

Л. А. Фильштинский, Л. И. Фоменко

ДИНАМИЧЕСКАЯ НАПРЯЖЕННОСТЬ ПРОВОДЯЩЕГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ОТВЕРСТИЕМ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

При механическом возбуждении диа(пара)-магнетика, находящегося в статическом магнитном поле, в теле возникают наведенные (вихревые) токи, что приводит к появлению объемных сил Лоренца, которые учитываются тензором максвелловских напряжений, вносящим существенные поправки в напряженное состояние тела.

Ниже рассматривается проводящее упругое полупространство с туннельными полостями, подверженное механическому возбуждению и находящееся в однородном статическом магнитном поле. Соответствующая задача магнитоупругости сводится к сингулярному интегральному уравнению, которое решается численно при помощи метода механических квадратур. Приводятся результаты расчетов, характеризующие зависимость концентраций напряжений на контуре отверстия от конфигурации отверстия, величины приложенного магнитного поля, частоты возбуждения.

1. Исходные соотношения линейной магнитоупругости. Постановка задачи. В полную систему уравнений магнитоупругости входят [1—3] уравнения движения

$$(1.1) \quad \partial_j \sigma_{ij} + \rho_e E_i + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i = \rho \partial^2 u_i / \partial t^2 \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

Максвелла

$$(1.2) \quad \text{rot } \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0, \text{rot } \mathbf{H} - \partial \mathbf{D} / \partial t = \mathbf{j}, \text{div } \mathbf{D} = \rho_e, \text{div } \mathbf{B} = 0$$

и материальные

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} + \alpha(\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \mathbf{B} = \mu_e \mathbf{H} - \alpha(\mathbf{v} \times \mathbf{E}), \\ \mathbf{j} &= \rho_e \mathbf{v} + \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \alpha = \epsilon \mu_e - \epsilon_0 \mu_0, \\ \sigma_{ij} &= 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk}, \epsilon_{ij} = (1/2)(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \\ \partial_i &= \partial / \partial x_i, \mathbf{v} = \partial \mathbf{u} / \partial t \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Граничные условия на поверхности раздела двух сред имеют вид

$$(1.4) \quad \begin{aligned} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\tau &= 0, [\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}]_\tau = 0, \\ [\mathbf{B}]_n &= 0, [\mathbf{D}]_n = 0, [\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \rho_e \mathbf{v}]_n = 0, \\ [\sigma_{ij} + t_{ij}] n_j &= X_{in} \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \\ t_{ij} &= E_i D_j + H_i B_j - (1/2) \delta_{ij} (E_k D_k + B_k H_k). \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{H} , \mathbf{B} — напряженности и индукции соответственно электрического и магнитного полей; ϵ , ϵ_0 и μ_e , μ_0 — электрическая и магнитная проницаемости вещества и вакуума; ρ_e — пространственная плотность электрического заряда; \mathbf{j} — плотность тока; ρ — плотность вещества; u_i , σ_{ij} — механические перемещения и напряжения; X_{in} — компоненты внешней поверхностной нагрузки; μ , λ — постоянные Ламе; δ_{ij} — символ Кронекера; символ [] — скачок соответствующей величины на линии раздела сред.

Пусть в магнитоупругой среде, находящейся в состоянии покоя, действует статическое магнитное поле \mathbf{H}^0 . Внешнее возбуждение вызывает деформацию тела и появление электромагнитного поля, которое может быть описано малыми флуктуациями $\mathbf{e} = (e_1; e_2; e_3)$ и $\mathbf{h} = (h_1; h_2; h_3)$. В дальнейшем будем полагать его квазистатическим ($\mathbf{D} = 0$ и $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$).

Считая $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{h}$, $\mathbf{E} = \mathbf{e}$, систему (1.1)–(1.4) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu_e (\mathbf{j} \times \mathbf{H}^0) &= \rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2, \\ \text{rot } \mathbf{h} &= \mathbf{j}, \text{rot } \mathbf{e} = -\mu_e \partial \mathbf{h} / \partial t, \text{div } \mathbf{h} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mu_e \mathbf{h}, \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{e} + \mu_e \mathbf{v} \times \mathbf{H}^0), \\ [\mathbf{e} + \mu_e \mathbf{v} \times \mathbf{H}^0]_{\tau} &= 0, \quad [\mathbf{h}]_{\tau} = 0, \quad [\sigma(\mathbf{e} + \mu_e \mathbf{v} \times \mathbf{H}^0)]_n = 0, \\ [\mu_e \mathbf{h}]_n &= 0, \\ [\sigma_{ij} + \mu_e (H_i^0 h_j + H_j^0 h_i - \delta_{ij} H_k^0 h_k)] n_j &= X_{in}. \end{aligned}$$

