

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПАРО- И ГАЗОВЗВЕСЯХ

Н. А. Гумеров, А. И. Ивандаев

(Москва)

Проблеме распространения линейных и слабонелинейных возмущений в двухфазных средах типа газозвесь посвящено значительное число опубликованных к настоящему времени работ. В [1—4] рассматривалось распространение слабых волн, в [5—8] изучалось распространение возмущений конечной амплитуды. Краткие обзоры ранее опубликованных работ можно найти в [2, 9, 10].

Результаты исследования дисперсии и абсорбции слабых монохроматических волн с учетом нестационарных эффектов обмена массой, импульсом и энергией между фазами впервые опубликованы в [4]. В данной работе в отличие от [4] рассмотрен случай умеренных давлений и умеренно малых объемных содержаний взвешенной фазы. Представлен более подробный анализ полученных результатов.

1. Основные уравнения. В рамках двухскоростной и трехтемпературной модели газозвеси [11] в системе координат, относительно которой невозмущенная газозвесь покоится ($v_{10} = v_{20} = v_0 = 0$), линеаризованные уравнения плоского одномерного движения при наличии фазовых переходов могут быть записаны в виде:

$$(1.1) \quad \frac{\partial v_1'}{\partial t} + \rho_{10} \frac{\partial v_1'}{\partial x} = -n_0 j, \quad \frac{\partial \rho_2'}{\partial t} + \rho_{20} \frac{\partial v_2'}{\partial x} = n_0 j,$$

$$\rho_{10} \frac{\partial v_1'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} + n_0 f = 0, \quad \rho_{20} \frac{\partial v_2'}{\partial t} = n_0 f,$$

$$\rho_{10} \frac{\partial i_1'}{\partial t} + \rho_{20} \frac{\partial i_2'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t} + n_0 l_0 j,$$

$$\rho_{20} \frac{\partial i_2'}{\partial t} = -n_0 q_{2\sigma} + \alpha_{20} \frac{\partial p'}{\partial t}, \quad q_{1\sigma} + q_{2\sigma} = -j l_0,$$

$$\rho_{10}^* = \alpha_{10} \rho_{10}^0, \quad \rho_{20}^* = \alpha_{20} \rho_{20}^0, \quad \alpha_{10} + \alpha_{20} = 1, \quad \alpha_{20} = \frac{4}{3} \pi a_0^3 n_0,$$

где ρ , ρ^0 , α , v , i — средняя и истинная плотность, объемное содержание, скорость и удельная энтальпия; p — давление; a и n — радиус частиц и их число в единице объема смеси; l — удельная теплота парообразования; f — сила, действующая со стороны газа на отдельную каплю; j — интенсивность конденсации на поверхности капли; $q_{j\sigma}$ — интенсивность теплообмена j -й фазы с поверхностным σ -слоем капли ($j = 1, 2$); индексами 1 и 2 внизу отмечены параметры газообразной и взвешенной фаз; штрихом — возмущения параметров; индекс 0 соответствует начальному невозмущенному состоянию.

Ограничимся рассмотрением случая однородных взвесей, когда невозмущенное состояние однородно по координате x , т. е. ρ_{10} , ρ_{20} , n_0 , α_{20} , a_0 , $p_0 = \text{const}$. Предположим, что газообразная фаза — калорически совершенный газ, дисперсная фаза — идеальная несжимаемая среда, линеаризованные уравнения состояния которых имеют вид

$$(1.2) \quad \frac{p'}{p_0} = \frac{\rho_1^0}{\rho_{10}^0} + \frac{T_1'}{T_0}, \quad i_1' = c_1 T_1'; \quad \rho_2^0 = 0, \quad i_2' = c_2 T_2' + \frac{p'}{\rho_2^0},$$

где T — температура; c_1 и c_2 — теплоемкость газовой и конденсированной фаз (при постоянном давлении). Далее, там, где это не вызывает неясностей, нижний индекс 0 опускается.

Будем изучать решения системы линейных уравнений (1.1), (1.2), имеющие вид прогрессивных волн для возмущений χ' :

$$(1.3) \quad \chi' \sim \exp i(k_* x - \omega t) = \exp(-k_{**} x) \exp i(kx - \omega t)$$

$$(k_* = k + ik_{**}, C_p = \omega/k, C_g = d\omega/dk, \sigma = 2\pi C_p k_{**}/\omega).$$

Здесь i — мнимая единица; k_* — комплексное волновое число; k_{**} — линейный коэффициент затухания; C_p , C_g и σ — фазовая скорость, групповая скорость и декремент затухания на длине волны.

