

РАЗВИТИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО  
СЛОЯ ПРИ ВНЕЗАПНОМ ВОЗНИКНОВЕНИИ ДВИЖЕНИЯ  
ИЛИ ВНЕЗАПНОМ ТОРМОЖЕНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА  
НА ГРАНИЦЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

А. Б. Ватажин

(Москва)

Задача о нестационарном магнитогиродинамическом течении вязкой жидкости в полупространстве, возникающем в результате движения неограниченной пластины, изучалась многими авторами. Укажем, например, на работу [1], в которой построены решения в случае изотропной проводимости, и работу [2], в которой приведено решение задачи Рэлея в случае анизотропной проводимости. В указанных работах жидкость предполагалась несжимаемой и однородной, и система уравнений оказывалась линейной. В тех случаях, когда изучается нестационарное течение газа в поперечном магнитном поле, возникающее в результате торможения высокоскоростного потока газа на границе полупространства или движения безграничной пластины со сверхзвуковой по отношению к покоящемуся газу скоростью, оказывается необходимым учитывать сжимаемость газа и зависимость электропроводности от температуры. При этом возможны течения, когда газ становится электропроводным и начинает взаимодействовать с магнитным полем только в результате увеличения его температуры из-за вязкой диссипации энергии. Магнитное поле, взаимодействуя с проводящим газом, оказывает влияние на трение и теплопередачу к поверхности пластины. При достаточном малых давлениях газа и сильных магнитных полях может проявляться эффект Холла. Система уравнений, описывающая движения сжимаемого газа с переменной электропроводностью, существенно нелинейна. Изучению таких движений и посвящена настоящая работа.

§ 1. Рассмотрим нестационарное магнитогиродинамическое течение, в котором все величины зависят от одной переменной  $y$ . Из уравнений электродинамики

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -c^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi c^{-1} \mathbf{j}$$

и закона Ома, записанного в виде

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) - \alpha \mathbf{j} \times \mathbf{H} \quad \left( \alpha = \frac{e\tau}{mc} \right)$$

найдем, что

$$H_y = H^* = \text{const} \quad (1.1)$$

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} \left[ E_x + \frac{1}{c} (vH_z - wH^*) + \beta E_z + \frac{\beta}{c} (uH^* - vH_x) \right] \quad (1.2)$$

$$j_z = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} \left[ E_z + \frac{1}{c} (uH^* - vH_x) - \beta E_x - \frac{\beta}{c} (vH_z - wH^*) \right] \quad (1.3)$$

$$j_y = j_y(t) = \sigma \left[ E_y + \frac{1}{c} (wH_x - uH_z) \right] - \alpha (j_z H_x - j_x H_z) \quad (\beta = \alpha H^*) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} j_x, \quad -\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} j_z \quad (1.5)$$

Здесь  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ ,  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ ,  $\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$ ,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  суть вектора магнитного и электрического поля, плотности электрического тока и скорости среды,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $\tau$  — среднее

время между столкновениями электрона с другими частицами,  $c$  — скорость света в пустоте.

Уравнения неразрывности, движения и энергии имеют вид <sup>1</sup>

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p v}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} + X, \quad X = \frac{j_y H_z - j_z H^*}{c} = \frac{1}{4\pi} H^* \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (1.7)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + Y \quad (1.8)$$

$$Y = \frac{j_z H_x - j_x H_z}{c} = - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial y} (H_x^2 - H_z^2)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial w}{\partial y} + Z, \quad Z = \frac{j_x H^* - j_y H_x}{c} = \frac{1}{4\pi} H^* \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (1.9)$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} (j_x^2 + j_y^2 + j_z^2) \quad (1.10)$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды,  $p$  — давление,  $T$  — температура,  $h$  — энтальпия,  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $k$  и  $\mu$  — коэффициенты теплопроводности и динамической вязкости,  $\lambda$  — второй коэффициент вязкости.

§ 2. Пусть скорость газа в полупространстве  $y > 0$  над поверхностью пластины  $y = 0$  удовлетворяет начальным и граничным условиям:

$$\begin{aligned} u &= u_\infty = \text{const} \quad \text{при } 0 < y < \infty, t = 0; y = \infty, t \geq 0 \\ \mathbf{v} &= 0 \quad \text{при } y = 0, t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Условия (2.1) реализуются при движениях вязкого газа в следующих случаях: пластина, движущаяся при  $t < 0$  со скоростью граничащего с ней однородного потока газа, в момент  $t = 0$  мгновенно останавливается; однородный поток газа в полупространстве  $y > 0$  в момент  $t = 0$  мгновенно начинает тормозиться на границе  $y = 0$ ; в момент  $t = 0$  пластина мгновенно приобретает скорость  $u_\infty$  относительно покоящегося газа. Система координат фиксирована относительно пластины. Скорость  $u_\infty$  предполагается намного большей скорости звука газа на бесконечности.

Пусть в направлении оси  $y$  приложено однородное внешнее магнитное поле  $H^*$ . Взаимодействие газа с полем будет различным в зависимости от того, связано ли магнитное поле с пластиной (пластина «несет» с собой магнитное поле) или с потоком газа на бесконечности. Если проводить аналогию с обтеканием тел, то первому случаю соответствует движение аппарата, несущего на борту магнитную систему, а второму — движение тела во внешнем магнитном поле (например, магнитном поле Земли).

Температура газа при  $t = 0$  предполагается не столь высокой, чтобы газ был заметно электропроводным и взаимодействовал с магнитным полем. При  $t > 0$  вследствие торможения газа его кинетическая энергия переходит в тепловую, и газ нагревается. Толщина слоя эффективно

<sup>1</sup> Так как не учитывается скольжение ионов, тензор вязких напряжений не зависит от магнитного поля. Степень ионизации предполагается малой; поэтому дополнительными, обусловленными анизотропией, членами в векторе потока тепла можно пренебречь [3].

заторможенного газа с течением времени возрастает (вдоль оси  $y$  движется «вязкая» волна). При достаточно большой скорости набегающего потока температура в слое заторможенного газа возрастает настолько, что газ делается электропроводным и взаимодействует с магнитным полем. В результате профили скорости и температуры изменяются по сравнению с обычными гидродинамическими. При наличии анизотропии проводимости поле приводит к появлению скорости  $w$ .

Ниже будут рассмотрены случаи, когда энтальпия газа удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям:

$$\begin{aligned} h &= h_\infty && \text{при } 0 < y < \infty, t = 0; y = \infty, t \geq 0 \\ h &= h_w && \text{или } (\partial h / \partial y) = 0 \quad \text{при } y = 0, t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

В (2.2) и далее в статье нижний индекс  $w$  относится к параметрам газа на поверхности пластины. Первое из условий на стенке соответствует случаю тепловода с поверхности, второе — случаю теплоизолированной поверхности. Так как  $j_y(\infty, t) = 0$ , то, согласно (1.4),  $j_y \equiv 0$ .

