

УДК 539.374

## ПОЛЗУЧЕСТЬ И РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ НАГРУЖЕНИИ И РАЗГРУЗКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ РАЗВИТИЯ И ТОРМОЖЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, А. О. Лемза\*

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток, Россия

\* Дальневосточный федеральный университет, 690091 Владивосток, Россия

E-mails: asustinova@mail.ru, lk@iacp.dvo.ru, alsu-24@yandex.ru

С использованием теории больших деформаций получено решение задачи о деформировании упруговязкопластического материала, расположенного в зазоре между двумя соосными цилиндрическими поверхностями, одна из которых вращается с переменной скоростью, а другая неподвижна. Показано, что при увеличении напряжений в цилиндрическом слое в результате механического воздействия на него первоначально накапливаются необратимые деформации ползучести вследствие вязкости материала, а при выходе напряженных состояний на поверхность нагружения происходит накопление пластических деформаций. При разгрузке сначала происходит пластическое деформирование, а затем — вязкое. Рассчитаны параметры напряженно-деформированного состояния среды при изменяющейся скорости вращения цилиндра. Исследована релаксация напряжений после его полной остановки.

Ключевые слова: упругость, пластичность, ползучесть, вязкость, большие деформации.

DOI: 10.15372/PMTF20190420

Технология холодной формовки, при использовании которой изменение формы материала происходит за счет медленного режима ползучести, применяется при обработке ряда материалов, прочность которых в случае высокоскоростного формоизменения при повышенных температурах существенно уменьшается [1]. Однако и при холодной формовке в отдельных областях имеет место пластическое течение, что оказывает существенное влияние на распределение напряжений во всем объеме формуемого материала и на процесс его ползучести. Существует большое количество математических моделей больших упругопластических деформаций [2–5]. В работах [6–9] предложены модели накопления больших необратимых деформаций сначала в условиях ползучести, затем в условиях пластического течения [6–9]. Впервые решения краевых задач, учитывающие накопление необратимых деформаций ползучести и пластичности, получены в [8, 9] с использованием модели больших упруговязкопластических деформаций. В случае малых деформаций подобный подход без учета вязкости при пластическом течении применялся в [10]. В данной

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00038).

© Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О., 2019

работе с помощью модели больших деформаций с накоплением необратимых деформаций строится решение краевой задачи о вискозиметрическом деформировании материала с последующим пластическим деформированием.

**1. Основные соотношения используемой модели.** Математическая модель рассматриваемой задачи строится на основе теории больших упругопластических деформаций [5, 6]. В декартовой прямоугольной системе координат Эйлера  $x_i$  обратимая  $e_{ij}$  и необратимая  $p_{ij}$  симметричные компоненты тензора деформаций Альманси  $d_{ij}$  определяются дифференциальными уравнениями переноса

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} [(\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{jk} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \gamma_{kj} - z_{kj})], \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ki}p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}; \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}), \quad v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,k}v_k, \\ d_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}, \\ u_{i,k} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad r_{ij} = \omega_{ij} + z_{ij}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} z_{ij} &= A^{-1}[(\varepsilon_{im}e_{mj} - e_{im}\varepsilon_{mj})B^2 + B(\varepsilon_{im}e_{mn}e_{nj} - e_{im}e_{mn}\varepsilon_{nj}) + e_{im}\varepsilon_{mn}e_{nk}e_{kj} - e_{im}e_{mn}\varepsilon_{nk}e_{kj}], \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - E_1^3/3 + E_3/3, \quad B = 2 - E_1, \\ E_1 &= e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}. \end{aligned}$$

В соотношениях (1.1), (1.2)  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  — компоненты тензоров скоростей полных и необратимых деформаций соответственно;  $Dn_{ij}/Dt$  — оператор используемой объективной производной произвольного тензора  $n_{ij}$  по времени;  $v_i$ ,  $u_i$  — компоненты векторов скоростей и перемещений точек среды соответственно;  $\omega_{ij}$  — кососимметричный тензор вихря скорости;  $r_{ij}$  — тензор вращений, нелинейной компонентой которого является тензор  $z_{ij}$ .

Компоненты тензора напряжений Эйлера — Коши  $\sigma_{ij}$  полностью определяются обратимыми деформациями, и в случае несжимаемой изотропной среды при наличии необратимых деформаций напряжения связаны с деформациями соотношением, являющимся аналогом формулы Мурнагана в нелинейной теории упругости [11]:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \quad (1.3)$$

( $p$  — добавочное гидростатическое давление;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера). В качестве термодинамического потенциала  $W(I_1, I_2)$  принимается его разложение в ряд Тейлора относительно свободного состояния до третьего порядка включительно по компонентам тензора обратимых деформаций:

$$\begin{aligned} W &= -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b - \mu)I_1I_2 - \chi I_1^3 + \dots, \\ I_1 &= e_{kk} - e_{ij}e_{ji}/2, \quad I_2 = e_{ik}e_{ki} - e_{ij}e_{jk}e_{ki} + e_{ij}e_{jk}e_{kl}e_{li}/4. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $\mu$  — модуль сдвига;  $b$ ,  $\chi$  — модули упругости высших порядков.