2. Законы взаимодействия фаз. Сила, действующая на отдельную сферическую частицу при ее нестационарном движении, может рассматриваться как сумма квазистационарной силы вязкого трения Стокса, нестационарных сил Архимеда, присоединенных масс и «наследственной» силы Бассэ. В случае гармонических колебаний (1.3) имеем [4]

$$(2.1) \quad \frac{nf}{\rho_{20}} = \frac{v'_1 - v'_2}{\tau_v^*} - \frac{v'_1}{\tau_A^*}, \quad \tau_v^* = \tau_v \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) (\omega \tau_{\mu 1})^{1/2} - \frac{1}{9} i \omega \tau_{\mu 1} \right]^{-1},$$

$$\tau_A^* = -\frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} \frac{i}{\omega}, \quad \tau_v = \frac{2}{9} \frac{\rho_2^0 a^3}{\mu_1} = \frac{2}{9} \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} \tau_{\mu 1}, \quad \tau_{\mu 1} = \frac{\rho_1^0 a^2}{\mu_1} \quad (\tau_v \gg \tau_{\mu 1}, \rho_2^0 \gg \rho_1^0),$$

где $\tau_{\mu 1}$ — характерное время установления квазистационарного распределения скорости в газе; τ_v — время релаксации скоростей фаз при квазистационарном обтекании частицы газом; τ_v^* — комплексный аналог τ_v ; μ_1 — динамическая вязкость газовой фазы. Видно, что $\tau_v^* \cong \tau_v$ и не зависит от частоты колебаний лишь при достаточно малых частотах $\omega < 10^{-2}/\tau_{\mu 1}$, когда за характерное время колебаний $\tau = \omega^{-1}$ возмущения скорости проникают в газ на характерную глубину $\delta_{\mu 1} \sim (\mu_1/\rho_1^0 \omega)^{1/2}$, значительно превышающую радиус капли ($\delta_{\mu 1} \gg a$). У гетерогенных взвесей $a \gg L \sim \mu_1/\rho_1^0 C_1$ (L , C_1 — длина свободного пробега молекул и скорость звука в чистом газе), следовательно, $\tau_{\mu 1} = a^2/LC_1 \gg \tau_c$ ($\tau_c = a/\pi C_1$ — характерное время колебаний, длина волны которых сравнима с размером частиц). Таким образом, существует обширный диапазон высоких частот $\tau_{\mu 1}^{-1} < \omega \ll \tau_c^{-1}$, при которых время релаксации скоростей фаз τ_v^* комплексно, зависит от частоты колебаний и может сильно отличаться от стоксова времени τ_v . При этом условие акустической однородности газовой взвеси еще не нарушается, и волновые процессы в ней могут быть описаны континуальными уравнениями (1.1).

Число Прандтля газа $Pr \sim 1$, и характерное время установления квазистационарного поля температур вокруг капли в газовой фазе $\tau_{\lambda 1} = a^2/\kappa_1$, где κ_1 — коэффициент теплопроводности газа, одного порядка с характерным временем $\tau_{\mu 1}$ установления в ней квазистационарного поля скоростей. В связи с этим нестационарность температурных полей вокруг частиц или капель, приводящая к зависимости интенсивностей межфазного тепло- и массообмена от частоты ω , проявляется при тех же частотах колебаний, что и нестационарность полей скоростей, приводящая к отличию τ_v^* от τ_v . Коэффициент теплопроводности конденсированной фазы κ_2 обычно значительно меньше коэффициента κ_1 , поэтому характерное время установления квазистационарного однородного поля температур внутри частиц $\tau_{\lambda 2} = a^2/\kappa_2$ значительно больше аналогичной величины для газа ($\tau_{\lambda 2} \gg \tau_{\lambda 1}$). И на первый взгляд нестационарность теплообмена поверхности капли с ее основной массой, приводящая к зависимости теплового потока $q_{2\sigma}$ от частоты, должна проявляться при значительно меньших частотах колебаний, чем нестационарность теплообмена поверхности капли с газом (более детальный анализ [12] показывает, что, несмотря на $\tau_{\lambda 2} \gg \tau_{\lambda 1}$, нестационарность температур внутри капли сказывается на интенсивности теплообмена при значительно больших частотах, чем нестационарность в газовой фазе).

Аналогичные (2.1) зависимости внешнего $q_{1\sigma}$ и внутреннего $q_{2\sigma}$ тепловых потоков от частоты ω следуют из решения сферически-симметричной

задачи о теплообмене капли с газом в монохроматической звуковой волне и имеют вид [4, 12]

$$(2.2) \quad \frac{nq_{1\sigma}}{\alpha_1 \rho_{10}^0 c_1} = \frac{T_1' - T_\sigma'}{\tau_{T1}^*}, \quad \frac{nq_{2\sigma}}{\alpha_2 \rho_2^0 c_2} = \frac{T_2' - T_\sigma'}{\tau_{T2}^*},$$

$$\tau_{T1}^* = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \tau_{\lambda 1} \eta_1(z_1), \quad \tau_{T2}^* = \frac{1}{15} \tau_{\lambda 2} \eta_2(z_2),$$

$$\eta_1(z_1) = \frac{1}{1+z_1}, \quad \eta_2(z_2) = \frac{5[3z_2 - (3+z_2^2) \operatorname{th} z_2]}{z_2^2 (\operatorname{th} z_2 - z_2)},$$

$$z_j = (\omega \tau_{\lambda j})^{1/2} \frac{i-i}{\sqrt{2}}, \quad \tau_{\lambda j} = \frac{a^2}{\kappa_j}, \quad \kappa_j = \frac{\lambda_j}{\rho_j^0 c_j}, \quad j = 1, 2,$$

где τ_{Tj}^* — комплексное время релаксации температуры в j -й фазе, определяемое характерным временем $\tau_{\lambda j}$ и частотой ω ; λ — коэффициент теплопроводности. Времена τ_{Tj}^* близки к своим квазистационарным действительным значениям τ_{Tj} при достаточно малых (своих для каждой из фаз) частотах $\tau_{T1}^* \approx \tau_{T1} = (\alpha_1/3\alpha_2) \tau_{\lambda 1}$, $(\omega \tau_{\lambda 1}) < 10^{-2}$ ($|\eta_1| \sim 1$), $\tau_{T2}^* \approx \tau_{T2} = (1/15) \tau_{\lambda 2}$, $(\omega \tau_{\lambda 2}) < 1$ ($|\eta_2| \sim 1$).

