обратного течения в сечении S^+ ($v^+ < 0$) и падение p_σ, что уменьшает ε_m, причем $\varepsilon_m \to 0$ при $mS_k^0 \to \infty$. Область применения решения (7.3) ограничена условиями $M^- < 1$, $M^+ < 1$.

Таким образом, для задач гидродинамики внутренних течений с локальными воздействиями на поток сформулированная здесь гипотеза относительно термодинамической функции σ_p обладает большей универсальностью, нежели прежние. Следствие этой гипотезы — дополнительное уравнение (3.8) — расширило область приложения уравнений гидродинамики в интегральной форме для определения интегральных характеристик потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нейланд В. Я., Куканова Н. И.** Исследование течений со срывными зонами // Обзоры. Переводы. Рефераты.— БНИ ЦАГИ.— 1965.— № 129.
2. **Гинзбург И. П.** Прикладная гидрогазодинамика.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1958.
3. **Соркин Р. Е.** Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе.— М.: Наука, 1983.
4. **Орлов Б. В., Мазинг Г. Ю.** Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе.— М.: Машиностроение, 1979.
5. **Дулов В. Г.** Распад произвольного разрыва параметров газа на скачке площади сечения // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия.— 1958.— № 19.
6. **Яушев И. К.** Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1967.— № 8, вып. 2.
7. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1976.— Т. 2.
8. **Мамаев В. А., Одишария Г. Э., Семенов Н. И., Точилин А. А.** Гидродинамика газожидкостных смесей в трубах.— М.: Недра, 1969.
9. **Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Бунимович А. И., Зверев Н. И.** Газовая динамика.— М.: Высш. шк., 1965.
10. **Ерошенко В. М., Зайчик Л. И.** Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях.— М.: Наука, 1984.
11. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1976.— Т. 1.
12. **Справочник** по гидравлическим расчетам/Под ред. П. Г. Киселева.— М.: Энергия, 1972.
13. **Чугаев Р. Р.** Гидравлика.— Л.: Энергоиздат, 1982.
14. **Честер У.** Распространение ударных волн в каналах переменного сечения // Проблемы механики.— 1963.— Вып. 4.
15. **Ульянов И. Е., Крумина Н. Н., Вакар Н. В.** Проектирование воздуховодов самолетных силовых установок.— М.: Машиностроение, 1979.
16. **Коровин Е. П.** Исследование удара газа при внезапном расширении.— Тр. СибНИА, 1954.

Поступила 26/I 1987 г.,
в окончательном варианте — 29/IX 1987 г.

УДК 517.947 + 519.3 + 538.632

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ТЕНЗОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. В. Денисенко

(Красноярск)

В [1, 2] под названием «вариационные» рассмотрены два совершенно различных метода. В первом случае это аналоги принципа Дирихле для уравнения Лапласа, устанавливающие эквивалентность решения краевой задачи и минимизации функционала энергии, иначе их называют энергетическими, во втором — аналоги принципа Линделёфа, устанавливающие зависимость качественных характеристик решения от изменений формы области. Принципиально различаются и способы доказательства принципов, однако наиболее просто и полно вариационные принципы обоих типов получаются для решений уравнения Лапласа. Принципы обобщаются на эллиптические системы уравнений с переменными тензорными коэффициентами, которые обязательно должны быть симметричными и положительно определенными. В физических терминах это означает исключение из рассмотрения гиротропных сред, например проводников с холловской проводимостью (плазма или полупроводник в магнитном поле). Эти же среды традиционно исключаются и из формулировки принципов термодинамики [3].

Автором предложена симметричная формулировка задач для гиротропных сред, которая позволила установить энергетические принципы для основных и смешанных, двумерных и трехмерных краевых задач [4—7].

В настоящей работе на гиротропные среды распространен также один из вариационных принципов второго типа. Доказательства элементарны, но, к сожалению, ограничиваются двумерной задачей с постоянными коэффициентами. Хотя в традиционной формулировке этот частный случай соответствует уравнению Лапласа, но в интересующей нас смешанной краевой задаче на части границы задается косая производная. Оператор такой краевой задачи несимметричен, поэтому вариационные принципы не формулировались.