Диссипативный механизм деформирования определяется реологическими и пластическими свойствами среды. При этом необратимые деформации и скорости их накопления не разделяются на составляющие. Компоненты тензора  $p_{ij}$  являются как деформациями ползучести, так и пластическими деформациями. Различие таких составляющих необратимых деформаций обусловлено различием механизмов их накопления.

Если процесс накопления необратимых деформаций связан с ползучестью материала, то скорости необратимых деформаций  $\gamma_{ij}$  определяются с использованием степенного закона ползучести Нортона [12]

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad V(\Sigma) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|, \quad (1.5)$$

где  $\varepsilon_{ij}^v$  — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести;  $V(\Sigma)$  — термодинамический потенциал;  $B$ ,  $n$  — параметры ползучести материала;  $\sigma_k$  — главные значения тензора напряжений.

При дальнейшем увеличении напряжений напряженное состояние в материале может достичь поверхности нагружения  $f$ . В качестве уравнения такой поверхности можно принять одно из условий пластичности, например условие пластичности максимального касательного напряжения (призма Треска), обобщенное на случай учета вязкости среды:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p - \alpha_k|. \quad (1.6)$$

Здесь  $k$  — предел текучести материала;  $\eta$  — вязкость;  $\varepsilon_k^p - \alpha_k$  — главные значения тензора  $\varepsilon_{ij}^p - \alpha_{ij}$ ;  $\varepsilon_{ij}^p$  — компоненты тензора скоростей пластических деформаций;  $\alpha_{ij} = \varepsilon_{ij}^{v0}$  — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения. В областях пластического течения скорости пластических деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \alpha_{ij}. \quad (1.7)$$

Для учета ползучести среды на стадии, предшествующей пластическому течению, и вязкости материала на стадии пластического течения следует, не разделяя необратимые деформации на пластические и вязкие, использовать накопленные в соответствии с законом (1.5) к моменту начала пластического течения деформации ползучести в качестве начальных условий для пластических деформаций, что приводит к необходимости учета слагаемых  $\alpha_{ij}$  в (1.6), (1.7) [8–10].

**2. Постановка задачи в случае вращения внешнего цилиндра. Деформирование в режиме ползучести.** Рассмотрим деформирование цилиндрического слоя  $r_0 \leq r \leq R$  несжимаемого упруговязкопластического материала, расположенного между внешним цилиндром радиусом  $r = R$ , вращающимся с заданной угловой скоростью  $w_R(t) = w(R, t)$ , и неподвижной внутренней цилиндрической поверхностью радиусом  $r = r_0$ . Решение будем искать в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ . Полагая, что все точки среды движутся по окружностям, запишем в соответствии с (1.1), (1.2) выражения для ненулевых компонент используемых векторов и тензоров:

$$\begin{aligned} u_r &= r(1 - \cos \theta), & u_\varphi &= r \sin \theta, & d_{rr} &= -\frac{1}{2} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2, & d_{r\varphi} &= \frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ v_\varphi &= r \frac{\partial \theta}{\partial t} = rw, & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial t}, & \omega_{r\varphi} &= -\varepsilon_{r\varphi} - \frac{\partial \theta}{\partial t}, \\ r_{\varphi r} &= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{2\varepsilon_{r\varphi}(e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2}, & z_{\varphi r} &= \frac{\varepsilon_{r\varphi}(e_{\varphi\varphi} - e_{rr})}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$(\theta(r, t))$  — центральный угол закручивания). Считаем, что контакт материала с жесткими стенками происходит в соответствии с условиями прилипания, а деформации и напряжения в среде до момента начала деформирования отсутствуют. Тогда граничные и

начальные условия задачи имеют вид

$$\bar{u}|_{r=r_0} = \bar{v}|_{r=r_0} = 0, \quad \theta(R, t) = \theta_R(t) = \int_0^t w_R(\xi) d\xi, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{rr}(r_0, t) = \sigma_0, \quad e_{ij}(r, 0) = 0, \quad p_{ij}(r, 0) = 0, \quad \sigma_{ij}(r, 0) = 0,$$

где  $\sigma_0$  — задаваемая функция. Закон изменения скорости вращения внешнего цилиндра имеет вид

$$w_R(t) = \begin{cases} \alpha^2 t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \alpha^2 t_1, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ \alpha^2 t_1 - \beta^2(t - t_2), & t_2 \leq t \leq t_3, \\ 0, & t \geq t_3 \end{cases} \quad (2.3)$$

( $\alpha = \text{const}$ ;  $\beta = \text{const}$ ).