Если на поверхности капли имеет место фазовое превращение, то температура поверхности T_σ определяется его интенсивностью. При этом справедлива формула Герца — Кнудсена — Ленгмюра [11]

$$(2.3) \quad \frac{njl}{\alpha_2 \rho_1^0 c_1} = \frac{T_S - T_\sigma}{\tau_\sigma}, \quad \tau_\sigma = \frac{1-r}{3(\gamma_1-1)} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma_1}} \frac{a C_1^3}{\beta l^2},$$

где τ_σ — «время релаксации» температуры на межфазной границе, зависящее от значения коэффициента аккомодации (конденсации) β и не зависящее от частоты ω ; T_S — температура насыщения, являющаяся известной функцией давления; γ_1 — показатель адиабаты чистого газа; $r = \rho_{10}^0/\rho_2^0$.

3. Некоторые оценки. Выполним сравнительные оценки характерных перепадов температур $T_1 - T_\sigma$, $T_2 - T_\sigma$, $T_\sigma - T_S$, реализующихся при акустическом воздействии на газовзвесь. Используем для этого уравнение притока тепла к межфазной границе, в соответствии с которым

$$(3.1) \quad \frac{T_1 - T_\sigma}{\tau_{\sigma 1}^*} = \frac{T_\sigma - T_2}{\tau_{\sigma 2}^*} + \frac{T_\sigma - T_S}{\tau_\sigma},$$

$$\tau_{\sigma 1}^* = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \tau_{T1}^* = \frac{1}{3} \tau_{\lambda 1} \eta_1(z_1), \quad \tau_{\sigma 2}^* = \frac{\rho_1^0 c_1 a^2}{\rho_2^0 c_2} \tau_{T2}^* = \frac{\rho_1^0 c_1 a^2}{15 \lambda_2} \eta_2(z_2).$$

Левая часть этого уравнения пропорциональна тепловому потоку от газа к поверхности раздела фаз, который обеспечивает затраты тепла на фазовый переход (второе слагаемое в правой части) и на изменение температуры частиц (первое слагаемое в правой части).

Используемые при записи (3.1) характерные времена $\tau_{\sigma 1}^*$ и $\tau_{\sigma 2}^*$, как правило, сильно отличаются друг от друга:

$$(3.2) \quad \left| \frac{\tau_{\sigma 2}^*}{\tau_{\sigma 1}^*} \right| = \frac{1}{5} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \left| \frac{\eta_2}{\eta_1} \right| \ll 1, \quad |\eta_2| < |\eta_1|, \quad \lambda_1 \ll \lambda_2.$$

Малость же отношения $\tau_\sigma / |\tau_{\sigma 2}^*|$ имеет место лишь в определенных диапазонах размеров частиц и частот колебаний, зависящих от физических свойств фаз.

$$(3.3) \quad \left| \frac{\tau_\sigma}{\tau_{\sigma 2}^*} \right| = \frac{15}{\beta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \left(\frac{C_1^2}{l} \right)^2 \left(\frac{L}{a} \right) \frac{1}{|\eta_2|} \ll 1,$$

где $L \sim \lambda_1 / \rho_1^0 c_1 C_1$ ($\gg a$) — длина свободного пробега молекул в газе. Так,

для смеси пара с каплями воды в состоянии насыщения при $p = 1,0$ МПа, когда $\lambda_2/\lambda_1 \cong 20$, $U/C_1^2 \cong 8$, $L \sim 10^{-8}$ м, имеем $\tau_\sigma/|\tau_{\sigma 2}^*| \sim 10^2(L/a)/|\eta_2|$. Если характерный размер капель $a \sim 10^{-5}$ м, то величина τ_σ для такой взвеси значительно меньше $|\tau_{\sigma 2}^*|$ лишь при $|\eta_2| \sim 1$, т. е. когда «внутренний» теплообмен идет в квазистационарных условиях ($\omega < 1/\tau_{\lambda 2}$).

Уравнение притока тепла (3.1) с учетом оценки (3.2) позволяет сделать вывод, что образующаяся при воздействии акустического поля неоднородность температур внутри капель (отличие T_2 от T_σ) мала по сравнению с имеющей место неоднородностью температур в газовой фазе (отличие T_1 от T_σ). Неравновесность межфазных границ (отличие T_σ от T_S) может наблюдаться только при высоких частотах колебаний или малых размерах капель, когда за счет малости $|\eta_2|$ или a величина $|\tau_{\sigma 2}^*|$ также становится малой и приближается к τ_σ (оценка (3.3)). Как правило, для акустических полей в газовзвесах характерно $|T_\sigma - T_S| \ll \ll |T_\sigma - T_2| \ll |T_1 - T_\sigma|$.