Для того чтобы оценить по порядку величины толщину слоя заторможенного газа  $\delta(t)$ , рассмотрим случай  $\mathbf{H} = 0$ ,  $\rho = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ . Из (1.6) — (1.10) следует, что  $v = w = 0$ , а скорость  $u$  удовлетворяет известному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \left( \nu = \frac{\mu}{\rho} \right) \quad (2.3)$$

решение которого при граничных условиях (2.1) есть

$$u = u_\infty \operatorname{erf} \eta \quad \left( \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}, \operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \right) \quad (2.4)$$

Формулы (2.4) показывают, что  $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ . Когда газ сжимаемый, но электромагнитная сила по порядку величины меньше или равна вязкой силе, то

$$\delta \sim \sqrt{\nu^* t} \quad (\nu^* = \mu^*/\rho^*) \quad (2.5)$$

В (2.5) и далее в статье посредством верхнего индекса  $*$  обозначаются характерные размерные величины.

Оценим порядок величины различных членов в системе (1.1) — (1.10), считая, что характерное время и характерный размер связаны соотношением (2.5).

Прежде всего из уравнения неразрывности (1.6) находим, что в случае сжимаемого газа  $v \sim \nu^*/\delta$ .

Если не приложены очень сильные внешние электрические поля и  $\beta \leq 1$ , то порядки величин выражений в квадратных скобках (1.2) и (1.3) соответственно определяются порядками величин членов  $c^{-1}\beta u H^*$  и  $c^{-1} u H^*$ . Из (1.5) найдем

$$|H_x| \sim \frac{H^* R_m}{1 + \beta^2}, \quad |H_z| \sim \frac{H^* R_m}{1 + \beta^2} \beta^* \quad \left( R_m = \frac{u_\infty \delta}{\nu_m^*}, \nu_m^* = \frac{c^2}{4\pi\sigma^*} \right) \quad (2.6)$$

Компоненты вектора электрического поля  $E_z$  и  $E_x$  можно записать в виде  $E_i = E_i'(t) + E_i''(y, t)$  ( $i = z, x$ ). Составляющая  $E_i'$  определяется условиями протекания тока по внешней цепи (если считать, что имеются токоснимающие электроды, соединенные через внешнюю нагрузку), а также индуцируется в результате движения пластины относительно внешнего магнитного поля, вихревая составляющая  $E_i''$  возникает вследствие зависимости от времени индуцированных компонент магнитного поля  $H_x$  и  $H_z$ . Учитывая (2.5), (2.6) и оценку для  $v$ , из (1.5) получаем

$$|E_z''| \sim \frac{\chi u_\infty}{c} H^*, \quad |E_x''| \sim \frac{\chi \beta^* u_\infty}{c} H^* \quad \left( \chi = \frac{\nu^*}{\nu_m^* (1 + \beta^2)} \right) \quad (2.7)$$

На основании тех же оценок имеем

$$\left| \frac{v H_x}{u H^*} \right| \sim \chi, \quad \left| \frac{v H_z}{\beta u H^*} \right| \sim \chi, \quad \left| \frac{\beta v H_z}{u H^*} \right| \sim \chi \beta^2 \quad (2.8)$$

Скорость  $w$  возникает вследствие действия силы  $c^{-1}j_x H^*$ , направленной по оси  $z$ . Из уравнения (1.9) следует, что

$$\frac{w}{u_\infty} \sim \frac{\beta^* \kappa^2}{1 + \beta^{*2}} \quad \left( \kappa^2 = \frac{\sigma^* H^{*2} \delta^2}{c^2 \mu^*} \right) \quad (2.9)$$

Если выполняется неравенство

$$\Pi_1 = (\nu^*/\nu_m^*) \ll 1 \quad (2.10)$$

то на основании приведенных оценок выражения (1.2) и (1.3) записываются в виде

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{\sigma}{1 + \beta^2} \left( E_x' - \frac{w}{c} H^* + \beta E_z' + \frac{\beta u}{c} H^* \right) \\ j_z &= \frac{\sigma}{1 + \beta^2} \left( E_z' + \frac{u}{c} H^* - \beta E_x' + \frac{\beta w}{c} H^* \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Рассмотрим уравнения движения. Из (1.8) и оценки для  $v$  следует, что

$$\left| \frac{\Delta T}{P_\infty} \right| \sim \frac{\rho^* u_\infty^2}{P_\infty} R^{-2} \quad \left( T = p + \frac{1}{8\pi} (H_x^2 + H_z^2), R = \frac{u_\infty \delta}{\nu^*} \right)$$

Здесь и далее  $\Delta \Phi$  обозначает изменение величины  $\Phi$  поперек слоя  $\delta(t)$ . Если

$$\Pi_2 = (\rho^* u_\infty^2 / p_\infty) R^{-2} \ll 1 \quad (2.12)$$

то изменение  $T$  по координате  $y$  намного меньше соответствующего изменения скорости ( $|\Delta u/u| \sim 1$ ) и энтальпии ( $|\Delta h/h| \sim u_\infty^2 / 2h_\infty \gg 1$ ) и с указанной точностью  $T = \text{const}$  всюду в потоке (постоянная определяется из условий в однородном стационарном потоке при  $y = \infty$ ). Используя оценки (2.6), найдем

$$\left| \frac{\Delta p}{P_\infty} \right| \ll \frac{1}{8\pi p_\infty} (|\Delta H_x^2| + |\Delta H_z^2|) \sim \frac{m R_m^2 H^{*2}}{8\pi p_\infty (1 + \beta^{*2})^2} \quad (m = \max(\beta^{*2}, 1))$$

Если

$$\Pi_3 = (R_m^2 H^{*2} / 8\pi p_\infty) \ll 1 \quad (2.13)$$

то изменением давления вдоль  $y$  можно пренебречь и  $p = p_\infty$  всюду в потоке.