Постановка исходной задачи. Пусть проводящее тело занимает область Ω. Плотность электрического тока $\mathbf{j}$ связана по закону Ома с напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ тензором проводимости $\widehat{\sigma}$:

$$\frac{1}{\sigma_0}\mathbf{j} = \frac{1}{\sigma_0}\widehat{\sigma}\mathbf{E} \tag{1}$$

(σ_0 — константа, значением которой распорядимся ниже). Будем пользоваться декартовыми координатами, компоненты матрицы $\widehat{\sigma}$ — заданные функции координат, $\widehat{\sigma}^+$ — транспонированная матрица. Положительность выделения энергии при прохождении электрического тока обеспечивает положительную определенность симметричной части $\widehat{\sigma}$. Не имея в виду рассмотрение идеальных проводников или идеальных изоляторов внутри Ω, предполагаем равномерную в Ω положительную определенность $(\widehat{\sigma} + \widehat{\sigma}^+)/2$ и ограниченность коэффициентов $\widehat{\sigma}$.

Закон сохранения заряда и уравнение Максвелла образуют систему уравнений в области Ω:

$$(1/\sigma_0)\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \ \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \tag{2}$$

Пусть граница Γ области Ω состоит из чередующихся идеальных проводников и изоляторов. В двумерном случае наиболее интересна задача с двумя изоляторами Γ_1, Γ_3 и двумя проводниками Γ_2, Γ_4. Соответствующие граничные условия

$$\frac{1}{\sigma_0} j_n|_{\Gamma_1,\Gamma_3} = 0, \ E_\tau|_{\Gamma_2,\Gamma_4} = 0, \tag{3}$$

где n и τ — нормальная и касательная к границе компоненты векторов. Длины всех четырех участков Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 предполагаем ненулевыми.

Внешнюю электрическую цепь, связывающую проводники Γ_2 и Γ_4, рассмотрим в двух частных случаях. Пусть задано электрическое напряжение между Γ_2 и Γ_4 (вдоль изолятора Γ_1, что существенно, если электрическое поле будет вихревым)

$$-\int_{\Gamma_1} dl E_\tau = U \tag{4}$$

или полный ток через проводник Γ_4

$$-\int_{\Gamma_4} dl j_n/\sigma_0 = I/\sigma_0. \tag{5}$$

Электрическим сопротивлением проводящего тела как целого называется $R = U/I$. Ниже одна из величин U или I считается заданной, а вторая понимается как обозначение для интегралов (4) или (5).

Задача в симметричном виде. Сформулированную выше задачу принято введением электростатического потенциала или функции тока сводить к краевой задаче для одного эллиптического уравнения второго порядка. Несимметрия $\widehat{\sigma}$ делает несимметричным и оператор такой краевой задачи. Отсутствие симметрии оператора не позволяет применять вариационные методы, что затрудняет исследование, а также приближенное и численное решение задач. В [5] для двумерной смешанной краевой задачи предложена симметричная формулировка.

Рассматривается множество, элементами которого являются пары гладких функций Φ, Ψ, удовлетворяющих граничным условиям

$$\Phi|_{\Gamma_2}=0,\ \ \Phi|_{\Gamma_4}=0,\ \ \Psi|_{\Gamma_1}=\Psi_0,\ \ \Psi|_{\Gamma_3}=0 \tag{6}$$

(Ψ_0 — произвольное число).

Вводится энергетическое скалярное произведение элементов

$$[(u,v),(\Phi,\Psi)]=\iint\limits_{\Omega} dx\,dy \begin{pmatrix}\operatorname{grad} u\\ \operatorname{rot} v\end{pmatrix}^{+} \begin{pmatrix} \frac{\widehat{\sigma}}{\sigma_0}\widehat{S}\,\frac{\widehat{\sigma}^{+}}{\sigma_0} & -\frac{\widehat{\sigma}}{\sigma_0}\widehat{S} \\ -\widehat{S}\,\frac{\widehat{\sigma}^{+}}{\sigma_0} & \widehat{S}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\operatorname{grad}\Phi\\ \operatorname{rot}\Psi\end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\widehat{S}$ — произвольная симметричная и равномерно в Ω положительно определенная матрица; $\operatorname{rot}\Psi$ — вектор с компонентами $(\partial\Psi/\partial y,\ -\partial\Psi/\partial x)$.