Для некоторых материалов (например, Al, Cu) целесообразно упростить модель, приписав среде идеальную проводимость ($\sigma \rightarrow \infty$). В этом случае приходим к замкнутой системе соотношений

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu_e \text{rot } \mathbf{h} \times \mathbf{H}^0 &= \rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2, \\ \mathbf{h} = \text{rot } (\mathbf{u} \times \mathbf{H}^0), \quad \mathbf{e} = -\mu_e (\mathbf{v} \times \mathbf{H}^0), \quad [\mathbf{h}]_{\tau} &= 0, \\ [\mu_e \mathbf{h}]_n &= 0, \\ [\sigma_{ij} + \mu_e (H_i^0 h_j + H_j^0 h_i - \delta_{ij} H_k^0 h_k)] n_j &= X_{in}. \end{aligned}$$

Предположим, что магнитоупругая среда неоднородна, а именно: в среде имеются цилиндрические вдоль оси x_3 отверстия L_j ($j = 1, \dots, k$), а вектор начального магнитного поля $\mathbf{H}^0 = (0; H_0; 0)$ (рис. 1). Соответствующее статическое поле описывается системой уравнений

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \partial_i \theta = 0, \quad \theta = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2, \quad \mu \nabla^2 u_3 = 0, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 \quad (i=1, 2)$$

и граничных условий

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \cos \psi + \sigma_{12} \sin \psi &= X_{1n} + \frac{\kappa_{11} \mu}{2} H_0^2 (1 + \kappa \sin^2 \psi) \cos \psi, \\ \sigma_{21} \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi &= X_{2n} + \frac{\kappa_{21} \mu}{2} H_0^2 (1 + \kappa \sin^2 \psi) \sin \psi, \\ \sigma_{31} \cos \psi + \sigma_{32} \sin \psi &= X_{3n}, \quad \kappa = \mu_e / \mu_0 - 1, \\ H_1^* &= (\kappa/2) H_0 \sin 2\psi, \quad H_2^* = H_0 (1 + \kappa \sin^2 \psi). \end{aligned}$$

Здесь ψ — угол между положительной нормалью к контуру L_j и осью Ox_1 (рис. 1); звездочка относится к полости отверстия.

Таким образом, статические поля определяются обычными статическими уравнениями теории упругости, причем двумерные задачи разделяются на состояния плоской и антиплоской деформации. Для таких материалов, как медь, алюминий и некоторые другие, магнитная проницаемость практически совпадает с магнитной проницаемостью вакуума. Поэтому можно положить $\kappa = 0$. В этом случае предварительное статическое магнитное поле вообще не влияет на напряженное состояние тела.

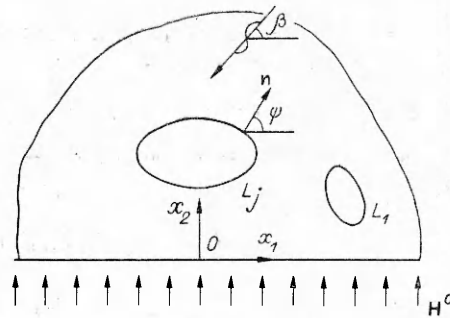


Рис. 1

Определим поля флуктуаций. В силу (1.5) получаем следующие соотношения: для плоской деформации уравнения движения

$$\begin{aligned} (1 + \chi^2) \nabla^2 u_1 + \sigma_* \partial_1 \theta &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \\ \nabla^2 u_2 + \sigma_* \partial_2 \theta &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \chi^2 = \frac{\mu_e H_0^2}{\mu}, \quad \sigma_* = \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \end{aligned}$$

компоненты электромагнитного поля

$$\begin{aligned} h_1 &= H_0 \partial_2 u_1, \quad h_2 = -H_0 \partial_1 u_1, \quad h_3 = 0, \quad e_1 = e_2 = 0, \\ e_3 &= -\mu_e H_0 \partial u_1 / \partial t, \end{aligned}$$