Выполнение неравенства (2.12) с необходимостью требует, чтобы  $\bar{R} \gg 1$ , а для выполнения неравенства (2.13) при  $(H^{*2} / 8\pi p_\infty) \gg 1$  необходимо, чтобы  $R_m \ll 1$ . Из условия  $\bar{R} \gg 1$  и оценки для скорости  $v$  следует, что в уравнении (1.10)

$$(\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \ll \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.14)$$

Определим, в какой мере неравенства (2.10), (2.12), (2.13) выполняются в практических приложениях. Пусть в начальный момент пластина обтекается высокоскоростным холодным потоком воздуха. Для оценки максимальной температуры в слое  $\delta(t)$  примем, что профиль энтальпии торможения подобен профилю скорости, а температура пластины мало отличается от температуры  $T_\infty$  потока на бесконечности. Тогда максимальная величина энтальпии в слое  $\delta(t)$  приближенно равна  $h_\infty (1 + 0.125 (\gamma - 1) M^2)$ , где  $M$  — число Маха набегающего потока. За характерную температуру  $T^*$  примем температуру, соответствующую этой энтальпии и  $p = p_\infty$ , а за характерные гидродинамические параметры воздуха, входящие в оценки (2.10), (2.12), (2.13), примем параметры при  $p = p_\infty$  и  $T = T^*$ . Пусть  $^1 T_\infty = 220^\circ \text{K}$ ,  $H^* = 5000 \text{ гс}$ . Рассмотрим случаи  $p_\infty = 1 \text{ атм}$ ,  $M = 18.5$ ;  $p_\infty = 1 \text{ атм}$ ,  $M = 30$ ;  $p_\infty = 0.001 \text{ атм}$ ,  $M = 24.7$ . Параметр  $\Pi_1$  соответственно равен  $2.9 \cdot 10^{-11}$ ,  $6.7 \cdot 10^{-8}$ ,  $3.2 \cdot 10^{-7}$ ; параметр  $R = 2 \cdot 10^5 \sqrt{t}$ ,  $2 \cdot 10^5 \sqrt{t}$ ,  $7.9 \cdot 10^3 \sqrt{t}$ ; параметр  $\Pi_2 = 8.4 \cdot 10^{-10} t^{-1}$ ,  $1.2 \cdot 10^{-9} t^{-1}$ ,  $8.4 \cdot 10^{-7} t^{-1}$ ; параметр  $R_m = 5.9 \cdot 10^{-6} \sqrt{t}$ ,  $1.3 \cdot 10^{-2} \sqrt{t}$ ,  $2.5 \cdot 10^{-3} \sqrt{t}$ ; параметр  $\Pi_3 R_m^{-1} = 5.8 \cdot 10^{-6} \sqrt{t}$ ,  $1.3 \cdot 10^{-2} \sqrt{t}$ ,  $2.5 \sqrt{t}$ . При проведении оценок было положено  $\delta = \sqrt{\nu^* t}$ . Входящее в оценки время  $t$  измеряется в секундах. Как видно, неравенство

<sup>1</sup> При определении газодинамических параметров использовались таблицы [4] и таблицы, помещенные в работе [5].

(2.10) оказывается всегда выполненным. Неравенство (2.12) выполняется, исключая очень малые значения  $t$  (при  $t = 0$  основные уравнения имеют особенность аналогично тому, как уравнения двумерного стационарного пограничного слоя имеют особенность на передней кромке пластины). Неравенство (2.13) при не очень малых давлениях справедливо в большом диапазоне изменения  $t$ . При уменьшении давления диапазон изменения  $t$ , для которого выполняется неравенство (2.13), значительно сужается.

В дальнейшем будем предполагать выполненными неравенства (2.10), (2.12), (2.13). Упрощенная система уравнений (справедливы соотношения (2.11), (2.14),  $p = p_\infty$  всюду в потоке) в безразмерных переменных

$$u = u_\infty u^\circ, w = u_\infty w^\circ, h = h_\infty h^\circ, \theta = \alpha^{-1} (h^\circ - 1) + u^{\circ 2} + w^{\circ 2} \quad (2.14)$$

$$\mu = \mu_\infty \mu^\circ, \quad \rho = \rho_\infty \rho^\circ, \quad \sigma = \sigma^* \sigma^\circ, \quad E_x' = \frac{u_\infty e_x}{c} H^*, \quad E_z' = \frac{u_\infty e_z}{c} H^*$$

имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \rho^\circ v}{\partial y} = 0, \quad \rho^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial t} + \rho^\circ v \frac{\partial u^\circ}{\partial y} = v_\infty \frac{\partial}{\partial y} \mu^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial y} - \varepsilon s (e_z - \beta e_x + u^\circ + \beta w^\circ)$$

$$\rho^\circ \frac{\partial w^\circ}{\partial t} + \rho^\circ v \frac{\partial w^\circ}{\partial y} = v_\infty \frac{\partial}{\partial y} \mu^\circ \frac{\partial w^\circ}{\partial y} + \varepsilon s (e_x - w^\circ + \beta e_z + \beta u^\circ) \quad (2.15)$$

$$\rho^\circ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho^\circ v \frac{\partial \theta}{\partial y} = v_\infty \frac{\partial}{\partial y} \mu^\circ P^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial y} - v_\infty \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu^\circ P^{-1} (1 - P) \frac{\partial}{\partial y} (u^{\circ 2} + w^{\circ 2}) \right] +$$

$$+ 2\varepsilon s (e_x^2 + e_z^2 - e_x w + e_z u + \beta e_x u + \beta e_z w)$$

$$\alpha = \frac{u_\infty^2}{2h_\infty}, \quad P = \frac{c_p \mu}{k}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma^* H^{*2}}{c^2 \rho_\infty}, \quad s = \frac{\sigma^\circ}{1 + \beta^2} \quad (2.16)$$

В (2.14) — (2.16) величины с градусом в верхнем индексе, а также  $\theta$ ,  $e_x$ ,  $e_z$  — безразмерные. В (2.16) величина  $\alpha$  — параметр сжимаемости (в случае совершенного газа с постоянными теплоемкостями  $\alpha = 0.5 (\gamma - 1) M^2$ ),  $P$  — число Прандтля,  $\varepsilon$  — постоянная с размерностью  $сек^{-1}$ ,  $s$  — безразмерная «эффeктивная» проводимость. Величины  $\rho^\circ$ ,  $\mu^\circ$ ,  $P$ ,  $s$ ,  $\beta$  зависят только от энтальпии  $h$ .