Если фазовые переходы отсутствуют, то $q_{1\sigma} = q_{2\sigma}$ и $(T_1 - T_\sigma)/\tau_{\sigma 1}^* = (T_\sigma - T_2)/\tau_{\sigma 2}^*$. Выражая из этого уравнения T_σ , уравнение притока тепла для частиц можно записать в виде

$$(3.4) \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{T_1 - T_2}{\tau_T^*},$$

$$\tau_T^* = \frac{\rho_2^0 c_2}{\rho_1^0 c_1} (\tau_{\sigma 1}^* + \tau_{\sigma 2}^*) \approx \tau_{\sigma 1}^* \frac{\rho_2^0 c_2}{\rho_1^0 c_1} = \tau_T \eta_1(z_1), \quad \tau_T = \frac{a^2 \rho_2^0 c_2}{2\lambda_1},$$

где τ_T — «квазистационарное» время релаксации температур между фазами; τ_T^* — его комплексный аналог. Здесь при упрощении выражения для τ_T^* использована оценка (3.2), в соответствии с которой при отсутствии фазовых переходов «внутренняя» нестационарность теплообмена несущественна при любых частотах.

Результаты выполненного анализа процессов обмена массой, импульсом и теплом между фазами газовзвеси позволяют указать характерные диапазоны частот акустических полей, при которых применимы те или иные приближенные теории. В частности, можно выделить три следующих основных диапазона:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \omega \ll (\tau_v^{-1}, \tau_T^{-1}); \\ (\tau_v^{-1/2}, \tau_T^{-1/2}) &\leq \omega^{1/2} \ll (\tau_{\mu 1}^{-1/2}, \tau_{\lambda 1}^{-1/2}, \tau_{\lambda 2}^{-1/2}); \\ (\tau_{\mu 1}^{-1/2}, \tau_{\lambda 1}^{-1/2}, \tau_{\lambda 2}^{-1/2}) &\leq \omega^{1/2} \ll \omega_C (\omega_C = \pi C_1/a) \\ &(\tau_v \sim \tau_T, \tau_{\mu 1} \sim \tau_{\lambda 1}). \end{aligned}$$

В первом из них применима наиболее простая термодинамически равновесная теория, во втором — неравновесная теория, использующая приближение квазистационарности межфазного обмена, в третьем — общая неравновесная теория, учитывающая нестационарные эффекты обмена массой, импульсом и теплом между фазами. Отметим, что, несмотря на $\tau_{\lambda 2} \gg \tau_{\lambda 1}$, зачастую именно условия в газовой фазе определяют верхнюю границу частот ω , при которых можно использовать квазистационарную схему межфазного теплообмена [12].

4. Дисперсионные зависимости. Далее используем следующие безразмерные параметры, характеризующие состав смеси и физические свойства фаз:

$$m = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad m^0 = \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0}, \quad r = \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}, \quad \bar{c}_1 = \frac{c_1}{\gamma_1 R_1} = \frac{1}{\gamma_1 - 1}, \quad \bar{c}_2 = \frac{c_2}{\gamma_1 R_1}, \quad \bar{l} = \frac{l}{C_1^2}$$

(R_1^* — газовая постоянная).

Из условия существования у системы линейных уравнений (1.1), (1.2), (2.4)–(2.3) ненулевого решения вида (1.3) получим следующую дисперсионную зависимость волнового числа k_{*z} от частоты ω :

$$(4.1) \quad (C_1 k_{*z}/\omega)^2 = V(\omega) \Theta(\omega),$$

$$V(\omega) = 1 + m \frac{M^{(1)} - M^{(2)}}{M^{(3)} + m M^{(2)}}, \quad \Theta(\omega) = 1 + m \frac{\Lambda^{(1)} + (\gamma_1 - 1) \Lambda^{(2)}}{\Lambda^{(3)} + m \Lambda^{(2)}},$$

$$M^{(1)} = (1 - r)/(1 + mr), \quad M^{(2)} = r [1 - r(i\omega\tau_v^*)], \quad M^{(3)} = 1 - (i\omega\tau_v^*),$$

$$\Lambda^{(1)} = (1 - r) \bar{l}^{-2} [(1 - r)(\bar{c}_1 + m\bar{c}_2) - 2\bar{l} - (1 - r)m^0 \bar{c}_2 (i\omega\tau_{\sigma 1}^*) - ((1 - r)\bar{c}_1 - 2\bar{l})(i\omega\tau_{T 2}^*)],$$

$$\Lambda^{(2)} = 1 - (i\omega\tau_{T 2}^*) - m^0 (\bar{c}_2/\bar{c}_1)(i\omega\tau_{\sigma}), \quad \Lambda^{(3)} = -m^0 [(i\omega\tau_{\sigma 1}^*) + (i\omega\tau_{\sigma}) + (\omega\tau_{\sigma 1}^*)(\omega\tau_{T 2}^*) + m^0 (\bar{c}_2/\bar{c}_1)(\omega\tau_{\sigma 1}^*)(\omega\tau_{\sigma}) + (\omega\tau_{T 2}^*)(\omega\tau_{\sigma})].$$

