УДК 517.9, 513.7, 550.3

Законы сохранения и другие формулы для семейств лучей и фронтов и для уравнения эйконала

А.Г. Меграбов

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

Новосибирский государственный технический университет, просп. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073

E-mail: mag@sscc.ru

Меграбов А.Г. Законы сохранения и другие формулы для семейств лучей и фронтов и для уравнения эйконала // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 4. — С. 483–497.

Ранее автором были получены дифференциальные законы сохранения для двумерного уравнения эйконала в неоднородной изотропной среде. Они представляют собой дивергентные тождества вида $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$, векторное поле $\boldsymbol{F}$ выражается через решение уравнения эйконала (поле времен), показатель преломления (параметр уравнения) и их частные производные. Были также найдены равносильные законы сохранения (дивергентные тождества) для семейств лучей и фронтов в терминах их геометрических характеристик, т. е. был найден геометрический смысл полученных законов сохранения для двумерного уравнения эйконала.

В данной статье представлены трехмерные аналоги этих результатов: дифференциальные законы сохранения для трехмерного уравнения эйконала и законы сохранения (дивергентные тождества вида $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$) для семейств лучей и фронтов, где векторное поле $\boldsymbol{F}$ под знаком дивергенции выражается через классические геометрические характеристики кривых лучей: их орты Френе (единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали), кривизну и кручение, либо через классические геометрические характеристики поверхностей фронтов: их нормаль, главные кривизны, главные направления, гауссову и среднюю кривизны.

Все результаты получены на основе общих векторных и геометрических формул (дифференциальных законов сохранения и других формул), полученных автором для семейств произвольных гладких кривых, семейств произвольных гладких поверхностей и произвольных гладких векторных полей.

DOI: 10.15372/SJNM20190407

Ключевые слова: *кинематическая сейсмика, геометрическая оптика, уравнение эйконала, семейство лучей, семейство фронтов, законы сохранения, дифференциальная геометрия, геометрия векторных полей.*

Megrabov A.G. Conservation laws and other formulas for families of rays and wavefronts and for the eikonal equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 4. — P. 483–497.

In the previous studies, the author has obtained the conservation laws for the 2D eikonal equation in an inhomogeneous isotropic medium. These laws represent the divergent identities of the form $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$. The vector field $\boldsymbol{F}$ is expressed in terms of the solution to the eikonal equation (the time field), the refractive index (the equation parameter) and their partial derivatives. Also, there were found equivalent conservation laws (divergent identities) for the families of rays and the families of wavefronts in terms of their geometric characteristics. Thus, the geometric essence (interpretation) of the above-mentioned conservation laws for the 2D eikonal equation was discovered.

In this paper, the 3D analogs to the results obtained are presented: differential conservation laws for the 3D eikonal equation and the conservation laws (divergent identities of the form $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$) for the family of rays and the family of wavefronts, the vector field $\boldsymbol{F}$ is expressed in terms of classical geometric characteristics of the ray curves: their Frenet basis (unit tangent vector, a principal normal and a binormal), the first curvature and the second curvature, or in terms of the classical geometric characteristics of the wavefront surfaces, i. e. their normal, principal directions, principal curvatures, the Gaussian curvature and the mean curvature.

All the results have been obtained based on the vector and geometric formulas (differential conservation laws and some formulas) obtained for the families of arbitrary smooth curves, the families of arbitrary smooth surfaces and arbitrary smooth vector fields.

Keywords: *kinematic seismic, geometric optics, eikonal equation, family of rays, family of wavefronts, conservation laws, differential geometry, geometry of vector fields.*

Посвящаю светлой памяти моего учителя
академика Анатолия Семеновича Алексеева

1. Введение

Данная работа продолжает тематику цикла статей автора [1–10]. Направление, развиваемое в этих работах, можно определить как исследование дифференциальных уравнений математической физики и геофизики (теории распространения волн различной природы в неоднородных средах) на основе их геометрического и группового анализа. В данном направлении взаимодействуют и взаимно проникают друг в друга различные области математики: уравнения математической физики, групповой анализ, геометрия векторного поля и дифференциальная геометрия. Важное место в этом исследовании занимает решение следующей задачи: найти закон сохранения для данного математического объекта (например для данного дифференциального уравнения (ДУ) математической физики, для векторного поля, для семейства кривых и семейства поверхностей).

Законы сохранения и их приложения имеют важное значение в математической физике [11–14], в механике сплошной среды [15], в вычислительной математике [16, 17] (список ссылок, конечно, является неполным).

ДУ математической физики представляют собой дифференциальные соотношения между векторными и скалярными полями. При этом векторные линии L_τ физических векторных полей, соответствующих решениям этих уравнений, образуют семейство кривых $\{L_\tau\}$ и сплошным образом заполняют рассматриваемую область. Например, для решений τ уравнения эйконала $\tau_x^2+\tau_y^2+\tau_z^2=n^2(x,y,z)$ (здесь $\tau=\tau(x,y,z)$ — скалярное поле времен, n — показатель преломления), которое является основной математической моделью в кинематической сейсмике (геометрической оптике), роль кривых L_τ играют лучи — векторные линии поля $\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\tau$. Для гидродинамических уравнений Эйлера роль кривых L_τ играют линии тока.

В математической физике часто имеются ситуации, когда наряду с семейством кривых $\{L_\tau\}$ существует и изучается семейство $\{S_\tau\}$ поверхностей S_τ с единичной нормалью $\boldsymbol{\tau}$, ортогональных кривым L_τ (полю $\boldsymbol{\tau}$). Например, для уравнения эйконала роль поверхностей S_τ играют фронты волн $\tau(x,y,z)=\mathrm{const}$, ортогональные к семейству лучей $\{L_\tau\}$ (в плоском случае фронты являются кривыми). Поэтому в [3–10] и в данной статье рассматриваются не свойства фиксированных кривых и поверхностей, а свойства их семейств $\{L_\tau\}$ и $\{S_\tau\}$, взаимно ортогональных и рассматриваемых одновременно.