Граничные условия для величин  $u^\circ$ ,  $v$ ,  $w^\circ$ ,  $\theta$  следуют из (2.1) — (2.2)

$$u^\circ = 1, \quad w^\circ = 0, \quad \theta = 1 \quad \text{при } 0 < y < \infty, \quad t = 0; \quad y = \infty, \quad t \geq 0$$

$$u^\circ = 0, \quad w^\circ = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.17)$$

$$\theta = \theta_w = \alpha^{-1} (h_w^\circ - 1) \quad \text{или} \quad (\partial \theta / \partial y) = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad t \geq 0$$

Если величины  $e_x$  и  $e_z$  известны, то система (2.15) с граничными условиями (2.17) является замкнутой. Пусть магнитное поле фиксировано относительно пластины. Выразим  $e_x$  и  $e_z$  через параметры двух электрических цепей, соответственно соединяющих контактирующие с газом электроды, лежащие в плоскостях  $z = \pm 0.5a_z$  и плоскостях  $x = \pm 0.5a_x$ . Из уравнений Кирхгофа для этих цепей, в предположении, что их электродвижущими силами самоиндукции можно пренебречь, при помощи (2.11) получаем

$$\Lambda_z = e_z \left( 1 + q_z \int_0^\infty s dy \right) + q_z \int_0^\infty s (u^\circ + \beta w^\circ) dy - q_z e_x \int_0^\infty s \beta dy$$

$$\Lambda_x = e_x \left( 1 + q_x \int_0^\infty s dy \right) + q_x \int_0^\infty s (\beta u^\circ - w^\circ) dy + q_x e_z \int_0^\infty s \beta dy \quad (2.18)$$

$$\Lambda_i = \frac{c E_i^\circ}{u_\infty a_i H^*}, \quad q_i = \frac{\sigma^* R_i}{a_i} \quad (i = z, x)$$



Здесь  $E_i^0$  — внешняя электродвижущая сила, действующая в направлении  $i$ ,  $R_i$  — внешнее сопротивление.

Если  $E_i^0 = 0$ ,  $q_i = 0$  ( $i = z, x$ ), то из (2.18) следует, что  $e_i = 0$ . Такой режим (режим короткого замыкания) в случае изотропной проводимости допускает наглядную интерпретацию, если пластину считать поверхностью цилиндра бесконечно большого радиуса; линии тока будут концентрическими окружностями, и электрическое поле равно нулю.

Если  $E_i^0 = 0$ , то реализуется режим генератора. Если  $E_i^0 \neq 0$ , то в зависимости от знака и величины  $E_i^0$ , а также времени  $t$  реализуются случаи как генератора, так и ускорителя. Наконец, меняя соответствующим образом параметры внешних цепей во времени, можно добиться, чтобы в течение всего процесса величины  $e_z$  и  $e_x$  были постоянными.

После решения системы (2.15) при помощи (1.5) и (2.11) определяется индуцированное магнитное поле. В переменных Дородницына

$$\zeta = \int_0^y \rho^\circ dy, \quad \tau = t$$

система (2.15) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\circ}{\partial \tau} &= v_\infty \frac{\partial}{\partial \zeta} \psi \frac{\partial u^\circ}{\partial \zeta} - \varepsilon \varphi (e_z - \beta e_x + u^\circ + \beta w^\circ) & (\psi = \rho^\circ \mu^\circ) \\ \frac{\partial w^\circ}{\partial \tau} &= v_\infty \frac{\partial}{\partial \zeta} \psi \frac{\partial w^\circ}{\partial \zeta} + \varepsilon \varphi (e_x + \beta e_z + u^\circ \beta - w^\circ) & \left( \varphi = \frac{\sigma^\circ}{(1 + \beta^2) \rho^\circ} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= v_\infty \frac{\partial}{\partial \zeta} P^{-1} \psi \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - v_\infty \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ P^{-1} (1 - P) \psi \frac{\partial}{\partial \zeta} (u^{\circ 2} + w^{\circ 2}) \right] + \\ &+ 2\varepsilon \varphi (e_x^2 + e_z^2 - e_x w^\circ + e_z u^\circ + \beta e_x u^\circ + \beta e_z w^\circ) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} u^\circ = 1, \quad w^\circ = 0, \quad \theta = 1 & \text{ при } 0 < \zeta < \infty, \quad \tau = 0; \quad \zeta = \infty, \tau \geq 0 \\ u^\circ = 0, \quad w^\circ = 0, \quad \theta = \theta_w & \text{ или } (\partial \theta / \partial \zeta) = 0 \text{ при } \zeta = 0, \tau \geq 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Переход к старым переменным дается формулами

$$t = \tau, \quad y = \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\rho^\circ} \quad (2.21)$$

Ниже в § 3, 4 рассмотрены случаи, когда магнитное поле фиксировано относительно пластины, а в § 5 — случай, когда пластина движется во внешнем магнитном поле.

§ 3. Рассмотрим случай  $e_x = 0$ ,  $e_z = 0$ . Будем также считать, что  $\psi = 1$ ,  $P = 1$ . Последние условия являются широко распространенными предположениями в теории сжимаемого пограничного слоя. Из (2.19) получаем систему

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial \tau} = v_\infty \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial \zeta^2} - \varepsilon \varphi (u^\circ + \beta w^\circ), \quad \frac{\partial w^\circ}{\partial \tau} = v_\infty \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial \zeta^2} + \varepsilon \varphi (u^\circ \beta - w^\circ) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = v_\infty \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) по виду совпадает с уравнением (2.3) и имеет решение

$$\theta = \theta_w + (1 - \theta_w) \operatorname{erf} \eta \quad \text{или} \quad \theta \equiv 1 \quad (\eta = \zeta / 2 \sqrt{v_\infty \tau})$$

Полученное решение позволяет выразить энтальпию газа через его скорость

$$\begin{aligned} h^\circ &= 1 - (1 - h_w^\circ) \operatorname{Erf} \eta + \alpha (\operatorname{erf} \eta - u^{\circ 2} - w^{\circ 2}) \\ \text{или} \quad \tilde{h}^\circ &= 1 + \alpha (1 - u^{\circ 2} - w^{\circ 2}) \quad (\operatorname{Erf} \eta = 1 - \operatorname{erf} \eta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Согласно формуле (3.3), энтальпия газа на теплоизолированной поверхности равна энтальпии торможения потока на бесконечности, а тепловой поток в стенку в случае отвода тепла с поверхности

$$S = \frac{v_\infty}{u_\infty} (\pi f v_\infty)^{-1/2} \left( S = \frac{2(k\partial T / \partial y)_w}{\rho_\infty u_\infty (2h_\infty + u_\infty^2 - 2h_w)} \right) \quad (3.4)$$

где  $S$  — число Стантона. Как видно, тепловой поток к поверхности не зависит от магнитного поля.