В задачах данного типа диагональные компоненты тензоров деформаций являются величинами более высокого порядка малости по сравнению с недиагональными компонентами [13, 14]. Поэтому далее будем пренебрегать слагаемыми выше первого порядка в диагональных компонентах тензоров обратимых и необратимых деформаций и выше второго — в недиагональных. Такое ограничение не оказывает значительного влияния на распределения деформаций и напряжений в среде, но позволяет существенно упростить расчеты. Из (1.3), (1.4) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p - 2\mu + 2(b + \mu)e_{rr} + 2be_{\varphi\varphi} + \mu e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p - 2\mu + 2(b + \mu)e_{\varphi\varphi} + 2be_{rr} + \mu e_{r\varphi}^2, \\ \sigma_{zz} &= -p - 2\mu + 2b(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - 2\mu e_{r\varphi}^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu e_{r\varphi}, \\ \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_{r\varphi}} &= \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В рамках квазистатического приближения уравнения равновесия можно представить в виде

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{r} = \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} \frac{e_{\varphi\varphi} - e_{rr}}{e_{r\varphi}}, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} = -2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r}. \quad (2.5)$$

Интегрируя второе уравнение (2.5) с учетом зависимости между  $\sigma_{r\varphi}$  и  $e_{r\varphi}$ , получаем соотношения

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{c(t)}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = \frac{c(t)}{2\mu r^2}, \quad (2.6)$$

где  $c(t)$  — неизвестная функция, причем  $c(t) \geq 0 \forall t$ .

Из (1.1), (1.2) следует, что в случае несжимаемой среды для компонент тензоров деформаций и скоростей деформаций справедливы соотношения

$$\begin{aligned} d_{r\varphi} &= e_{r\varphi} + p_{r\varphi}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t} = \varepsilon_{r\varphi}^e + \gamma_{r\varphi}, \\ e_{rr} + e_{\varphi\varphi} &= -e_{r\varphi}^2, \quad p_{rr} + p_{\varphi\varphi} = -2p_{r\varphi}^2, \quad e_{rr} = p_{\varphi\varphi} - 3e_{r\varphi}^2/2 - 2e_{r\varphi}p_{r\varphi}, \\ \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= \gamma_{\varphi\varphi} - 2\gamma_{r\varphi}p_{r\varphi} + \frac{4\varepsilon_{r\varphi}p_{r\varphi}(e_{\varphi\varphi} - 1)}{e_{rr} + e_{\varphi\varphi} - 2}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\varepsilon_{r\varphi}^e$  — компонента тензора скоростей упругих деформаций.

Будем полагать, что при увеличении скорости поворота внешнего цилиндра необратимые деформации сначала накапливаются вследствие медленного процесса ползучести. Тогда в соответствии с (1.5) с учетом принятых предположений компоненты тензора скоростей деформаций ползучести, а следовательно, и компонента  $p_{r\varphi}$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^v &= 2^{n-1} Bn \frac{c^{n-1}(t)}{r^{2n-2}}, & \varepsilon_{rr}^v &= -\varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} \frac{\varepsilon_{r\varphi}^v}{2}, \\ p_{r\varphi}(r, t) &= 2^{n-1} Bn \frac{c_1(t)}{r^{2n-2}}, & c_1(t) &= \int_0^t c^{n-1}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, определение деформаций в среде при ее деформировании в режиме ползучести сводится к определению функции  $c(t)$  и решению дифференциального уравнения для компоненты  $p_{\varphi\varphi}$ .

Подставляя в первое соотношение (2.7) определения соответствующих тензоров (2.1), (2.6), (2.8) и интегрируя полученное равенство с учетом краевых условий (2.2), находим уравнение для определения угла поворота, дифференцирование которого приводит к уравнению для угловых скоростей точек среды

$$\begin{aligned} \theta(r, t) &= \theta_R(t) - \frac{c(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) - \frac{2^{n-1} Bn}{n-1} c_1(t) \left( \frac{1}{r^{2n-2}} - \frac{1}{R^{2n-2}} \right), \\ w(r, t) &= w_R(t) - \frac{\dot{c}(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) - \frac{2^{n-1} Bn}{n-1} c^{n-1}(t) \left( \frac{1}{r^{2n-2}} - \frac{1}{R^{2n-2}} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

С учетом условия неподвижности внутреннего цилиндра  $w(r_0, t) = 0$  имеем обыкновенное дифференциальное уравнение изменения функции  $c(t)$ :

$$\dot{c}(t) = \frac{2\mu w_R(t)}{r_0^{-2} - R^{-2}} - \frac{2^n \mu Bn}{n-1} c^{n-1}(t) \frac{r_0^{2-2n} - R^{2-2n}}{r_0^{-2} - R^{-2}}, \quad c(0) = 0. \quad (2.10)$$

Подставляя в последнее уравнение (2.7) в качестве компонент тензоров скоростей необратимых деформаций  $\gamma_{r\varphi}$ ,  $\gamma_{\varphi\varphi}$  величины  $\varepsilon_{r\varphi}^v$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^v$ , определенные в (2.8), получаем дифференциальное уравнение в частных производных для компоненты  $p_{\varphi\varphi}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= -2^{n-1} Bn \frac{c^{n-1}(t)}{r^{2n-2}} \frac{p_{\varphi\varphi} - e_{r\varphi}^2}{e_{r\varphi}} + \\ &+ \frac{4p_{r\varphi}}{e_{r\varphi}^2 + 2} \left( 1 + p_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2} e_{r\varphi}^2 - 2e_{r\varphi} p_{r\varphi} \right) \left( \frac{\dot{c}(t)}{2\mu r^2} + 2^{n-1} Bn \frac{c^{n-1}(t)}{r^{2n-2}} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Полученные уравнения справедливы до момента времени  $t = t_0$ , в который на границе  $r = r_0$  впервые выполняется условие пластичности, в рассматриваемом приближении имеющее вид