Здесь $V(\omega)$ и $\Theta(\omega)$ — определяемые размером частиц и теплофизическими свойствами фаз ($\gamma_1, C_1, l, \beta, \mu_1, \rho_j^0, c_j, \lambda_j, j = 1, 2$) комплексные функции, описывающие дисперсионные и диссипативные эффекты из-за относительного скольжения фаз и неравновесного межфазного теплообмена соответственно. При отсутствии частиц ($m = 0$) указанные эффекты не наблюдаются, в этом случае $V = \Theta = 1$. Отметим, что дисперсионное соотношение, полученное в [4] и соответствующее предельно малым объемным содержаниям взвешенной фазы, следует из (4.1) при предельном переходе $r \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0$.

Для оценки относительного вклада в функцию $\Theta(\omega)$ членов, ответственных за отдельные релаксационные процессы межфазного тепло- и массообмена, составляющие ее комплексные функции $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}$ и $\Lambda^{(3)}$ удобно переписать так, чтобы в них фигурировали уже обсуждавшиеся ранее (см. (3.2), (3.3)) отношения характерных времен релаксаций $\tau_{\sigma 1}^*, \tau_{\sigma 2}^*$ и τ_{σ} :

$$\Lambda^{(1)} = \frac{1 - r}{\bar{l}^2} \left\{ [(1 - r)(\bar{c}_1 + m\bar{c}_2) - 2\bar{l}] - m^0 \bar{c}_2 (i\omega\tau_{\sigma 1}^*) \left[1 - r + [1 - r - 2(\gamma_1 - 1)\bar{l}] \frac{\tau_{\sigma 2}^*}{\tau_{\sigma 1}^*} \right] \right\},$$

$$\Lambda^{(2)} = 1 - (i\omega\tau_{T 2}^*) \left[1 + \frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{\sigma 2}^*} \right],$$

$$\Lambda^{(3)} = -m^0 (i\omega\tau_{\sigma 1}^*) \left\{ \left[1 + \frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{\sigma 1}^*} \right] - (i\omega\tau_{T 2}^*) \left[1 + \frac{\tau_{\sigma}}{\tau_{\sigma 2}^*} \left[1 + \frac{\tau_{\sigma 2}^*}{\tau_{\sigma 1}^*} \right] \right] \right\}.$$

В соответствии с оценкой (3.2) $|\tau_{\sigma 2}^*/\tau_{\sigma 1}^*| \ll 1$ при любых частотах колебаний. Поэтому содержащими это отношение членами в $\Lambda^{(1)}$ и $\Lambda^{(3)}$, как правило, можно пренебречь по сравнению с единицей. Влияние неравновесности фазовых переходов начинает проявляться тогда, когда входящее в $\Lambda^{(2)}$ и $\Lambda^{(3)}$ отношение $\tau_{\sigma}/\tau_{\sigma 2}^*$, растущее с увеличением частоты ω , становится по абсолютной величине сравнимым с единицей ($|\tau_{\sigma}/\tau_{\sigma 2}^*| \sim 1$).

Выражения для равновесной C_e и замороженной C_f скоростей звука в парокapельной смеси, получающиеся при предельных переходах $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$, могут быть записаны в виде

$$(4.2) \quad C_e = C_1 \left[\frac{(1 + mr)^2 \gamma_e}{(1 + m) \gamma_1} \right]^{1/2}, \quad C_f = C_1 \left[(1 + mr) \frac{2 + r(1 + 3mr)}{2 + r(1 + 3m)} \right]^{1/2},$$

$$\gamma_e = \left\{ 1 + \frac{1 - r}{\gamma_1 \bar{l}^2} [(1 - r)(\bar{c}_1 + m\bar{c}_2) - 2\bar{l}] \right\}^{-1},$$

где γ_e — аналог равновесного показателя адиабаты двухфазной смеси с фазовыми переходами. Замороженная скорость C_f практически реализуется ($C(\omega) \approx C_f$) при больших ($\omega\tau_v, \omega\tau_T \gg 1$), но тем не менее допустимых для данной теории частотах $\omega\tau_C \ll 1$.

Дисперсионное соотношение, соответствующее частному случаю отсутствия фазовых переходов, может быть получено из (4.1) при предельном переходе $\tau_\sigma \rightarrow \infty$. В этом случае $V(\omega)$ остается такой же, как в (4.1), а $\Theta(\omega)$ имеет более простой вид с комплексным временем релаксации τ_T^* , определенным в (3.4):

$$(4.3) \quad \Theta(\omega) = \frac{\gamma_e (1+m) c_V / c_1 - i\omega\tau_T^*}{\gamma_e (1+m) c_V / c_1 - i\omega\tau_T^*}$$