Считая  $\varepsilon\tau$  малой величиной, решение уравнений (3.1), (3.2) будем искать в виде рядов, расположенных по степеням  $\varepsilon\tau$ , с коэффициентами, зависящими от переменной  $\eta$

$$\begin{aligned} u^\circ &= u_0(\eta) + \varepsilon\tau u_1(\eta) + \varepsilon^2\tau^2 u_2(\eta) + \dots \\ w^\circ &= \varepsilon\tau w_1(\eta) + \varepsilon^2\tau^2 w_2(\eta) + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь и далее величины с индексом  $v$  ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ) являются безразмерными и соответствуют  $v$ -му приближению. Подставляя разложение (3.5) в (3.3), получим разложение для  $h^\circ$ , первый коэффициент которого имеет вид

$$h_0 = 1 - (1 - h_w^\circ) \operatorname{Erf} \eta + \alpha (\operatorname{erf} \eta - u_0^2) \quad \text{или} \quad h_0 = 1 + \alpha (1 - u_0^2)$$

а последующие коэффициенты  $h_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), одинаковые для обеих зависимостей (3.3), равны

$$h_1 = -2\alpha u_0 u_1, \quad h_2 = -\alpha (u_1^2 + 2u_0 u_2 + w_1^2), \dots \quad (3.7)$$

Разложение в ряд функции  $\Phi(h^\circ)$  находится при помощи разложения в ряд величины  $h^\circ$

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon\tau)^k \Phi_k, \quad \Phi_0 = \Phi(h_0), \quad \Phi_1 = h_1 \left( \frac{d\Phi}{dh^\circ} \right)_{h^\circ=h_0} \\ \Phi_2 &= h_2 \left( \frac{d\Phi}{dh^\circ} \right)_{h^\circ=h_0} + \frac{h_1^2}{2} \left( \frac{d^2\Phi}{dh^{\circ 2}} \right)_{h^\circ=h_0}, \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

Коэффициенты разложения функции  $\beta(h^\circ)$  даются теми же формулами (3.8), если в последних  $\Phi$  заменить на  $\beta$ .

Подставляя (3.5) и (3.8) в уравнения (3.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon\tau$ , получим следующие линейные обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$u_0'' + 2\eta u_0' = 0, \quad u_0(0) = 0, \quad u_0(\infty) = 1 \quad (3.9)$$

$$u_1'' + 2\eta u_1' - 4u_1 = 4\Phi_0 u_0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1(\infty) = 0 \quad (3.10)$$

$$w_1'' + 2\eta w_1' - 4w_1 = -4\Phi_0 u_0 \beta_0, \quad w_1(0) = 0, \quad w_1(\infty) = 0 \quad (3.11)$$

$$u_2'' + 2\eta u_2' - 8u_2 = 4(\Phi_1 u_0 + \Phi_0 u_1 + \Phi_0 \beta_0 w_1), \quad u_2(0) = 0, \quad u_2(\infty) = 0 \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} w_2'' + 2\eta w_2' - 8w_2 &= -4(\Phi_0 u_1 \beta_0 + \Phi_0 u_0 \beta_1 - \Phi_0 w_1 + u_0 \beta_0 \Phi_1) \\ w_2(0) &= 0, \quad w_2(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной  $\eta$ . Приведенные выше и следующие за ними уравнения решаются последовательно и интегрируются в квадратурах [6]. Ограничимся изучением нулевого и первого приближений. Рассмотрим уравнение

$$\Phi'' + 2\eta\Phi' - 4\Phi = 2f(\eta), \quad |f(\eta)| < A\eta^{-p} \quad (p > 2) \quad (3.14)$$

К решению уравнения такого вида сводится ряд задач в теории неустойчившегося гидродинамического пограничного слоя [7].

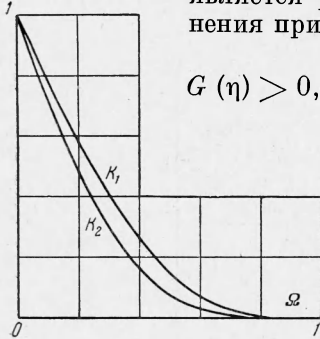
Его решение при условии  $\Phi(\infty) = 0$  имеет вид

$$\Phi(\eta) = \Phi(0) \exp(-\eta^2) G(\eta) + L[\eta, f(\eta)] \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} L[\eta, f(\eta)] = & -0.5 \sqrt{\pi} (1 + 2\eta^2) \left\{ C \operatorname{erf} \eta + \int_0^\eta f(\eta) [(1 + 2\eta^2) \operatorname{erf} \eta \times \right. \\ & \times \exp \eta^2 + 2\pi^{-1/2} \eta] d\eta - \operatorname{erf} \eta \int_0^\eta f(\eta) (1 + 2\eta^2) \exp \eta^2 d\eta \left. \right\} - \\ & - C \eta \exp(-\eta^2) + \eta \exp(-\eta^2) \int_0^\eta f(\eta) (1 + 2\eta^2) \exp \eta^2 d\eta \\ C = & \int_0^\infty f(\eta) G(\eta) d\eta, \quad \Phi'(0) = -\frac{4\Phi(0)}{\sqrt{\pi}} - 2C \quad (3.16) \end{aligned}$$

$$G(\eta) = (1 + 2\eta^2) \operatorname{Erf} \eta \exp \eta^2 - 2\pi^{-1/2} \eta \quad (G'' - 2\eta G' - 6G = 0)$$

В (3.15) функция  $L[\eta, f(\eta)]$  является решением уравнения (3.14) при условиях  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(\infty) = 0$ , а функция  $\Phi(0) \exp(-\eta^2) G(\eta)$  является решением соответствующего однородного уравнения при условии  $\Phi(\infty) = 0$ . Легко показать, что



$$G(\eta) > 0, \quad G'(\eta) < 0, \quad G''(\eta) > 0 \quad \text{при } 0 < \eta < \infty \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} G(0) = 1, \quad G'(0) = -4\pi^{-1/2}, \quad G''(0) = 6, \\ G(\infty) = 0, \quad G'(\infty) = 0, \quad G''(\infty) = 0 \end{aligned}$$

Графики функций  $G(\eta) = K_1(\Omega)$  и  $[G''(\eta)/6] = K_2(\Omega)$ , где  $\Omega = \eta(1 + \eta^2)^{-1}$ , представлены на фигуре. Далее имеем

$$L[\eta, k_1 f_1 + k_2 f_2] = k_1 L[\eta, f_1] + k_2 L[\eta, f_2] \quad (k_1, k_2 = \text{const}) \quad (3.18)$$

$$L[\eta, f(\eta)] \leq 0, \quad \text{если } f(\eta) \geq 0 \quad (3.19)$$

Неравенство (3.19) было доказано в работе [8], где одна из задач свелась к исследованию уравнения (3.14).

Решения уравнений (3.10) и (3.11) можно теперь представить в виде

$$u_0 = \operatorname{erf} \eta, \quad u_1 = 2L[\eta, \varphi_0 u_0], \quad w_1 = -2L[\eta, \varphi_0 u_0 \beta_0] \quad (3.20)$$

Так как  $\varphi_0 u_0 \geq 0$ ,  $\varphi_0 u_0 \beta_0 \geq 0$ , то на основании (3.19)  $u_1 \leq 0$ ,  $w_1 \geq 0$ . Таким образом, компонента скорости, обусловленная эффектом Холла, ни в одной точке не направлена вдоль отрицательного направления оси  $z$ .