Билинейная форма (7) является скалярным произведением, так как она симметрична и положительно определена. Последнее несложно доказывается, если заметить, что на гладких функциях, удовлетворяющих условиям (6),

$$\iint\limits_{\Omega} dx\,dy\,(\operatorname{grad}\Phi)^{+}\operatorname{rot}\Psi=0,$$

добавляя этот интеграл в (7), можно изменить стоящие вне главной диагонали блоки матрицы подынтегральной квадратичной формы и тем самым сделать эту матрицу невырожденной, причем равномерно в области Ω. А это значит, что

$$[(\Phi,\Psi),(\Phi,\Psi)]\geqslant \text{const}\iint\limits_{\Omega} dx\,dy\,((\operatorname{grad}\Phi)^2+(\operatorname{rot}\Psi)^2).$$

Поскольку функция Φ равна нулю на участке границы, для нее справедливо неравенство Фридрихса

$$\iint\limits_{\Omega} dx\,dy\,(\operatorname{grad}\Phi)^2\geqslant \text{const}\iint\limits_{\Omega} dx\,dy\,\Phi^2,$$

которое обычно доказывается для функций, равных нулю на всей границе, однако это требование не является необходимым [8, (9.13)].

С учетом того что в двумерном случае $(\operatorname{rot}\Psi)^2=\Psi_x^2+\Psi_y^2=(\operatorname{grad}\Psi)^2$, аналогичное неравенство справедливо для функции Ψ. Получается неравенство, означающее положительную определенность: $[(\Phi,\Psi),(\Phi,\Psi)]\geqslant \text{const}\iint\limits_{\Omega} dx\,dy\,(\Phi^2+\Psi^2)$, где значение const зависит от геометрии $\Gamma_1\div\Gamma_4$ и не зависит от конкретных Φ, Ψ.

Матрица $\widehat{S}$ и константа σ_0 должны выбираться так, чтобы по возможности уменьшить отношение максимального (и максимального по Ω) собственного числа такой преобразованной матрицы к минимальному. В [4] лучшие оценки удалось получить при

$$\widehat{S}=\left(\frac{\widehat{\sigma}+\widehat{\sigma}^{+}}{2\sigma_0}\right)^{-1},\quad \sigma_0=\sqrt{\min_{\Omega}\lambda\,\max_{\Omega}\left(\det(\widehat{\sigma})/\lambda\right)} \tag{8}$$

(λ — меньшее из собственных чисел симметричной матрицы $(\widehat{\sigma}+\widehat{\sigma}^{+})/2$).

Отличие от нуля и бесконечности фигурирующих здесь min и max и есть конкретный вид условий на матрицу $\widehat{\sigma}$, тогда как при традиционном подходе дополнительно требуется гладкость коэффициентов $\widehat{\sigma}$.

Рассматривается именуемый энергетическим функционал

$$W(\Phi,\Psi)=[(\Phi,\Psi),(\Phi,\Psi)]-2U\Psi_0. \tag{9}$$

Поскольку его квадратичная часть положительно определена, а линейная ограничена, значения $W(\Phi,\Psi)$ ограничены снизу и существует минимизирующая последовательность, которая сходится в себе в энергетической норме.

В случае гладкости функций Ф, Ψ, доставляющих функционалу энергии минимальное значение, условия минимальности $W(\Phi, \Psi)$ совпадают с исходной задачей (2)—(4), если обозначить

$$\mathbf{j}/\sigma_0 = -\frac{\widehat{\sigma}}{\sigma_0}\widehat{S}\frac{\widehat{\sigma}^+}{\sigma_0}\operatorname{grad}\Phi + \frac{\widehat{\sigma}}{\sigma_0}\widehat{S}\operatorname{rot}\Psi,$$

$$\mathbf{E} = -\widehat{S}\frac{\widehat{\sigma}^+}{\sigma_0}\operatorname{grad}\Phi + \widehat{S}\operatorname{rot}\Psi,$$

а закон Ома (1) удовлетворен автоматически.

В общем случае получаем обобщенное решение задачи в смысле справедливости тождества

$$\iint_\Omega dx\,dy\,(-(\operatorname{grad}u)^+\mathbf{j}/\sigma_0 + (\operatorname{rot}v)^+\,\mathbf{E}) - Uv_0 = 0$$

для произвольных гладких функций u, v, удовлетворяющих условиям (6) (произвольное число v_0 — граничное значение функции v на Γ_3). Обобщенное решение существует, единственно и обладает конечной энергией.