граничные условия на L_j ($j = 1, \dots, k$)

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \cos \psi + \sigma_{12} \sin \psi &= X_{1n} + \mu_0 \kappa H_0 (h_2 + \\ &+ \kappa \sin \psi (h_1 \cos \psi + h_2 \sin \psi)) \cos \psi, \\ \sigma_{21} \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi &= X_{2n} + \mu_0 \kappa H_0 (h_1 \cos \psi + \\ &+ h_2 \sin \psi) (1 + \kappa \sin^2 \psi),\end{aligned}$$

$$h_1^* = h_1 (1 + \kappa \cos^2 \psi) + (\kappa/2) h_2 \sin 2\psi, \quad h_2^* = h_2 (1 + \kappa \sin^2 \psi) + (\kappa/2) h_1 \sin 2\psi;$$

для антиплоской деформации
уравнение движения

$$(1.6) \quad \nabla^2 u_3 + \chi^2 \partial_z^2 u_3 = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

компоненты электромагнитного поля

$$(1.7) \quad h_1 = h_2 = 0, \quad h_3 = H_0 \partial_z u_3, \quad e_1 = -\mu_e H_0 \partial u_3 / \partial t, \quad e_2 = e_3 = 0,$$

граничные условия на L_j ($j = 1, \dots, k$)

$$(1.8) \quad \sigma_{31} \cos \psi + \sigma_{32} \sin \psi = X_{3n}, \quad h_3^* = h_3.$$

Ниже рассмотрим задачу об антиплоской деформации (1.6)–(1.8) для проводящего полупространства $x_2 \geq 0$ с цилиндрическими вдоль x_3 отверстиями L_j (см. рис. 1). Пусть полупространство свободно от сил и граничит с вакуумом, причем статическое магнитное поле в вакууме $(0; H_0^*; 0)$, а в среде $(0; H_0; 0)$, где $H_0 = \mu_0 H_0^* / \mu_e$. В качестве механического возбуждения возьмем не зависящую от координаты x_3 сдвиговую нагрузку $X_{3n} = \text{Re}(X_3 e^{-i\omega t})$, действующую на поверхностях полостей, либо падающую из бесконечности сдвиговую волну смещения

$$(1.9) \quad u_3^0 = \text{Re}(U_3^0 e^{-i\omega t}), \quad U_3^0 = U \exp(-i\gamma(x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta)), \\ U = \text{const}, \quad \gamma_2 = \omega/c_2, \quad \gamma = \gamma_2 / (\sqrt{1 + \kappa^2 \sin^2 \beta}).$$

Механическое поле в полупространстве с отверстиями складывается из поля падающей волны (1.9), поля отраженной волны

$$(1.10) \quad u_3^1 = \text{Re}(U_3^1 e^{-i\omega t}), \quad U_3^1 = U \exp(-i\gamma(x_1 \cos \beta - x_2 \sin \beta))$$

и рассеянного поля, которое представим в виде

$$(1.11) \quad u_3 = \text{Re}(U_3 e^{-i\omega t}), \\ U_3 = \int_L p(\zeta) (H_0^{(1)}(\gamma_2 r_1) + H_0^{(1)}(\gamma_2 r_1^*)) ds,$$

$$\zeta_1 = \xi_1 + \frac{i\xi_2}{\sqrt{1 + \kappa^2}}, \quad z_1 = x_1 + \frac{ix_2}{\sqrt{1 + \kappa^2}},$$

$$r_1 = |\zeta_1 - z_1|, \quad r_1^* = |\bar{\zeta}_1 - z_1|, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in L = UL_j.$$

Здесь $p(\zeta) = \{p_j(\zeta), \zeta \in L_j\}$ — неизвестная плотность; $H_n^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода n -го порядка; ds — элемент дуги контура L ; интегрирование ведется против часовой стрелки. Представление (1.11) автоматически удовлетворяет условию $\sigma_{32} = 0$ на границе полупространства, условию излучения, а функция u_3 является решением уравнения (1.6).