Докажем, что при фиксированных значениях  $y$  и  $t$  ( $0 < y < \infty$ ,  $0 < t < \infty$ ) величина скорости  $u$  при  $H^* \neq 0$  меньше, чем при  $H^* = 0$ . Из формул (2.21) и (3.7) находим

$$\frac{y}{2 \sqrt{v_\infty t}} = \int_0^\eta \frac{d\eta}{\rho_0} - 2\alpha \epsilon t \int_0^\eta \left[ \frac{d(1/\rho^0)}{dh^0} \right]_{h^0=h_0} u_0 u_1 d\eta + \dots$$

Так как производная в квадратных скобках во втором интеграле положительна,  $u_0 \geq 0$ ,  $u_1 \leq 0$ , то, обозначая посредством  $\eta_{**}$  и  $\eta^{**}$  значе-



ния  $\eta$ , соответствующие фиксированной величине  $y / 2\sqrt{v_\infty t}$  при  $\varepsilon t \neq 0$  и  $\varepsilon t = 0$ , найдем, что  $\eta_{**} \leq \eta^{**}$ . Учитывая, что  $u_0' \geq 0$ , получаем требуемое неравенство

$$u_0(\eta_{**}) + \varepsilon t u_1(\eta_{**}) \leq u_0(\eta_{**}) \leq u_0(\eta^{**})$$

Определим интегральные характеристики. Коэффициент сопротивления трения  $c_f$  и коэффициент полного сопротивления  $c_d$  находятся при помощи (3.16)

$$c_f = \frac{2v_\infty}{u_\infty} (\pi t v_\infty)^{-1/2} \left( 1 - 2\sqrt{\pi} \varepsilon t \int_0^\infty \varphi_0 u_0 G d\eta + \dots \right) \quad \left( c_f = \frac{2\mu_w (\partial u / \partial y)_w}{\rho_\infty u_\infty^2} \right) \quad (3.21)$$

$$c_d = \frac{2v_\infty}{u_\infty} (\pi t v_\infty)^{-1/2} \left( 1 + 2\sqrt{\pi} \varepsilon t \int_0^\infty \varphi_0 u_0 (1 - G) d\eta + \dots \right) \\ \left( c_d = c_f + \frac{2H^*}{c_{p_\infty} u_\infty^2} \int_0^\infty i_z dy \right) \quad (3.22)$$

Так как величины  $\varphi_0$ ,  $u_0$ ,  $1 - G$  неотрицательны, из формул (3.21) и (3.22) вытекает, что магнитное поле приводит к уменьшению коэффициента трения и увеличению коэффициента полного сопротивления.

Предположим, что зависимости величин  $\sigma$ ,  $1 + \beta^2$  и  $\rho$  от энтальпии  $h$  при  $h > h_\infty$  соответственно аппроксимируются степенными зависимостями с показателями  $n_\sigma$ ,  $n_\beta$  и  $n_\rho$

| $n$ | $i_1$                | $i_2$  | $i_3$                | $i_4$  |
|-----|----------------------|--------|----------------------|--------|
| 1   | 0.06243              | 0.1990 | 0.1857               | 0.4633 |
| 3   | 0.00263              | 0.1093 | $5.69 \cdot 10^{-3}$ | 0.1359 |
| 4   | $5.84 \cdot 10^{-4}$ | 0.0909 | $1.20 \cdot 10^{-3}$ | 0.0959 |
| 5   | $1.33 \cdot 10^{-4}$ | 0.0781 | $2.63 \cdot 10^{-4}$ | 0.0727 |
| 7   | $7.13 \cdot 10^{-6}$ | 0.0615 | $1.36 \cdot 10^{-5}$ | 0.0474 |
| 10  | $0.95 \cdot 10^{-7}$ | 0.0472 | $1.74 \cdot 10^{-7}$ | 0.0298 |

Здесь  $\sigma^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\rho^*$  — некоторые характерные значения величин  $\sigma$ ,  $\beta$ , и  $\rho$ , соответственно вычисляемые по энтальпиям  $h_\sigma$ ,  $h_\beta$  и  $h_\rho$ . Тогда

$$\varphi_0 = \frac{\rho_\infty}{\rho^*} \left( \frac{h_\infty}{h_\sigma} \right)^{n_\sigma} \left( \frac{h_\infty}{h_\beta} \right)^{-n_\beta} \left( \frac{h_\infty}{h_\rho} \right)^{-n_\rho} (1 + \beta^{*2})^{-1} h_\infty^n \quad (n = n_\sigma - n_\beta - n_\rho) \quad (3.23)$$

Так как изменение величины  $\varphi$  в основном определяется изменением электропроводности ( $n$  близко к  $n_\sigma$ ), а электропроводность при  $h_0 \approx 1$  практически равна нулю, можно считать, что в формуле (3.23)

$$h_0 = \alpha \operatorname{erf} \eta \operatorname{Erf} \eta \quad \text{или} \quad h_0 = \alpha (1 - \operatorname{erf}^2 \eta)$$

Результаты вычислений интегралов, входящих в (3.21) и (3.22)

$$i_1 = \sqrt{\pi} \int_0^\infty (\operatorname{erf} \eta \operatorname{Erf} \eta)^n \operatorname{erf} \eta G(\eta) d\eta, \quad i_2 = \sqrt{\pi} \int_0^\infty \operatorname{erf} \eta (1 - \operatorname{erf}^2 \eta)^n G(\eta) d\eta$$

$$i_3 = \sqrt{\pi} \int_0^\infty (\operatorname{erf} \eta \operatorname{Erf} \eta)^n \operatorname{erf} \eta (1 - G) d\eta$$

$$i_4 = \sqrt{\pi} \int_0^\infty \operatorname{erf} \eta (1 - \operatorname{erf}^2 \eta)^n (1 - G) d\eta$$

представлены в таблице.

