр одной из граней которого совпадает с началом координат. Пусть характерный размер этого куба таков, что его объем V_0 значительно больше объема V_1 , т. е.

$$V_1 / V_0 \ll 1 \quad (7)$$

Отношение V_1 / V_0 становится равным 0.1 уже при $E \sim 10^4$ в/см, т. е. при таких полях, когда они еще не оказывают влияние на термоэмиссию, в то время как размер куба не превышает величины порядка радиуса Дебая; при возрастании поля E соотношение (7) тем более будет выполняться. Пусть в объеме V_0 находится N ионов. Рассмотрим, как запишутся в этом случае вероятности p_1 и p_2

$$p_1 = (1 - V_1 / V_0)^N$$

В силу неравенства (7) и учитывая, что величина N связана с концентрацией ионов в прикатодной области соотношением

$$n = N/V_0 \quad (8)$$

а V_1 выражается по формуле (4), получим

$$p_1 = \exp\left(-N \frac{V_1}{V_0}\right) = \exp\left[-\frac{4\pi n}{15} \left(\frac{2q}{E}\right)^{3/2}\right] \quad (9)$$

Легко показать, что p_2 записывается в виде

$$p_2 = N \frac{V_2}{V_0} \left(1 - \frac{V_2}{V_0}\right)^{N-1}$$

С учетом (5) и (8) получим

$$p_2 = \frac{2\pi n}{5} \frac{(2q)^{3/2}}{E^{3/2}} dE \left[1 - \frac{1}{V_0} \frac{2\pi}{5} \frac{(2q)^{3/2}}{E^{3/2}} dE\right] \quad (10)$$

Перепишем соотношение (6), подставив туда выражения для p_1 и p_2 из (9) и (10)

$$f(E) dE = \exp\left[-\frac{4\pi n}{15} \left(\frac{2q}{E}\right)^{3/2}\right] \frac{2\pi n}{5} \frac{(2q)^{3/2}}{E^{3/2}} dE \left[1 - \frac{2\pi}{5V_0} \frac{(2q)^{3/2}}{E^{3/2}} dE\right]$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, окончательно получим искомую функцию распределения

$$f(E) = \frac{2\pi n}{5} \frac{(2q)^{3/2}}{E^{3/2}} \exp\left[-\frac{4\pi n}{15} \left(\frac{2q}{E}\right)^{3/2}\right] \quad (11)$$

Зависимость $f(E)$ для различных концентраций показана на фигуре.

Отметим, что распределения, аналогичные (11), можно получить из несколько иных соотношений. Так, в космической астрофизике часто встречается задача, где требуется найти функцию распределения ближайшего соседа к данной материальной точке $f(r)$ при известной концентрации частиц. Чандрасекаром [2] было получено это распределение

$$f(r) = 4\pi n r^2 \exp(-4\pi n r^3 / 3)$$

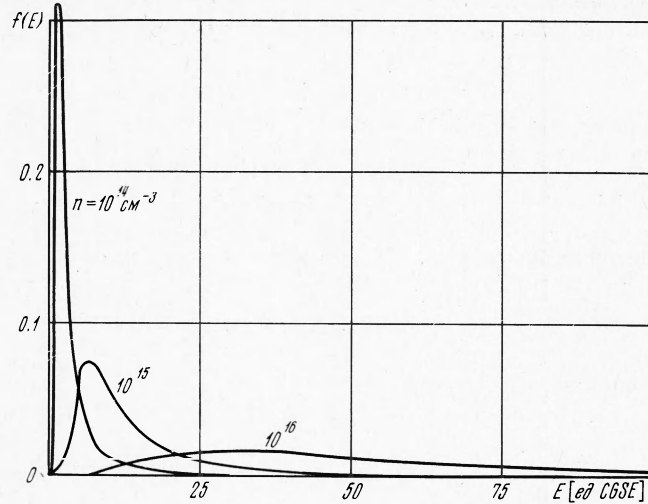
Если рассматривать случай заряженных частиц, то в данной точке ближайший сосед будет создавать электрическое поле

$$E = q / r^2$$

Тогда, используя аппарат теории вероятностей, можно получить

$$f(E) = 2\pi n \frac{q^{3/2}}{E^{3/2}} \exp \left[-\frac{4\pi n}{3} \left(\frac{q}{E} \right)^{3/2} \right] \quad (12)$$

Сравнение выражений (11) и (12) показывает, что в распределение (11) входит член $n2\sqrt{2}/5$ вместо n , т. е. в данном случае как бы происходит уменьшение эффективной концентрации частиц в $5/2\sqrt{2}$ раз (если бы не учитывалось влияние изображения иона, то уменьшение концентрации про-



изошло бы в 5 раз). Это объясняется тем, что рассматривалось распределение только нормальной к поверхности катода составляющей напряженности электрического поля, а не абсолютной величины; кроме того, учитывалось влияние частиц, расположенных лишь при $z > 0$, а не во всем пространстве. Все это приводит к тому, что эффективная концентрация $n_* = n2\sqrt{2}/5$ (без учета изображения иона $n_* = n/5$).