Энергия может быть записана в терминах исходной задачи

$$[(\Phi, \Psi), (\Phi, \Psi)] = \frac{1}{\sigma_0}\iint_\Omega dx\,dy\,\mathbf{j}^+\cdot\mathbf{E},$$

если матрица $\widehat{S}$ выбрана в соответствии с (8). Этот интеграл есть полная джоулева диссипация. Если выбрать $\widehat{S} = T\left(\frac{\widehat{\sigma}+\widehat{\sigma}^+}{2\sigma_0}\right)^{-1}$, где функция T — абсолютная температура среды, то энергией станет производство энтропии в рассматриваемой области

$$[(\Phi, \Psi), (\Phi,\Psi)] = \frac{1}{\sigma_0}\iint_\Omega dx\,dy\,\frac{1}{T}\,\mathbf{j}^+\cdot\mathbf{E}.$$

В качестве величины, обратной к температуре, можно выбрать и произвольный симметричный тензор $\widehat{\Theta}$ ($\widehat{S} = ((\widehat{\Theta}\widehat{\sigma} + \widehat{\sigma}^+\widehat{\Theta})/(2\sigma_0))^{-1}$) при условии, что $\widehat{S}$ будет равномерно в Ω положительно определена. Тогда

$$[(\Phi, \Psi), (\Phi, \Psi)] = \frac{1}{\sigma_0}\iint_\Omega dx\,dy\,\mathbf{E}^+\widehat{\Theta}\mathbf{j}.$$

Таким образом, построенное обобщенное решение имеет смысл и с точки зрения термодинамики. Множественность формулировок, связанная с произволом выбора $\widehat{S}$, отвечает различным распределениям температуры в среде.

В случае заданного тока I во внешней цепи (5) вместо напряжения U (4) меняются граничные условия, выделяющие множество функций (Ф, Ψ), на которых должен минимизироваться функционал энергии

$$\Phi|_{\Gamma_2} = 0,\quad \Phi|_{\Gamma_4} = \Phi_0,\quad \Psi|_{\Gamma_1} = 0,\quad \Psi|_{\Gamma_3} = 0 \tag{10}$$

(Φ_0 — произвольное число), и в самом функционале энергии изменяется линейный член $W(\Phi, \Psi) = [(\Phi, \Psi), (\Phi, \Psi)] - 2I\Phi_0$.

Оценка сопротивления проводящего тела. Чтобы получить оценки, преобразуем функционал энергии. Всякую пару функций (Ф′, Ψ′) из множества (6) можно представить в виде $(\Phi', \Psi') = \Psi_0(\Phi, \Psi)$, где (Ф, Ψ) удовлетворяют уже фиксированным условиям

$$\Phi|_{\Gamma_2} = 0,\quad \Phi|_{\Gamma_4} = 0,\quad \Psi|_{\Gamma_1} = 1,\quad \Psi|_{\Gamma_3} = 0. \tag{11}$$

Ниже используются только такие нормированные функции. Функционал энергии (9) приобретает вид $W(\Phi, \Psi) = \Psi_0^2[(\Phi, \Psi), (\Phi, \Psi)] - 2\Psi_0 U$.

Его несложно минимизировать по Ψ_0 для каждой конкретной пары функций (Φ, Ψ):

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \Psi_0} = 2\Psi_0 [(\Phi, \Psi), (\Phi, \Psi)] - 2U,$$

т. е.

(12) $$\Psi_0 = U/[(\Phi, \Psi), (\Phi, \Psi)],\ W = -U^2/[(\Phi, \Psi), (\Phi, \Psi)].$$

Поскольку U — заданное число, минимальность W соответствует минимальности энергии (Φ, Ψ).

В силу закона сохранения энергии полная диссипация в проводящем теле равна притоку энергии из внешней цепи, т. е. для точного решения $\Psi_0^2 [(\Phi, \Psi), (\Phi, \Psi)] = \frac{1}{\sigma_0} UI$.

Вместе с (12) это дает выражение точного значения Ψ_0 через ток I, заранее неизвестный: $\Psi_0 = I/\sigma_0$. Теперь сопротивление можно выразить только через минимальную энергию (Φ, Ψ):

(13) $$R = \frac{U}{I} = \min \frac{1}{\sigma_0} [(\Phi, \Psi), (\Phi, \Psi)].$$

Поскольку здесь фигурируют функции, доставляющие энергии минимальное значение, энергия любых других (Φ, Ψ), удовлетворяющих (11), дает оценку R сверху. Аналогично оценку R снизу дает энергия любых функций, удовлетворяющих упрощенным ($\Phi_0 = 1$) условиям (10).