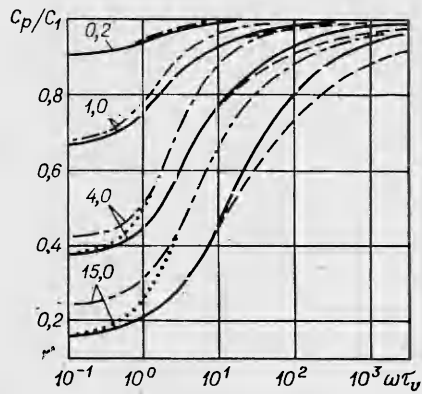
$$c_V = \frac{c_1 - R_1 + mc_2}{1+m}, \quad c_p = \frac{c_1 + mc_2}{1+m}, \quad \gamma_e = \frac{c_p}{c_V}.$$

Здесь c_V и c_p — равновесные теплоемкости при постоянном объеме и давлении; γ_e — равновесный показатель адиабаты двухфазной смеси без фазовых превращений. Выражения для равновесной и замороженной скоростей звука, получающиеся из этой зависимости при предельных переходах $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$, совпадают с соответствующими выражениями (4.2), но со значением γ_e из (4.3). В диапазоне частот $0 < \omega < 10^{-2}/\tau_{\mu 1}$, рассмотренном в [2], дисперсионные зависимости (4.1), (4.3) согласуются с зависимостями [2].

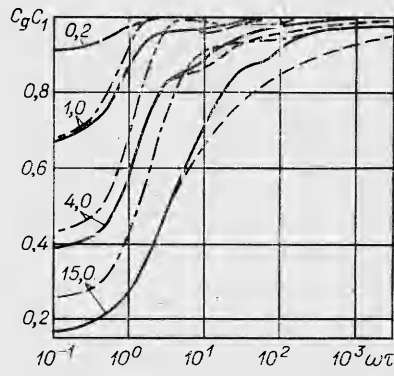
5. Анализ зависимостей скоростей распространения и коэффициента затухания возмущений от частоты колебаний. Характерный вид зависимостей фазовой C_p и групповой C_g скоростей распространения слабых возмущений, а также их линейного коэффициента затухания $k_{\text{ли}}$ от частоты колебаний ω показан на рис. 1—3. Зависимости соответствуют пароводяной смеси капельной структуры ($\alpha_2 < 0,05$) с начальным давлением $p = 1,0$ МПа и построены в диапазоне частот, удовлетворяющем требованию акустической однородности среды ($k^{-1} \gg a$). Различные серии кривых на каждом рисунке относятся к различным массовым содержаниям конденсированной фазы (цифры около кривых). Разные кривые каждой серии построены для различных значений коэффициента accommodation β . Сплошные линии соответствуют обычно принимаемому для воды значению $\beta = 0,04$, чему при $p = 1,0$ МПа, $T = T_S(p)$ и $a = 30$ мкм отвечает $\tau_\sigma/\tau_v \cong 6 \cdot 10^{-6}$, остальные кривые иллюстрируют степень влияния β на дисперсию и затухание возмущений: штрихпунктирные линии ($\beta = 0$) — замороженный массообмен ($\tau_\sigma = \infty$); штриховые ($\beta = \infty$) — квазиравновесный массообмен при $T_\sigma = T_S$ ($\tau_\sigma = 0$); кривые, соответствующие конечным значениям β , расположены внутри области, ограниченной предельными кривыми $\beta = 0$ и $\beta = \infty$, и стремятся к ним при больших и малых частотах соответственно (пунктирные линии — $\beta = 4 \cdot 10^{-4}$).

Сплошные кривые практически совпадают со штриховыми, когда $\tau_\sigma \ll |\tau_{\sigma 2}^*|$, а именно до частот $|\eta_2| \sim 1$, ($\omega\tau_{\lambda 2}$) ≤ 10 , что отвечает значениям $\omega\tau_v \leq 10$. Использование предположения о квазиравновесности массообмена ($\beta = \infty$) при больших частотах занижает фазовую скорость распространения малых возмущений и завышает их линейный коэффициент затухания. Замороженность массообмена приводит к увеличению скоростей и уменьшению линейного затухания возмущений. Функции $C_g(\omega)$ имеют тенденцию к формированию локальных экстремумов при определенных (зависящих от содержания капель в смеси) частотах колебаний.

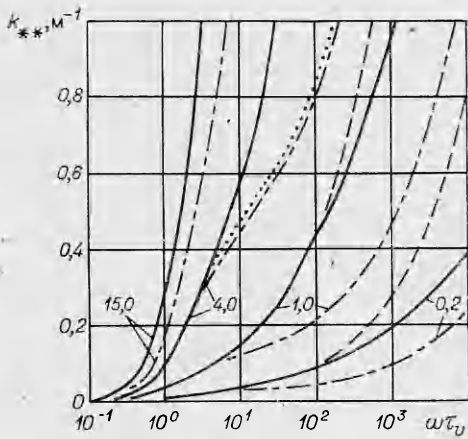
Учет нестационарных эффектов межфазного взаимодействия сводится к учету отличия τ_v^* , τ_{T1}^* и τ_{T2}^* от их стационарных аналогов, которое имеет место при высокочастотных возмущениях, когда реализуются более тонкие, чем это дает квазистационарная теория, пограничные слои вокруг капель. За счет этого процессы межфазного обмена идут быстрее или более «равновесно», чем по квазистационарным соотношениям, причем со