Обсудим вкратце предположения, при которых получена функция распределения $f(E)$. Предположение 1) справедливо для термоэмиссионных катодов при токах разряда порядка 1 а и выше, так как характерный размер пятна в этом случае намного больше толщины прикатодного слоя (точнее, области нескомпенсированного объемного заряда ионов). Предположение 2), вообще говоря, никогда не выполняется строго, но в работе [3] показано, что при длительном прогреве вольфрамовых электродов увеличение напряженности среднего поля, обусловленное наличием неровностей, становится равным примерно 10, по сравнению с гладкой поверхностью; в целом же картина над поверхностью катода в рассматриваемом случае не меняется, так как в отличие от среднего поля флуктуации остаются теми же. Предположение 3) не может принципиально повлиять на характер функции распределения; в случае учета отражения ионов от поверхности катода эффективная концентрация ионов в прикатодном слое возрастет. Предположение 4) достаточно хорошо выполняется вплоть до величины объема, сравнимого с эффективным объемом иона, подсчитанным через соответствующее кулоновское сечение, т. е. с $V \geq 10^{-21} \text{ см}^3$. Предположение 5) должно достаточно хорошо выполняться на тех расстояниях, где величина прикатодного падения потенциала меньше температуры ионов в объеме плазмы. Так как в реальных условиях это отношение порядка нескольких единиц, то концентрация может измениться

не более чем в 2 ÷ 3 раза. Это несколько отразится на характере функции распределения для области малых полей, в области сильных полей изменений практически не будет. С другой стороны, возможны условия, когда это влияние может оказаться значительным. Поэтому область применимости предположения 5) требует уточнения. Предположение 6) хорошо выполняется для полей $E > 2 \cdot 10^4$ в/см при $n > 10^{18}$ см⁻³, так как если подсчитать функцию распределения «второй» частицы $f_2(E)$, то оказывается, что $f_2(E) / f(E) < 0.1$ при $E > 2 \cdot 10^4$ в/см. Таким образом, распределение (11) достаточно хорошо описывает поведение нормальной составляющей электрического поля при $n = (10^{13} \div 10^{18})$ см⁻³. Определим теперь среднее значение тока термоэлектронной эмиссии, подсчитанное по распределению (11) ¹

$$j = \int_0^{E_*} j_0(E) f(E) dE \quad (13)$$

После вычислений приближенно имеем

$$j = AT^2 \exp\left(-\frac{e\varphi_0}{kT}\right) \left[1 + \frac{4\pi nkT}{5E_*^2} \exp\left(\frac{e\sqrt{eE_*}}{kT}\right)\right] \left(1 + \frac{4kT}{e\sqrt{eE_*}}\right) \quad (14)$$

Представляет интерес зависимость j от среднего значения напряженности электрического поля $\langle E \rangle$

$$j = AT^2 \exp\left(-\frac{e\varphi_0}{kT}\right) \left[1 + \frac{3kT \langle E \rangle^{3/2}}{2\Gamma(1/3) e \sqrt{eE_*^2}} \exp\left(\frac{e\sqrt{eE_*}}{kT}\right)\right] \left(1 + \frac{4kT}{e\sqrt{eE_*}}\right) \quad (15)$$

где $\langle E \rangle$ определяется по формуле

$$\langle E \rangle = \int_0^{E_*} E f(E) dE = \left(\frac{4\pi n q^{3/2}}{15}\right)^{2/3} \Gamma(1/3) \quad (16)$$

В формулы (14) и (15) входит величина E_* , т. е. максимально возможное значение напряженности поля в данной точке. Оно зависит от того, на каком минимальном расстоянии r_* от поверхности катода ион еще отделен от него. В работе [4] его считают равным $2 \cdot 10^{-8}$ см. По оценкам, приведенным в [5], это расстояние можно считать равным 10^{-8} см. В работе [6] рассматривается расстояние r_* , равное длине волны Де-Бройля $0.9 \cdot 10^{-9}$ см. Расчеты по формуле (14) показали, что даже если взять наибольшее из рассмотренных значение r_* , что соответствует минимальному значению E_* , то токи эмиссии, извлекаемые из катода, оказываются значительно выше, чем вычисленные по формуле (1).

Таким образом, ввиду невозможности получения зависимости $E = E(t)$ для произвольной точки катода, так как напряженность поля в ней является случайной величиной, необходимо строить функцию распределения плотности вероятности $f(E)$ и плотность тока эмиссии с катода вы-

¹ В общем случае эмиссии электронов в плазму среднюю плотность тока можно вычислять, учитывая распределение электронов по энергиям $n(\mathcal{E})$ в металле и прозрачность барьера $\mathcal{D}(\mathcal{E}, E)$

$$j = e \int_0^{\infty} n(\mathcal{E}) \mathcal{D}(\mathcal{E}, E) d\mathcal{E}$$

числять по формуле (14). Это позволяет объяснить гораздо большие токи эмиссии, получаемые в эксперименте, по сравнению с вычислением по формуле Ричардсона с поправкой Шоттки.

Из формулы (14) видно, что плотность тока эмиссии пропорциональна концентрации ионов. Этот результат качественно подтвердился в проведенных предварительных экспериментах.

Концентрация плазмы в прикатодной области считалась постоянной, но необходимо найти связь между этой величиной концентрации и значением концентрации в основном объеме плазмы; для этого требуется решение полной замкнутой системы уравнений для прикатодного слоя.

Поступила 7 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Острецов И. Н., Петросов В. А., Поротников А. А., Уткин Ю. А. Влияние флуктуирующих микрополей на эмиссионные характеристики горячих катодов. Теплофизика высоких температур, 1971, т. 11, вып. 6.
2. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. Изд-во иностр. лит., 1947.
3. Little R. P., Smith S. T. Electrical breakdown in vacuum. IEEE Trans, Ser. ED, 1965, vol. 12, No. 2.
4. Kisliuk P. Electron emission at high fields due to positive ions. J. Appl. Phys., 1959, vol. 30, No. 1.
5. Тягунов Г. А. Электровакуумные и полупроводниковые приборы. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962.
6. Esker G. Electrode components of the arc discharge. *Ergebn. exakt. Naturwiss.*, Bd 33, S. 1—104.