Для сопротивлений трехмерных тел тоже справедливы выражения вида (13) и соответствующие оценки. Однако конкретный вид энергии существенно усложняется: функция $\boldsymbol{\Psi}$ становится векторной соответственно векторности уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$(2); в энергию добавляется квадрат дивергенции $\boldsymbol{\Psi}$, что в конечном счете связано с переопределенностью исходной трехмерной системы уравнений (1), (2). Задание граничных условий для векторной функции $\boldsymbol{\Psi}$ даже требует предварительного построения гармонической функции на участке границы, отвечающем изолятору (эта функция определяется геометрией границы и задает способ усреднения электрического поля на изоляторе при вычислении напряжения между проводниками, что в двумерном случае делалось тривиально). Подробно задача рассмотрена в [7], а трехмерные задачи с однородной границей (вся граница — изолятор или сверхпроводник)— в [6].

Сопротивление двумерных однородных проводников. Для изотропных сред со скалярной проводимостью $\sigma_\parallel$, помещенных в магнитное поле, перпендикулярное плоскости x, y, характерен следующий вид тензора проводимости:

$$\widehat{\sigma} = \frac{\sigma_\parallel}{1+\beta^2} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

(β — параметр Холла, пропорциональный напряженности магнитного поля). Ниже рассматриваем именно такие $\widehat{\sigma}$, поскольку при постоянных коэффициентах задача приводится к этому виду просто поворотами и растяжением системы координат.

Для однородных сред, когда $\sigma_\parallel$ и β постоянны, сопротивление проводника как целого выражается проще:

(14) $$R = \min \iint_\Omega dx\,dy \{\sqrt{1+\beta^2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Psi_x^2 + \Psi_y^2) - \\ - 2\beta(\Phi_x\Psi_x + \Phi_y\Psi_y)\} \sqrt{1+\beta^2}/\sigma_\parallel.$$

При этом, согласно (8), были фиксированы

$$\sigma_0 = \sigma_\parallel / \sqrt{1+\beta^2}, \quad \widehat{S} = \sqrt{1+\beta^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сразу опущен член $(\Phi_x\Psi_y - \Phi_y\Psi_x)$, так как его интеграл равен нулю в силу граничных условий (11). Минимизация энергии (14) на функциях, удовлетворяющих граничным условиям (11), в данном случае эквивалентна решению краевой задачи

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\Psi = 0, \quad \Phi|_{\Gamma_2,\Gamma_4} = 0, \quad \Psi|_{\Gamma_1} = 1, \quad \Psi|_{\Gamma_3} = 0, \tag{15}$$

$$-\sqrt{1+\beta^2}\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \beta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1,\Gamma_3} = 0; \quad \beta\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \sqrt{1+\beta^2}\frac{\partial\Psi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2,\Gamma_4} = 0.$$

Конформное отображение на прямоугольник. При $\beta = 0$ функционал и краевая задача (15) для Φ и Ψ расщепляются. Получается $\Phi = 0$ и $\Delta\Psi = 0$, $\Psi|_{\Gamma_1} = 1$, $\Psi|_{\Gamma_3} = 0$, $\partial\Psi/\partial n|_{\Gamma_2,\Gamma_4} = 0$.

Энергия превращается в конформную емкость

$$C = \min \int\int dx\, dy\, (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) \tag{16}$$

и

$$R = C/\sigma_{\parallel}. \tag{17}$$

В приведенном ниже доказательстве используется существование взаимно однозначного конформного отображения рассматриваемого криволинейного четырехугольника на прямоугольник с соответствием четырех углов. Отображение с соответствием трех углов существует, как и для всякой односвязной однолистной области с кусочно-гладкой жордановой границей [9]. Поскольку емкость (16) является инвариантом конформных преобразований, а емкость прямоугольника есть x_0/y_0, возьмем

$$x_0 = 1, \; y_0 = 1/C. \tag{18}$$

Тогда несложно доказывается, что и четвертый угол переходит в угол прямоугольника.

Теперь расширим область Ω таким образом, что новый участок границы Γ_1^* лежит вне Ω. Функцию Ψ, полученную при минимизации энергии (13) в Ω, доопределим $\Psi = 1$ в добавленной части области. Энергия при этом не изменится. При минимизации в новой области Ω^* энергия не возрастет, а значит, $C^* \leqslant C$. Если теперь отображать Ω^* на прямоугольник, как это описано выше, получим из (18) $y_0^* \geqslant y_0$.