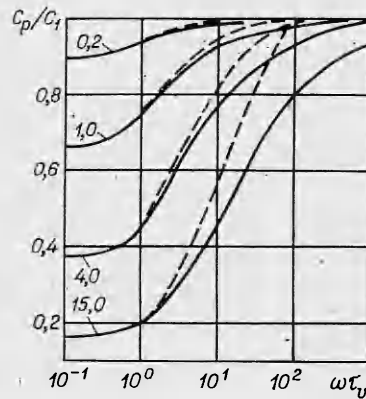
Р и с. 1



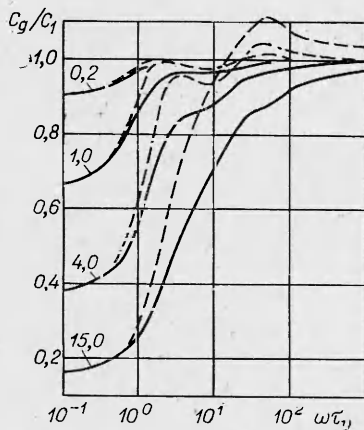
Р и с. 2



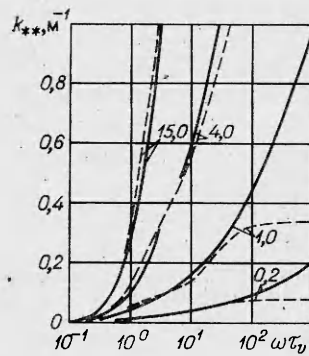
Р и с. 3



Р и с. 4



Р и с. 5



Р и с. 6

сдвигами по фазе относительно соответствующих термодинамических сил. В результате учет нестационарности приводит к тому, что скорость распространения возмущений падает, а линейный коэффициент затухания увеличивается. Влияние нестационарных эффектов на зависимости фазовой и групповой скоростей распространения слабых возмущений и их линейного коэффициента затухания от частоты колебаний проиллюстрировано на рис. 4–6. Сплошные кривые построены с учетом, штриховые без учета нестационарных эффектов. Параметры смеси те же, что и ранее, коэффициент адсорбции $\bar{\rho} = 0,04$. Влияние нестационарных эффектов (главным образом за счет скоростных [4]) сказывается при частотах

$\omega\tau_{\mu 1} = 9/2 (\rho_1^0/\rho_2^0) \omega\tau_v > 10^{-2}$, когда начинает проявляться отличие τ_v^* от τ_v .

Отметим следующее интересное обстоятельство. Если нестационарные эффекты не учитываются, то теория дает такие значения групповых скоростей $C_g(\omega)$, которые могут превышать замороженную скорость звука в смеси $C_f \approx C_1$. При этом величина линейного коэффициента затухания $k_{**}(\omega) \rightarrow \text{const}$ при $\omega \rightarrow \infty$. При учете нестационарных эффектов всегда $C_g(\omega) < C_f$, а при $\omega \rightarrow \infty$ величина $k_{**}(\omega) \rightarrow \infty$ как корень квадратный из ω . Главный член асимптотики $k_{**}(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ имеет вид (остаточный член ограничен)

$$k_{**}(\omega) \sim \frac{1}{2} m \sqrt{r} \frac{C_f^*}{C_1} \frac{\sqrt{\omega\tau_v}}{\tau_v C_1} \left\{ 6\alpha_1 \left[\frac{1-r}{2+r(1+3mr)} \right]^2 + (\gamma_1 - 1) \text{Pr}^{-1/2} \left[1 + r \frac{c_1}{c_2} \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \right]^{-1} \right\}$$

При $\alpha_2, r \ll 1$ эта формула упрощается:

$$k_{**}(\omega) \sim \frac{1}{2} m \sqrt{r} \frac{C_f^*}{\tau_v C_1} \left\{ \frac{3}{2} + (\gamma_1 - 1) \text{Pr}^{-1/2} \right\} \sqrt{\omega\tau_v}$$

Величины ω и a входят в комплексные функции $V(\omega)$ и $\Theta(\omega)$, определяющие k_*/ω , только в виде безразмерных комбинаций $\omega\tau_{\mu 1}$, $\omega\tau_{\lambda 1}$, $\omega\tau_{\lambda 2}$, $\omega\tau_\sigma$. Безразмерные комбинации такого типа будем называть частотно-структурными параметрами. Они характеризуют отношения различных времен релаксаций ($\tau_{\mu 1}, \tau_{\lambda 1}, \tau_{\lambda 2} \sim a^2$, $\tau_\sigma \sim a$) к периоду колебаний. Зафиксируем свойства фаз ($\gamma_1, C_1, l, \rho_j^0, \lambda_j, c_j, j = 1, 2$) и выделим два предельных случая, когда фазовые переходы или отсутствуют ($\tau_\sigma = \infty$), или происходят квазиравновесно, т. е. равновесно на межфазной границе ($\tau_\sigma = 0$). В обоих случаях комбинация $\omega\tau_\sigma$ в дисперсионную зависимость не входит, а остальные частотно-структурные параметры отличаются друг от друга только постоянными множителями. Это значит, что в указанных предельных по τ_σ случаях дисперсионная зависимость k_*/ω от ω и a есть функция только от одного комплекса ωa^2 , т. е. фактически только от одного частотно-структурного параметра, например от $\bar{\omega} = \omega\tau_v$, который является наиболее показательным для газозвесей. Таким образом, при $\omega\tau_\sigma \gg 1$ или $\omega\tau_\sigma \ll 1$ имеем

$$C(\omega, \nu) = C(\omega a^2) = \bar{C}(\bar{\omega}), \quad k_{**}(\omega, a) = \frac{1}{a^2} \bar{k}_{**}(\bar{\omega}), \quad \bar{\omega} = \omega\tau_v = \frac{2\rho_1^0}{\vartheta\mu_1} \omega a^2$$