$$\sigma_{r\varphi} = k.$$

**3. Развитие и торможение вязкопластического течения.** При равноускоренном движении внешней жесткой поверхности при  $t \geq t_0$  в цилиндрическом слое появляется область пластического течения  $r_0 \leq r \leq m(t)$ ; в области  $m(t) \leq r \leq R$  продолжают накапливаться необратимые деформации ползучести. Функция  $m(t)$  определяет в момент времени  $t$  радиус границы, разделяющей данные области, в которых параметры напряженно-деформированного состояния среды определяются разными уравнениями.

При  $t \geq t_0$  для функции  $c(t)$  введем обозначение  $c_2(t)$ , полагая  $c_2(t_0) = c(t_0)$ . Тогда для компонент  $\sigma_{r\varphi}$  и  $e_{r\varphi}$  в обеих рассматриваемых областях используются соотношения (2.6) с функцией  $c_2(t)$  вместо  $c(t)$ . В области  $m(t) \leq r \leq R$ , где пластическое течение отсутствует, для компонент  $\varepsilon_{ij}^v$  выполняются первые два соотношения (2.8), для компоненты  $p_{\varphi\varphi}$  используется уравнение (2.11), в котором также  $c(t)$  следует заменить функцией  $c_2(t)$ . В областях  $m(t) \leq r \leq M$  и  $M \leq r \leq R$  ( $M$  — максимальный радиус области упругопластического деформирования), где пластическое течение не началось, для компоненты  $p_{r\varphi}$  справедливо третье соотношение (2.8), в котором функция  $c_1(t)$  заменяется ее значением

$$c_3(t) = c_1(t_0) + \int_{t_0}^t c_2^{n-1}(\xi) d\xi.$$

Для определения скоростей точек среды в области  $m(t) \leq r \leq R$  используется второе уравнение (2.9), в котором также необходимо выполнить замену функции  $c(t)$  на функцию  $c_2(t)$ .

В области пластического течения  $r_0 \leq r \leq m(t)$  в соответствии с (1.6) имеем

$$\varepsilon_{r\varphi}^p(r, t) = \frac{1}{\eta} \left( \frac{c_2(t)}{r^2} - k \right) + 2^{n-1} B n k^{n-1}. \quad (3.1)$$

Требование равенства скоростей необратимых деформаций (2.8) и (3.1) на упругопластической границе при изменении диссипативного механизма удовлетворяется при выполнении условий

$$c_2(t) = k m^2(t), \quad \dot{c}_2(t) = 2 k m(t) \dot{m}(t).$$

Подставляя во второе уравнение (2.7) значения компонент тензоров скоростей полных (2.1) и необратимых (3.1) деформаций и интегрируя полученное соотношение при условии  $w(r_0, t) = 0$ , определяем угловые скорости точек среды в области пластического течения:

$$w(r, t) = \frac{\dot{c}_2(t)}{2\mu} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2}{\eta} \left[ \frac{c_2(t)}{2} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - k \ln \frac{r}{r_0} \right] + 2^n B n k^{n-1} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (3.2)$$

С учетом равенства скоростей (2.9) и (3.2) при  $r = m(t)$  получаем дифференциальную задачу определения упругопластической границы

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) = \frac{1}{m(t)(r_0^{-2} - R^{-2})} & \left[ \frac{\mu w_R(t)}{k} - \frac{\mu}{\eta} \left( \frac{m^2(t)}{r_0^2} - 1 - 2 \ln \frac{m(t)}{r_0} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2^{n-1} \mu B n k^{n-2}}{n-1} \left( 1 - \frac{m^{2n-2}(t)}{R^{2n-2}} \right) - 2^n \mu B n k^{n-2} \ln \frac{m(t)}{r_0} \right], \quad m(t_0) = r_0. \end{aligned}$$

Интегрируя (3.1) при начальном условии  $p_{r\varphi}(r, t_\xi(r))$ , где  $t_\xi(r)$  — момент времени, в который радиус упругопластической границы, движущейся по направлению к внешнему цилиндру, равен  $r$ , находим уравнение для компоненты  $p_{r\varphi}$  в области  $r_0 \leq r \leq m(t)$ :

$$\begin{aligned} p_{r\varphi}(r, t) = 2^{n-1} B n \frac{c_3(t_\xi(r))}{r^{2n-2}} + \frac{c_4(r, t)}{\eta r^2} + \left( 2^{n-1} B n k^{n-1} - \frac{k}{\eta} \right) (t - t_\xi(r)), \\ c_4(r, t) = \int_{t_\xi(r)}^t c_2(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Выражение для диагональной компоненты тензора скоростей пластических деформаций имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi}^p(r, t) = & \frac{\varepsilon_{r\varphi}^p(r, t)}{2} \frac{e_{\varphi\varphi}(r, t) - e_{rr}(r, t)}{e_{r\varphi}(r, t)} + \\ & + \frac{\varepsilon_{r\varphi}^v(r, t_\xi(r))}{2} \left( \frac{e_{\varphi\varphi}(r, t_\xi(r)) - e_{rr}(r, t_\xi(r))}{e_{r\varphi}(r, t_\xi(r))} - \frac{e_{\varphi\varphi}(r, t) - e_{rr}(r, t)}{e_{r\varphi}(r, t)} \right) = -\varepsilon_{rr}^p(r, t). \end{aligned}$$