§ 4. Рассмотрим случай  $\psi = 1$ ,  $P = \text{const} \neq 1$ ,  $e_z = e_x = 0$ . Соответствующая система уравнений состоит из уравнений (3.4) и уравнения

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = v_{\infty} P^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - v_{\infty} P^{-1} (1 - P) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (u^{\circ 2} + w^{\circ 2}) \quad (4.1)$$

Решение этой системы будем искать в виде рядов (3.5) и ряда

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \tau \theta_1 + \varepsilon^2 \tau^2 \theta_2 + \dots \quad (4.2)$$

При помощи этих рядов определяется разложение в ряд энтальпии  $h^{\circ}$

$$\begin{aligned} h^{\circ} &= h_0 + \varepsilon \tau h_1 + \varepsilon^2 \tau^2 h_2 + \dots & h_0 &= 1 + \alpha (\theta_0 - u_0^2) \\ h_1 &= \alpha (\theta_1 - 2u_0 u_1), & h_2 &= \alpha (\theta_2 - 2u_0 u_2 - u_1^2 - w_1^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Функции  $\varphi (h^{\circ})$  и  $\beta (h^{\circ})$  раскладываются в ряды вида (3.8), в которых  $h_0$ ,  $h_1$  и  $h_2$  выражаются формулами (4.3). Подставляя ряды (3.5) и (4.2) в уравнения (3.1) и (4.1), получим уравнения (3.9)–(3.13) и уравнения

$$\begin{aligned} \theta_{0\lambda}'' + 2\lambda \theta_{0\lambda}' &= (1 - P) (u_0^2)_{\lambda}'' & \lambda &= \sqrt{P} \eta \\ \theta_0 (0) &= \alpha^{-1} (h_w^{\circ} - 1) \quad \text{или} \quad \theta_{0\lambda}' (0) = 0, & \theta_0 (\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \theta_{1\lambda}'' + 2\lambda \theta_{1\lambda}' - 4\theta_1 &= 2 (1 - P) (u_0 u_1)_{\lambda}'' \\ \theta_1 (0) &= 0 \quad \text{или} \quad \theta_{1\lambda}' (0) = 0, & \theta_1 (\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \theta_{2\lambda}'' + 2\lambda \theta_{2\lambda}' - 8\theta_2 &= (1 - P) (u_1^2 + 2u_0 u_2 + w_1^2)_{\lambda}'' \\ \theta_2 (0) &= 0 \quad \text{или} \quad \theta_{2\lambda}' (0) = 0, & \theta_2 (\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

В уравнениях (4.4)–(4.6) и далее индекс  $\lambda$  внизу указывает, что дифференцирование производится по переменной  $\lambda$ . Если индекс внизу отсутствует, то подразумевается дифференцирование по переменной  $\eta$ . Каждое уравнение относительно  $\theta_i$  при известных  $u_k$  ( $k=0, \dots, i$ ) и  $w_k$  ( $k=1, \dots, i-1$ ) и каждое уравнение относительно  $u_i$  и  $w_i$  при известных  $\theta_k$ ,  $u_k$ ,  $w_k$  ( $k=0, \dots, i-1$ ) интегрируется в квадратурах. Поэтому система уравнений может быть проинтегрирована в квадратурах последовательно. Для нулевого и первого приближений имеем

$$\begin{aligned} u_0 &= \text{erf } \eta, & \theta_0 &= \alpha^{-1} (h_w^{\circ} - 1) + 0.5 \sqrt{\pi} A \text{ erf } \lambda + (1 - P) r (\lambda) \\ & \text{или} & \theta_0 &= 1 - (1 - P) g \sqrt{\pi} + (1 - P) r (\lambda) \\ A &= 2\pi^{-1/2} [\alpha^{-1} (1 + \alpha - h_w^{\circ}) - g \sqrt{\pi} (1 - P)] \\ g &= \int_0^{\infty} u_0^2 G (\lambda) d\lambda, & r (\lambda) &= \int_0^{\lambda} \exp (-\lambda^2) \left( \int_0^{\lambda} (u_0^2)_{\lambda}'' \exp \lambda^2 d\lambda \right) d\lambda \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 2L [\eta, \varphi_0 u_0], & w_1 &= -2L [\eta, \varphi_0 u_0 \beta_0], & \theta_1 &= (1 - P) L [\lambda, (u_0 u_1)_{\lambda}''] \\ \text{или} & \theta_1 &= -0.5d \sqrt{\pi} (1 - P) \exp (-\lambda^2) G (\lambda) + (1 - P) L [\lambda, (u_0 u_1)_{\lambda}''] \\ & & d &= \int_0^{\infty} u_0 u_1 G_{\lambda}'' (\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (4.8)$$

Коэффициенты  $c_f$  и  $c_d$  определяются формулами (3.21), (3.22), в которых  $\varphi_0 = \varphi (h_0)$ , где  $h_0 = 1 + \alpha (\theta_0 - u_0^2)$ . Число Стантона в случае обтекания поверхности с теплоотводом и энтальпия газа на теплоизолирован-

ной поверхности находятся при помощи (4.7) и (4.8)

$$S = \frac{v_{\infty}}{u_{\infty}} (\pi t v_{\infty} P)^{-1/2} \left[ 1 - \frac{\alpha g \sqrt{\pi} (1-P)}{1 + \alpha - h_w^{\circ}} - \frac{\varepsilon t \alpha d \sqrt{\pi} (1-P)}{1 + \alpha - h_w^{\circ}} + \dots \right] \quad (4.9)$$

$$h_w^{\circ} = 1 + \alpha [1 - g \sqrt{\pi} (1-P)] - 0.5 \varepsilon t \alpha d \sqrt{\pi} (1-P) \quad (4.10)$$

При выводе формул (4.8) — (4.10) было использовано равенство

$$d = \int_0^{\infty} (u_0 u_1)_{\lambda}'' G(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} u_0 u_1 G_{\lambda}''(\lambda) d\lambda$$

Так как  $u_0 \geq 0$ ,  $u_1 \leq 0$ ,  $G'' \geq 0$ , то  $d \leq 0$ . Таким образом, если  $P < 1$ , то магнитное поле приводит к увеличению теплового потока, а если  $P > 1$  — к его уменьшению. Аналогично, энтальпия газа у теплоизолированной поверхности при наложении магнитного поля уменьшается, если  $P > 1$ , и увеличивается, если  $P < 1$ .

Результаты, полученные в § 3, 4, интересно сравнить с результатами работ [9,5], в которых исследовался стационарный магнитогидродинамический пограничный слой на плоской пластине, к которой приложено поперечное магнитное поле. В работе [9] путем численного интегрирования уравнений пограничного слоя для случая  $P = 1$ , постоянных  $\rho$ ,  $\mu$  и  $k$  и экспоненциальной зависимости проводимости от температуры было найдено, что магнитное поле приводит к уменьшению трения и теплового потока и увеличению полного сопротивления. При развитии пограничного слоя, согласно § 3, в случае  $P = 1$  магнитное поле в ту же сторону влияет на трение и полное сопротивление, но не изменяет тепловой поток к поверхности. В работе [5] численно интегрировались уравнения сжимаемого пограничного слоя на плоской пластине, к которой приложено поперечное магнитное поле, убывающее от передней кромки по закону  $1/\sqrt{x}$ . Предполагалось, что пластина обтекается воздухом, учитывалось изменение  $\rho$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  от энтальпии и принималось, что  $P = 0.70$ . Расчеты показали, что магнитное поле приводит к уменьшению трения и теплового потока. При развитии пограничного слоя, согласно результатам § 4, в случае  $P = 0.70 < 1$  магнитное поле уменьшает трение, но увеличивает тепловой поток.