Другими словами, при замороженных фазовых переходах ($\beta = 0$) или их квазиравновесном протекании ($\beta = \infty$) зависимости $C_p(\bar{\omega})$ и $C_g(\bar{\omega})$ (штриховые и штрихпунктирные линии на рис. 1, 2) годятся для произвольных размеров частиц из области допустимых ($\omega\tau_c \ll 1$). Неавтономность $C_p(\bar{\omega})$ и $C_g(\bar{\omega})$, т. е. дополнительное влияние размера частиц a на последние зависимости, проявляется из-за температурной неравновесности межфазных границ только при наличии фазовых переходов, когда сказывается отличие T_σ от температуры насыщения T_S . Последнее же имеет место при $\tau_\sigma/|\tau_{\sigma 2}| \sim 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bhutani O. P., Chandran P. Weak waves in dusty gas. — Int. J. Eng. Sci., 1977, v. 15, N 9—10.
2. Ивандаев А. И. Распространение малых возмущений в двухфазных смесях пара с каплями. — Акуст. журн., 1978, т. 24, № 1.
3. Nikaten Kaipashin, Peddieson John, Jr. Au Bernard C. One-dimensional acoustic wave propagation in a particulate suspension. — Int. J. Eng. Sci., 1933, v. 21, N 7.

4. Гумеров Н. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И. Дисперсия и диссипация акустических волн в газовзвесах. — ДАН СССР, 1983, т. 272, № 3.
5. Davidson G. A. Burgers' equation approach to finite amplitude acoustics in aerosol media. — J. Sound and Vibr., 1975, v. 38, N 4.
6. Борисов А. А., Вахгельт А. Ф., Накоряков В. Е. Распространение длинноволновых возмущений конечной амплитуды в газовзвесах. — ПМТФ, 1980, № 5.
7. Борисов А. А., Вахгельт А. Ф., Накоряков В. Е. Распространение возмущений конечной амплитуды в газовзвесах. — Акуст. журн., 1981, т. 27, № 6.
8. Тараканов С. В., Тодес О. М. Приближение Бюргера для плоских длинноволновых возмущений в аэрозвесах. — ПМТФ, 1982, № 1.
9. Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И. Особенности распространения слабых возмущений в двухфазных средах с фазовыми переходами. — ПМТФ, 1970, № 5.
10. Marble F. E. Dynamics of dusty gases. — In: Annual Review of Fluid Mechanics. Palo Alto, Calif., 1970, v. 2. Рус. пер. Механика. Сб. пер., 1971, № 6.
11. Нигматулин Р. И. Механика гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
12. Ивандаев А. И. Коэффициенты межфазного теплообмена в двухфазных дисперсных средах при воздействии акустических полей. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1984, № 5.

Поступила 30/VII 1984 г.

УДК 532.525.2

КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ПРИ СМЕШЕНИИ НЕРАСЧЕТНЫХ ПЛОСКИХ СТРУЙ

Г. Н. Волчкова, А. В. Лавров, Е. Т. Михайлова, С. С. Харченко

(Ленинград)

Теоретическое исследование смешения газов с учетом колебательной релаксации — в настоящее время актуальная проблема, возникающая, в частности, при изучении ГДЛ с селективным тепловым возбуждением. Эти лазеры могут найти применение в металлургическом производстве, где азот, необходимый для работы такого лазера, получается в больших количествах, а разогрев его можно осуществлять в теплообменниках [1].

Для численного исследования процессов ГДЛ широко используется простая модель мгновенного смешения, которая не отражает реальных особенностей смешения. Более точно описывает процесс смешения модель на основе уравнений пограничного слоя или узкого канала, однако она не дает возможности исследовать смешение сверхзвуковых струй с отличающимися давлениями. В этом случае изучать смешение можно при помощи модели на основе упрощенных уравнений Навье — Стокса, получивших в последнее время широкое распространение.

1. В данной работе рассматривается задача о ламинарном и турбулентном смешении в периодической системе плоских сверхзвуковых струй $\text{CO}_2 - \text{H}_2\text{O}$ и N_2 с учетом колебательной неравновесности и вынужденного излучения. Численное моделирование осуществляется на основе упрощенных уравнений Навье — Стокса или Рейнольдса для турбулентных течений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho uh) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vh) &= u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\mu}{\text{Pr}} \sum_{i=1}^3 \left[(\text{Le}_i - 1) h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} + c_i \frac{\partial e_{vi}}{\partial y}\right]\right\} - \alpha J, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u c_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v c_i) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \text{Le}_i \frac{\partial c_i}{\partial y}\right), \end{aligned}$$