Тогда из (2.7), (3.1) следует уравнение для компоненты  $p_{\varphi\varphi}$  в области пластического течения

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\varphi\varphi}(r, t)}{\partial t} = & \left( \frac{k}{\eta} - \frac{c_2(t)}{\eta r^2} \right) \frac{p_{\varphi\varphi}(r, t) - e_{r\varphi}^2(r, t)}{e_{r\varphi}(r, t)} + \left( \frac{\dot{c}_2(t)}{2\mu r^2} + \frac{c_2(t)}{\eta r^2} - \frac{k}{\eta} + 2^{n-1} B n k^{n-1} \right) \times \\ & \times \frac{4p_{r\varphi}(r, t)[p_{\varphi\varphi}(r, t) - e_{r\varphi}^2(r, t)/2 - 2e_{r\varphi}(r, t)p_{r\varphi}(r, t) + 1]}{e_{r\varphi}^2(r, t) + 2} + \\ & + 2^{n-1} B n k^{n-1} \left[ e_{r\varphi}(r, t_\xi(r)) + 2p_{r\varphi}(r, t_\xi(r)) - \frac{p_{\varphi\varphi}(r, t_\xi(r))}{e_{r\varphi}(r, t_\xi(r))} - 2p_{r\varphi}(r, t) \right]. \end{aligned}$$

При  $t \geq t_1$  внешний цилиндр вращается с постоянной скоростью. При этом область пластического течения увеличивается, но менее интенсивно, чем при равноускоренном движении поверхности  $r = R$ .

При  $t \geq t_2$ , когда вращение внешнего цилиндра становится равнозамедленным, область пластического течения уменьшается до тех пор, пока в некоторый момент времени  $t = t_z$  упругопластическая граница не достигнет поверхности  $r = r_0$ . В области цилиндрического слоя  $m(t) \leq r \leq M$ , где пластическое течение прекратилось, для компоненты  $p_{r\varphi}$  справедливо соотношение, полученное в результате интегрирования первого уравнения (2.8), в котором функция  $c(t)$  заменена на  $c_2(t)$ , при начальном условии  $p_{r\varphi}(r, t_\zeta(r))$ , определяемом (3.3):

$$\begin{aligned} p_{r\varphi}(r, t) = & \frac{c_4(r, t_\zeta(r))}{\eta r^2} + \left( 2^{n-1} B n k^{n-1} - \frac{k}{\eta} \right) (t_\zeta(r) - t_\xi(r)) + 2^{n-1} B n \frac{c_5(r, t)}{r^{2n-2}}, \\ c_5(r, t) = & c_3(t_\xi(r)) + \int_{t_\zeta(r)}^t c_2^{n-1}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Здесь  $t_\zeta(r)$  — момент времени, в который радиус упругопластической границы, движущейся по направлению к поверхности  $r_0$ , равен  $r$ .

При  $t \geq t_z$  необратимые деформации во всем цилиндрическом слое вновь, как и на начальной стадии деформирования, накапливаются только за счет процесса ползучести. Для функции  $c_2(t)$  вводится обозначение  $c_6(t)$ , причем  $c_6(t_z) = c_2(t_z)$ . Новую функцию будем определять уравнением (2.10), подставляя в него  $c_6(t)$  вместо  $c(t)$  и используя для решения соответствующее начальное условие при  $t = t_z$ .

Вследствие различия процессов накопления необратимых деформаций в областях  $r \geq M$  и  $r < M$  имеют место два уравнения, определяющие компоненту  $p_{r\varphi}$  тензора необратимых деформаций при  $t \geq t_z$ . При  $r \geq M$  значения данной компоненты следует вычислять с помощью третьего соотношения в (2.8), где функция  $c_1(t)$  заменяется функцией

$$c_7(t) = c_3(t_z) + \int_{t_z}^t c_6^{n-1}(\xi) d\xi.$$

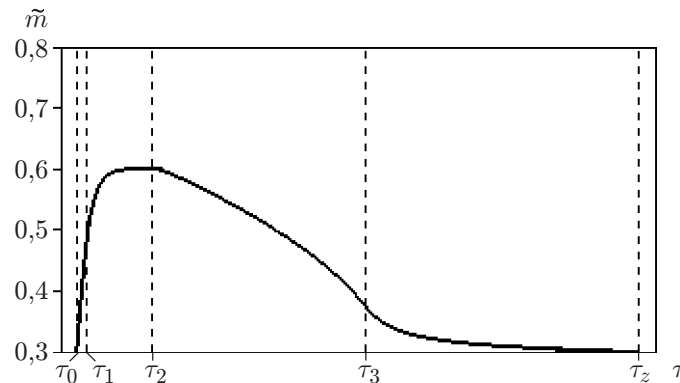


Рис. 1. Изменение радиуса области пластического течения

При  $r < M$  для этого используется соотношение

$$p_{r\varphi}(r, t) = \frac{c_4(r, t_\zeta(r))}{\eta r^2} + \left(2^{n-1} B n k^{n-1} - \frac{k}{\eta}\right)(t_\zeta(r) - t_\xi(r)) + 2^{n-1} B n \frac{c_8(r, t)}{r^{2n-2}},$$