§ 5. Пусть магнитное поле фиксировано относительно набегающего потока (пластина движется во внешнем магнитном поле). В этом случае  $e_z = -1$ . Положим  $e_x = 0$ ,  $\psi = 1$ ,  $P = 1$ ; система (2.19) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{\circ}}{\partial \tau} &= v_{\infty} \frac{\partial^2 u^{\circ}}{\partial \xi^2} + \varepsilon \varphi (1 - u^{\circ} - \beta w^{\circ}), & \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= v_{\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + 2\varepsilon \varphi (1 - u^{\circ} - \beta w^{\circ}) \\ \frac{\partial w^{\circ}}{\partial \tau} &= v_{\infty} \frac{\partial^2 w^{\circ}}{\partial \xi^2} - \varepsilon \varphi [\beta (1 - u^{\circ}) + w^{\circ}] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае для того чтобы поток на бесконечности был однородным, не обязательно требовать, чтобы  $\varphi \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ . Поэтому система (5.1) с граничными условиями (2.20) может применяться не только для описания движения пластины в непроводящем в начальный момент газе, когда его проводимость в пограничном слое повышается за счет разогрева вследствие трения, но и для описания движения пластины в жидкости с постоянной проводимостью.

Решение системы (5.1) ищем в виде рядов (3.5) и (4.2). Подставляя эти ряды в (5.1), для нулевого приближения (величин  $u_0$  и  $\theta_0$ ) получим уравнения (3.9) и (4.4), решения которых даются формулой (4.7) (в (4.4) и (4.7) надо положить  $P = 1$ ,  $\eta = \lambda$ ), а для первого приближения — уравнения

$$u_1'' + 2\eta u_1' - 4u_1 = -4\varphi_0 \operatorname{Erf} \eta, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1(\infty) = 0 \quad (5.2)$$

$$w_1'' + 2\eta w_1' - 4w_1 = 4\varphi_0 \beta_0 \operatorname{Erf} \eta, \quad w_1(0) = 0, \quad w_1(\infty) = 0 \quad (5.3)$$

$$\theta_1'' + 2\eta \theta_1' - 4\theta_1 = -8\varphi_0 \operatorname{Erf} \eta, \quad \theta_1(0) = 0 \quad \text{или} \quad \theta_1'(0) = 0 \quad (5.4)$$

$$\theta_1(\infty) = 0$$

Напомним, что здесь  $\varphi_0 = \varphi(h_0)$ ,  $\beta_0 = \beta(h_0)$ , где  $h_0 = 1 + \alpha(\theta_0 - u_0^2)$ . Решение этих уравнений имеет вид

$$u_1 = -2L [\eta, \varphi_0 \operatorname{Erf} \eta], \quad w_1 = 2L [\eta, \varphi_0 \beta_0 \operatorname{Erf} \eta] \quad (5.5)$$

или  $\theta_1 = -4L [\eta, \varphi_0 \operatorname{Erf} \eta]$

$$\theta_1 = 0.5m \sqrt{\pi} \exp(-\eta^2) G(\eta) - 4L [\eta, \varphi_0 \operatorname{Erf} \eta]$$

$$\left( m = 4 \int_0^\infty G(\eta) \varphi_0 \operatorname{Erf} \eta d\eta \right)$$

Из формул (5.5) при помощи (3.19) находим, что  $u_1 \geq 0$ ,  $w_1 \leq 0$ . Коэффициент трения, число Стантона и энтальпия газа у теплоизолированной поверхности равны

$$c_f = \frac{2v_\infty}{u_\infty} (\pi t v_\infty)^{-1/2} (1 + 0.5 \sqrt{\pi} m \varepsilon t + \dots) \quad (5.6)$$

$$S = \frac{v_\infty}{u_\infty} (\pi t v_\infty)^{-1/2} \left( 1 + \frac{\alpha m \sqrt{\pi} \varepsilon t}{1 + \alpha - h_w^\circ} + \dots \right) \quad (5.7)$$

$$h_w^\circ = 1 + \alpha + 0.5m\alpha \sqrt{\pi} \varepsilon t + \dots \quad (5.8)$$

Так как  $G \geq 0$ ,  $\varphi_0 \geq 0$ ,  $\operatorname{Erf} \eta \geq 0$ , из формул (5.6) и (5.7) следует, что магнитное поле приводит к увеличению трения и теплового потока. Заметим, что в случае двумерного стационарного пограничного слоя на полубесконечной пластине, движущейся во внешнем магнитном поле, трение и тепловой поток в результате воздействия магнитного поля при  $P = 1$  изменяются в том же направлении [9,10].

В случае  $\varphi_0 = \text{const}$  (например,  $\sigma$ ,  $\rho$  и  $\beta$  постоянны) имеем

$$c_f = \frac{2}{u_\infty} \left( \frac{v_\infty}{\pi t} \right)^{1/2} (1 + \varepsilon t \varphi_0 + \dots) \quad u_1 = \varphi_0 \{ \operatorname{Erf} \eta - \exp(-\eta^2) G(\eta) \}$$

$$S = \frac{v_\infty}{u_\infty} (\pi t v_\infty)^{-1/2} \left( 1 + \frac{2\alpha \varepsilon t \varphi_0}{1 + \alpha - h_w^\circ} + \dots \right) \quad (m = 2\pi^{-1/2} \varphi_0)$$

Поступила 18 XII 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чекмарев И. Б. О нестационарном течении вязкой несжимаемой проводящей жидкости в полупространстве при наличии поперечного магнитного поля. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, № 8, стр. 920—924.
2. Сахновский Э. Г. Учет анизотропии проводимости в магнитогидродинамической задаче Рэлея. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 5, стр. 631—635.
3. Баранов В. Б., Любимов Г. А., Ху Юй-инь. Расчет пограничного слоя на диэлектрической пластине, обтекаемой потоком несжимаемой анизотропно-проводящей жидкости, в присутствии однородного нормального магнитного поля. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, стр. 509—522.
4. Предводителев А. С., Ступоченко Е. В. и др. Таблицы термодинамических функций воздуха, ч. I. Изд-во АН СССР, 1962.
5. Bush W. B. Compressible flat-plate boundary layer flow with an applied magnetic field. J. Aero-Space Sci., 1960, vol. 27, No. 1, p. 49—58.
6. Янке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, 1961, стр. 424.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
8. Симони Л. М. Некоторые задачи гидродинамики вязкой жидкости и теплопередачи. Инж.-физ. ж., 1964, т. 7, № 6, стр. 55—62.
9. Rossow V. J. On magneto-aerodynamics boundary layers. Z. angew. Math. und Phys., 1958, Vol. 96, S. 519—527.
10. Rossow V. J. On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field. NASA, Report 1258, 1958.