2. Интегральное уравнение краевой задачи. Граничное условие (1.8) на L_j представим в амплитудах

$$(2.1) \quad (S_{13} + S_{13}^0 + S_{13}^1) \cos \psi + (S_{23} + S_{23}^0 + S_{23}^1) \sin \psi = X_3 \\ (S_{i3}, S_{i3}^0, S_{i3}^1 — соответственно амплитуды величин $\sigma_{i3}, \sigma_{i3}^0, \sigma_{i3}^1$).$$

Вычисляя напряжения по формулам (1.3) с учетом (1.11) и подставляя предельные значения их при $z \rightarrow \zeta_0 \in L_j$ в краевое условие (2.1), приходим к интегральному уравнению относительно $p(\zeta)$:

$$(2.2) \quad p(\zeta_0) + \int_L p(\zeta) G(\zeta; \zeta_0) ds = N(\zeta_0),$$

$$G(\zeta; \zeta_0) = \frac{2}{i\pi\eta(\psi_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{c(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{10}} \right) + \frac{\gamma_2}{\eta(\psi_0)} (H_1(\gamma_2 r_{10}) \operatorname{Re}(c(\psi_0) e^{-i\alpha_{10}}) +$$

$$+ H_1^{(1)}(\gamma_2 r_{10}^*) \operatorname{Re}(c(\psi_0) e^{-i\alpha_{10}^*}),$$

$$N(\zeta) = \frac{1}{\mu\eta(\psi)} X_3 + \frac{i\gamma}{\eta(\psi)} (\cos(\beta - \psi) U_3^0 + \cos(\beta + \psi) U_3^1),$$

$$\eta(\psi) = -2i \operatorname{Im} \left(\frac{c(\psi)}{a(\psi)} \right), \quad c(\psi) = \cos \psi + \frac{i \sin \psi}{\sqrt{1 + \chi^2}},$$

$$a(\psi) = \frac{dc(\psi)}{d\psi}, \quad r_{10} = |\zeta_1 - \zeta_{10}|, \quad r_{10}^* = |\bar{\zeta}_1 - \zeta_{10}|,$$

$$\alpha_{10} = \arg(\zeta_1 - \zeta_{10}), \quad \alpha_{10}^* = \arg(\bar{\zeta}_1 - \zeta_{10}).$$

Отметим, что при отсутствии предварительного магнитного поля ($\chi = 0$) (2.2) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Если же $\chi > 0$, то получаем сингулярное интегральное уравнение второго рода.

3. Концентрация напряжений. При определении волновых полей напряжений в теле необходимо учитывать максвелловские добавки. Поэтому в общем случае сдвиговые напряжения на площадке, перпендикулярной контуру отверстия, определяются формулой

$$(3.1) \quad \tau_s = -(\sigma_{13} + \sigma_{13}^0 + \sigma_{13}^1 + t_{13}) \sin \psi + (\sigma_{23} + \sigma_{23}^0 + \sigma_{23}^1 + t_{23}) \cos \psi,$$

$$\tau_s = \operatorname{Re}(T e^{-i\omega t}).$$

Максвелловские напряжения t_{i3} в нашем случае имеют вид

$$(3.2) \quad t_{13} = 0, \quad t_{23} = \mu_e H_0^2 \partial_2 u_3.$$

Привлекая соотношения (1.3), (1.9)–(1.11) и (3.2) в формулу (3.1), определим амплитуду напряжений в точке $\zeta_0 \in L$:

$$(3.3) \quad T(\zeta_0) = -2i\mu \sqrt{1 + \chi^2} p(\zeta_0) \operatorname{Re} \left(\frac{c(\psi_0)}{a(\psi_0)} \right) + \int_L p(\zeta) K(\zeta; \zeta_0) ds +$$

$$+ i\mu\gamma (\sin(\psi_0 - \beta) U_3^0 + \sin(\psi_0 + \beta) U_3^1),$$

$$K(\zeta; \zeta_0) = \frac{2i\mu \sqrt{1 + \chi^2}}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{c(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{10}} \right) - \mu\gamma_2 (H_1(\gamma_2 r_{10}) b + H_1^{(1)}(\gamma_2 r_{10}^*) b^*),$$

$$b = \cos \alpha_{10} \sin \psi_0 - \sqrt{1 + \chi^2} \cos \psi_0 \sin \alpha_{10},$$

$$b^* = \cos \alpha_{10}^* \sin \psi_0 - \sqrt{1 + \chi^2} \cos \psi_0 \sin \alpha_{10}^*.$$