$$c_8(r, t) = c_5(r, t_z) + \int_{t_z}^t c_6^{n-1}(\xi) d\xi.$$

Компонента  $p_{\varphi\varphi}$  определяется с помощью уравнения (2.11) с учетом введенных выше обозначений и начальных условий.

Напряженное состояние на всех этапах деформирования определяется из решения первого уравнения равновесия (2.5), удовлетворяющего третьему краевому условию в (2.2). Давление  $p$  и диагональные компоненты  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zz}$  тензора напряжений определяются с помощью зависимостей (2.4).

Задача решалась с использованием безразмерных переменных  $\tau$ ,  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij}$ ,  $\tilde{m}(\tau)$ :

$$t = \tau/\alpha, \quad r = \tilde{r}R, \quad \sigma_{ij} = \mu\tilde{\sigma}_{ij}, \quad m(t) = R\tilde{m}(\tau)$$

с помощью системы Scilab при следующих значениях параметров:  $k/\mu \approx 0,00245$ ,  $\tilde{r}_0 = 0,3$ ,  $b/\mu = 4$ ,  $\alpha/\beta = 3$ ,  $B\mu^{n-1}/\alpha = 3,5$ ,  $n = 3$ ,  $\alpha\eta/\mu = 0,05$ ,  $\sigma_0/\mu \approx 0,0004$ ,  $\tau_1 = 0,08$ ,  $\tau_2 = 0,3$ ,  $\tau_{fin} = 20\tau_3$ .

На рис. 1 показано изменение радиуса области пластического течения. Максимальный радиус области пластического течения равен  $\tilde{r} \approx 0,6009405$ , при этом  $\tau_0 \approx 0,0472$ ,  $\tau_z \approx 1,9412$ . Зависимость необратимых деформаций от времени при вращении внешнего цилиндра с возрастающей и постоянной скоростью приведена на рис. 2. На рис. 3 представлены распределения напряжений  $\tilde{\sigma}_{r\varphi}$ ,  $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$  по радиусу цилиндрического слоя в момент остановки внешнего цилиндра  $\tau_3$  и в момент  $\tau = \tau_{fin}$ .

**4. Вращение внутреннего цилиндра.** Рассмотрим случай, когда в качестве вращающейся поверхности выбран внутренний цилиндр, при этом внешний остается неподвижным. В отличие от задачи, рассмотренной в п. 3, в данной задаче краевые условия имеют вид

$$\bar{u}|_{r=R} = \bar{v}|_{r=R} = 0, \quad w(r_0, t) = w_{r_0}(t), \quad \theta(r_0, t) = \theta_{r_0}(t) = \int_0^t w_{r_0}(\xi) d\xi,$$