О сопротивлении однородных гиротропных прямоугольников. Для однородных прямоугольников задача (15) приобретает еще более конкретный вид

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\Psi = 0, \quad \Phi|_{x=0,1} = 0, \quad \Psi|_{y=0} = 1, \quad \Psi|_{y=y_0} = 0,$$

$$-\sqrt{1+\beta^2}\,\Phi_y + \beta\Psi_y|_{y=0,y_0} = 0, \quad \beta\Phi_x - \sqrt{1+\beta^2}\,\Psi_x|_{x=0,1} = 0.$$

Если вычесть из Ψ число 1/2, получим задачу, антисимметричную относительно прямой $y = y_0/2$. Соответственно антисимметрично и ее решение, значит,

$$\Phi|_{y=y_0/2} = 0, \quad \Psi|_{y=y_0/2} = 1/2. \tag{19}$$

Чтобы проанализировать изменение сопротивления при расширении прямоугольника от y_0 до $y_0^* > y_0$, разделим исходный прямоугольник пополам прямой $y = y_0/2$ и вставим в разрез полоску шириной $y_0^* - y_0$, доопределив в ней $\Phi = 0$, $\Psi = 1/2$. В силу (19) функции Φ, Ψ во всей новой области останутся непрерывными, значение энергии не изменится. При минимизации энергия не увеличится. Поэтому сопротивление R, пропорциональное минимальной энергии (14), при расширении прямоугольника не увеличивается.

Формулировка вариационного принципа. Объединим три утверждения: расширению криволинейного четырехугольника отвечает расширение прямоугольника, на который он конформно с соответствием четырех углов отображается; энергия и тем самым сопротивление (14) при конформных отображениях не меняются — непосредственно проверяются; сопротивление прямоугольника при расширении не убывает. Получаем вариационный принцип: *при расширении проводника его сопротивление не возрастает*.

Как отмечалось выше, оценки сопротивления сверху находятся при минимизации энергии функций, удовлетворяющих противоположным ((10) вместо (6)) граничным условиям. Увеличение области за проводники Γ_2 или Γ_4 удобно рассмотреть в этой формулировке. В двумерном случае такая задача лишь обозначениями отличается от приведенной, поэтому справедлива и вторая часть принципа: *при удлинении проводника его сопротивление не убывает*. Положение углов в обоих случаях не изменялось.

Заключение. Наряду с принципиальным методологическим значением полученный принцип имеет и практическое приложение, так как позволяет при оценке сопротивления холловских проводников заменять область более простой. В частности, проводить триангуляцию при вариационно-разностной реализации оценки сверху необходимо так, чтобы ломаные, аппроксимирующие границы с изолятором, проходили внутри области, а аппроксимирующие границы с идеальным проводником,— вне области. В этом и только в этом случае полученное численно значение оценит истинное сверху. При оценке снизу ломаные необходимо строить противоположным способом. Эффективность предложенной симметризации при численном решении задач продемонстрирована в [10, 11].

Ограниченность доказательств не позволяет утверждать справедливость сформулированного принципа при переменных коэффициентах, однако в двумерном случае не видно оснований и для сомнений.

Отметим, что доказательство энергетических принципов в [4—7] проведено для достаточно широкого круга задач. От тензора проводимости $\hat{\sigma}$ требовались кусочная непрерывность, равномерная ограниченность и равномерная положительная определенность его симметричной части.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.
2. **Лаврентьев М. А.** Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.
3. **Дьярмати.** Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы.— М.: Мир, 1974.
4. **Денисенко В. В.** Симметричная форма эллиптических уравнений, описывающих процессы переноса в гиротропных средах.— Красноярск, 1980.— Деп. в ВИНИТИ 05.11.80, № 4696—80.
5. **Денисенко В. В.** Краевая задача для симметричной сильно эллиптической системы при меняющемся типе граничного условия.— Красноярск, 1981.— Деп. в ВИНИТИ 4.03.81, № 1008—81.
6. **Денисенко В. В.** Симметричная форма трехмерных эллиптических уравнений, описывающих процессы переноса в гиротропных средах.— Красноярск, 1981.— Деп. в ВИНИТИ 28.01.81, № 344—81.
7. **Денисенко В. В.** Энергетический метод решения трехмерной смешанной краевой задачи для эллиптического уравнения с несимметричной матрицей коэффициентов.— Красноярск, 1981.— Деп. в ВИНИТИ 14.12.81, № 5647—81.
8. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
9. **Бицадзе А. В.** Основы теории аналитических функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1972.
10. **Денисенко В. В., Замай С. С.** Симметризация и численное решение эллиптических краевых задач с несамосопряженными операторами // Моделирование процессов гидрогазодинамики и энергетики.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1984.
11. **Денисенко В. В., Замай С. С.** Численное моделирование электрических полей и токов в низкоширотной ионосфере // Математические модели и методы решения задач механики сплошной среды.— Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1986.

Поступила 29/X 1987 г.