Пример. Пусть полупространство ослаблено полостью эллиптического поперечного сечения $\xi_1 = a_1 \cos \varphi$, $\xi_2 = h + b_1 \sin \varphi$. Предположим, что поверхность полости свободна от напряжений, а из бесконечности вдоль оси x_2 падает магнитоупругая сдвиговая волна (1.9). Для определения напряжения на контуре полости по формуле (3.3) необходимо знать функцию $p(\zeta)$, которая определяется из интегрального уравнения (2.2). Последнее решалось численно методом механических квадратур [4]. Результаты вычисления величины $\langle T \rangle = T/T_0$ в зависимости от $\gamma_2 R$ ($T_0 = \mu U \gamma$, $R = (a_1 + b_1)/2$) представлены на рис. 2, 3 для следующих параметров: $a_1 = 1$, $b_1 = 0,75$, $h = 1,75$. Кривые на рис. 2 соответствуют точке контура $\varphi = \pi/2$, на рис. 3 — точке $\varphi = 0$. Графики 1–3 постро-

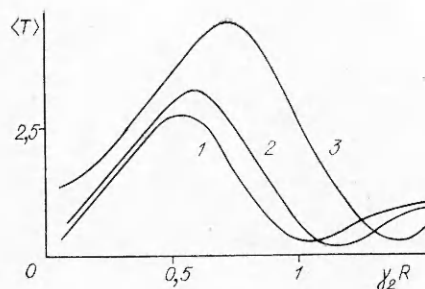


Рис. 2

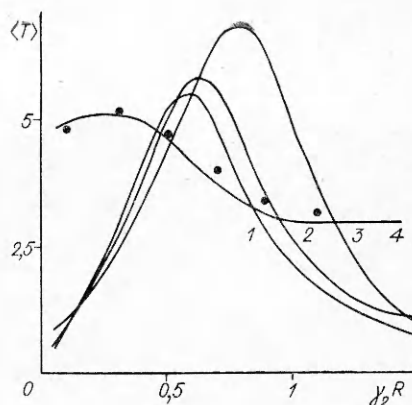


Рис. 3

ны для $\chi = 0; 0,5$ и 1 . Кривая 4 отвечает круговому отверстию $a_1 = b_1 = 1$, $h = 1,5$, $\chi = 0$, $\beta = 7\pi/8$, $\varphi = -\pi/2$, точками нанесены соответствующие данные из [5], полученные совершенно другим путем.

Результаты расчетов показывают, что неучет предварительного магнитного поля при анализе динамической напряженности тела может привести к существенному завышению расчетной прочности тела по сравнению с реальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shindo Y. Diffraction of antiplane shear waves by a finite crack in the presence of the magnetic field // *Z. angew. Math. und Mech.* — 1976. — V. 56, N 1.
2. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. — М.: Мир, 1986.
3. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных сред. — М.: Наука, 1988.
4. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. — М.: Наука, 1985.
5. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. — Киев: Наук. думка, 1978.

г. Сумы

Поступила 16 VII 1990 г. ■

УДК 535.9.082 : 53.082.73

Л. И. Кузнецов

ПЕРЕДАЧА ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ НА МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МИШЕНИ, ОБЛУЧАЕМЫЕ НЕОДИМОВЫМ ЛАЗЕРОМ В РЕЖИМЕ СВОБОДНОЙ ГЕНЕРАЦИИ

При воздействии на материалы концентрированных потоков энергии, например лазерного излучения (ЛИ), при определенных энергиях наблюдаются осцилляции давления, измеряемые пьезодатчиками на тыльной стороне мишеней [1]. Авторы [1] обнаружили осцилляции давления на мишени из свинца при $J \approx 2$ МВт/см², которые при увеличении J быстро исчезали. В [2, 3] подробно анализируются возможные механизмы возникновения осцилляций за счет автоколебательного режима самоэкранировки или вспышки поглощения в плазме светорезионного факела при неустойчивом режиме испарения.

Для детального исследования осцилляций давления на мишенях проведены эксперименты на вакуумной камере ВИКА [4]. Импульсное ЛИ с длиной волны 1,06 мкм и длительностью по полувысоте $3 \cdot 10^{-4}$ с воздействовало на металлические и диэлектрические мишени в камере, давление в которой могло изменяться от 10^5 до 10^{-2} Па. Диаметр пятна облучения в большинстве режимов 6 мм, диаметр мишеней 20 мм.