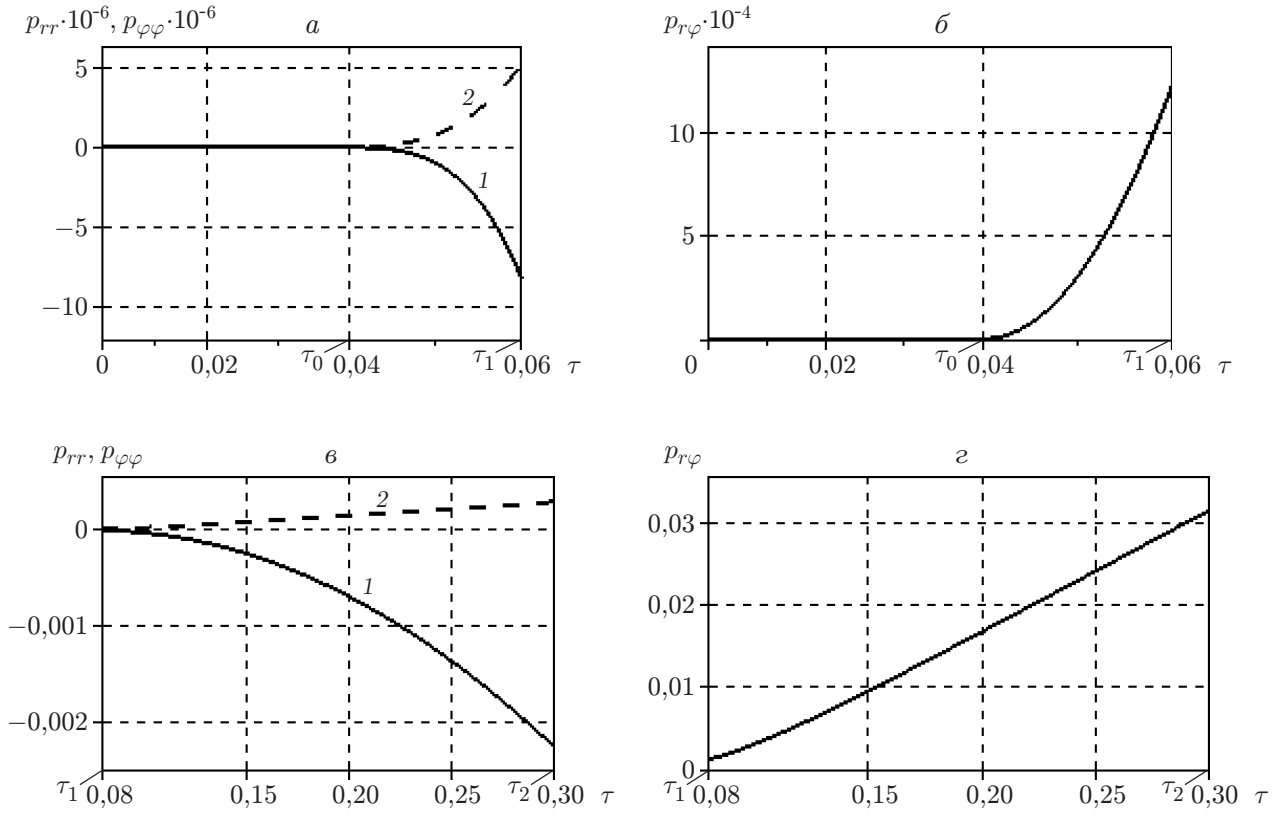


Рис. 2. Зависимость необратимых деформаций от времени при вращении внешнего цилиндра с возрастающей (*а*, *б*) и постоянной (*в*, *г*) скоростью в случае  $\tilde{r} = \tilde{r}_0$ :

*а*, *в* — диагональные компоненты (1 — компонента  $p_{rr}$ , 2 — компонента  $p_{\varphi\varphi}$ ), *б*, *г* — компонента  $p_{r\varphi}$

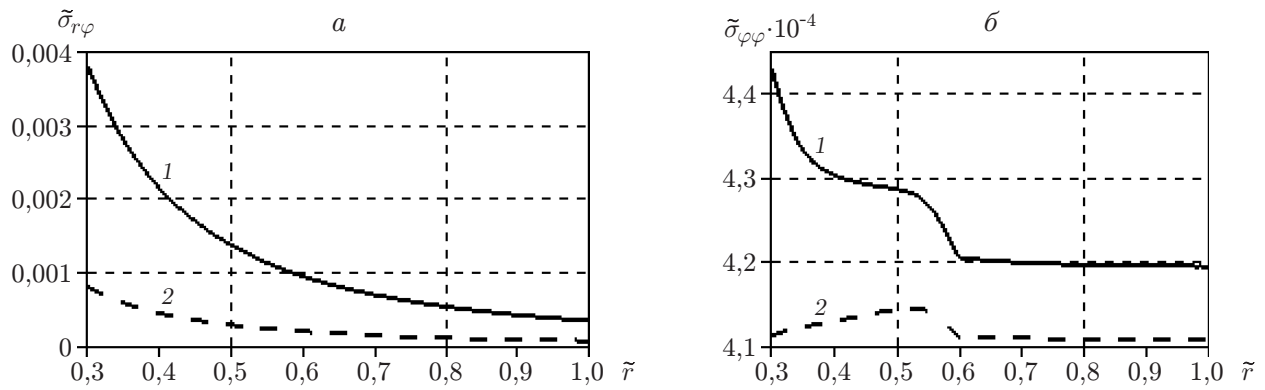


Рис. 3. Распределения напряжений  $\tilde{\sigma}_{r\varphi}$  (*а*) и  $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$  (*б*) по радиусу цилиндрического слоя после остановки внешнего цилиндра:

1 —  $\tau = \tau_3$ , 2 —  $\tau = \tau_{fin}$

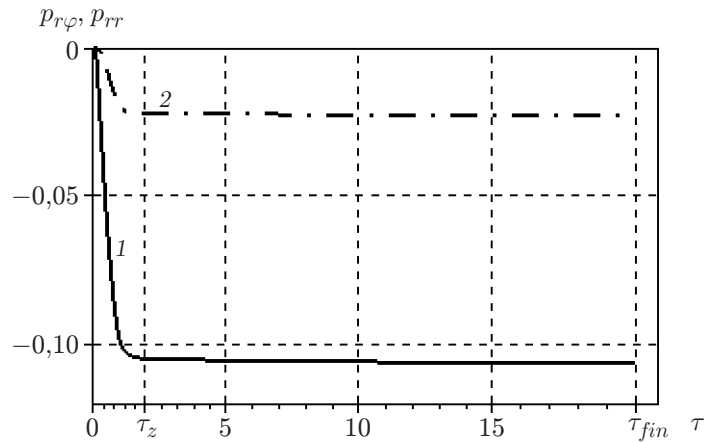


Рис. 4. Зависимость необратимых деформаций от времени при вращении внутреннего цилиндра в случае  $\tilde{r} = \tilde{r}_0$ :

1 — компонента  $p_{r\varphi}$ , 2 — компонента  $p_{rr}$

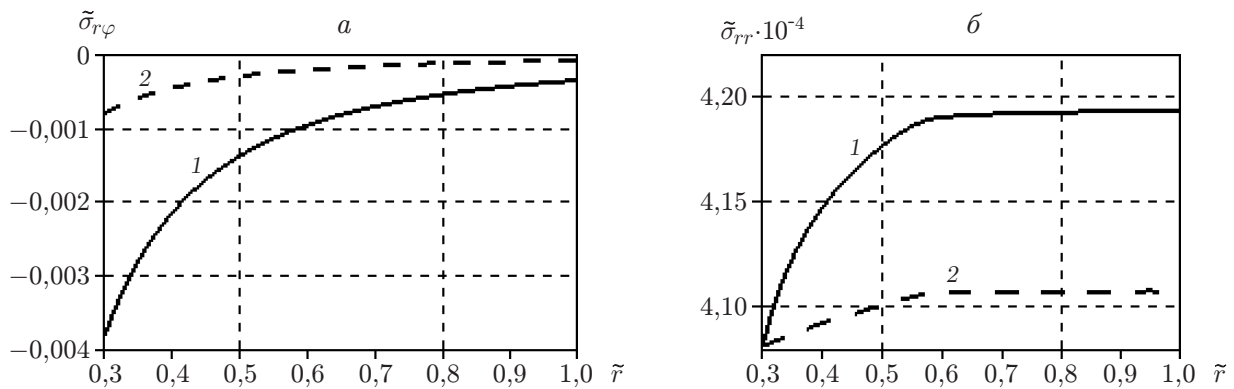


Рис. 5. Распределения напряжений  $\tilde{\sigma}_{r\varphi}$  (а) и  $\tilde{\sigma}_{rr}$  (б) по радиусу цилиндрического слоя после остановки внутреннего цилиндра:

1 —  $\tau = \tau_z$ , 2 —  $\tau = \tau_{fin}$

где зависимость скорости вращения внутреннего цилиндра от времени  $w_{r0}(t)$  задается соотношениями, аналогичными (2.3). В результате интегрирования второго уравнения равновесия (2.5) получаем соотношения

$$\sigma_{r\varphi}(r, t) = -\frac{c(t)}{r^2}, \quad e_{r\varphi}(r, t) = -\frac{c(t)}{2\mu r^2},$$

$$\varepsilon_{r\varphi}^v(r, t) = -2^{n-1} B n \frac{c^{n-1}(t)}{r^{2n-2}}, \quad p_{r\varphi}(r, t) = -2^{n-1} B n \frac{c_1(t)}{r^{2n-2}},$$

отличающиеся от соотношений для случая вращения внешнего цилиндра наличием знака “—” в правых частях. Схема решения данной задачи аналогична схеме решения задачи, приведенной в п. 3.

Несмотря на противоположные знаки в выражениях для компонент деформаций  $e_{r\varphi}$  и  $p_{r\varphi}$  при вращении внешней и внутренней цилиндрических поверхностей, ряд величин в обоих случаях при одинаковых заданных константах совпадает, например компоненты тензоров необратимых деформаций  $p_{rr}$  и  $p_{\varphi\varphi}$ . На рис. 4, 5 приведены результаты решения задачи в случае вращения внутреннего цилиндра.

**Заключение.** В работе построено решение задачи о деформировании материала цилиндрического слоя, одна из граничных поверхностей которого вращается с переменной (возрастающей, постоянной, убывающей и нулевой) скоростью, а другая неподвижна. Определено положение упругопластической границы, разделяющей области с различными механизмами накопления необратимых деформаций, вычислены параметры напряженно-деформированного состояния среды, исследована релаксация напряжений, происходящая после остановки цилиндра.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Олейников А. И.** Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей / А. И. Олейников, А. И. Пекарш. М.: Эком, 2009.
2. **Lee E. H.** Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. P. 1–6.
3. **Левитас В. И.** Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987.
4. **Мясников В. П.** Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
5. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.** Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
6. **Буренин А. А.** Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. Владивосток: Дальнаука, 2013.
7. **Белых С. В., Бормотин К. С., Буренин А. А. и др.** О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2014. № 4. С. 144–156.
8. **Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В.** Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // Докл. АН. 2016. Т. 470, № 3. С. 275–278.
9. **Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О.** Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 103–112.
10. **Буренин А. А., Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.** О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии // Докл. АН. 2018. Т. 482, № 4. С. 403–406.
11. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
12. **Norton F. H.** The creep of steel at high temperatures. N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1929.
13. **Бегун А. С., Буренин А. А., Жилин С. Г., Ковтанюк Л. В.** Об учете упругих свойств вязкопластической смазки между соосными вращающимися цилиндрами // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 3. С. 213–223.
14. **Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В.** Течение упруговязкопластического материала между вращающимися цилиндрическими поверхностями в условиях нежесткого сцепления // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 2. С. 146–158.

*Поступила в редакцию 27/XI 2018 г.,  
после доработки — 27/XI 2018 г.  
Принята к публикации 28/I 2019 г.*