Основные характеристики кривых L_τ классической дифференциальной геометрии [18–20] — базис Френе ($\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$) ($\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор главной нормали, $\boldsymbol{\beta}$ — единичный вектор бинормали), кривизна k и кручение $\varkappa$, определяемые в каждой точке данной кривой. Важнейшими классическими характеристиками поверхности S_τ являются ее единичная нормаль $\boldsymbol{\tau}$, главные направления $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$, главные кривизны k_1 и k_2, средняя кривизна $H\stackrel{\text{def}}{=}(k_1+k_2)/2$ и гауссова кривизна $K \stackrel{\text{def}}{=} k_1 k_2$, определяемые в каждой точке данной поверхности. Все величины $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ и $\varkappa$, k, k_1, k_2, H, K являются соответственно векторными и скалярными полями в области D, которую сплошным образом заполняют кривые L_τ и поверхности S_τ. Символы $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ и $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ обозначают скалярное и векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, ∇ — оператор Гамильтона, $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}$ — производная вектора $\boldsymbol{a}$ по направлению (вдоль) вектора $\boldsymbol{v}$.

Мы применяем математическое определение дифференциального закона сохранения для ДУ, близкое к определению, данному в [21]. Рассмотрим ДУ (систему) вида $L[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}] = 0$, где $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ — решение ДУ (соответствующее рассматриваемому физическому полю или процессу), $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t)$ — параметры, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и t — независимые переменные, L — заданный дифференциальный оператор. Законом сохранения для такого ДУ называется тождество вида

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} + \frac{\partial}{\partial t} R = 0, \tag{1}$$

где векторное поле $\boldsymbol{F}$ и скалярная функция R выражаются через величины $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{a}$, входящие в ДУ, и их частные производные. Например, закон сохранения для движений несжимаемой жидкости имеет вид $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, где $\boldsymbol{v}$ — скорость ее частиц.

Обобщая это определение, под законом сохранения для некоторого математического объекта будем понимать тождество вида (1), где векторное поле $\boldsymbol{F}$ и скалярная функция R выражаются через характеристики этого объекта. В [3–10] и ниже в качестве такого объекта рассматривается то или иное ДУ или семейство кривых, или семейство поверхностей, или векторное поле.

Основная задача в данной работе — найти трехмерные аналоги результатов из [5, 6], т. е. найти дифференциальные законы сохранения для трехмерного уравнения эйконала и связанные с ними законы сохранения для семейств лучей и волновых фронтов. Полученные результаты изложены в пункте 3. Их вывод опирается, в частности, на работы [4, 8].

В [5] впервые найдены законы сохранения для уравнения эйконала (в двумерном случае). В [6] дано их геометрическое истолкование как закона сохранения для семейств лучей и фронтов. В [7] описаны некоторые их приложения и другие формулы. Чтобы сделать текст автономным и иметь возможность сравнивать соответственные формулы для двумерного и трехмерного случаев, мы кратко изложим найденные в [5, 6] результаты в п. 2.

Кроме того, формулы и выражения в плоском случае являются более простыми и наглядными, чем в трехмерном случае, и могут служить удобным ориентиром или эталоном для уяснения формул трехмерного случая.

2. Двумерный случай. Основные формулы и законы сохранения

Изложение в данном пункте следует в основном статье [6]; доказательства и другие результаты для двумерного уравнения эйконала есть в [5, 7].

2.1. Закон сохранения для семейства плоских кривых

Рассмотрим семейство $\{L_\tau\}$ кривых L_τ, сплошным образом заполняющих некоторую область D на плоскости с прямоугольными координатами x, y и ортами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Относительно семейства $\{L_\tau\}$ всюду ниже будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(А) через каждую точку $(x,y)\in D$ проходит одна и только одна кривая $L_\tau\in\{L_\tau\}$, так что кривые L_τ не пересекаются в любой точке $(x,y)\in D$;

(Б) в каждой точке (x,y) любой кривой $L_\tau\in\{L_\tau\}$ существует базис Френе $(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu})$, при этом орты Френе $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$ являются однозначными векторными функциями переменных x,y в области D: $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(x,y)$, $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}(x,y)$. Таким образом, в D определены два взаимно ортогональных векторных поля ортов $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$. Считаем, что орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ по осям координат x, y и орты $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ образуют правую систему векторов;

(В) векторное поле $\boldsymbol{\tau}(x,y)\in C^2(D)$.

Заданному семейству кривых $\{L_\tau\}$ в D соответствует семейство $\{L_\nu\}$ кривых L_ν, ортогональных к кривым L_τ. Касательный орт кривой L_ν совпадает с ортом $\boldsymbol{\nu}$ нормали кривой L_τ, а орт нормали $\boldsymbol{\eta}$ к кривой L_ν совпадает с касательным ортом $\boldsymbol{\tau}$ кривой L_τ с точностью до знака: $\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\tau}$. Семейства кривых $\{L_\tau\}$ и $\{L_\nu\}$ будем называть *взаимно ортогональными*. Кривые L_τ являются векторными линиями векторного поля $\boldsymbol{\tau}$, а кривые L_ν — векторными линиями векторного поля нормалей $\boldsymbol{\nu}$ кривых L_τ.

Пусть $\boldsymbol{K}_\tau=(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\boldsymbol{\tau}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau}=k\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{K}_\nu=(\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\boldsymbol{\nu}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}=k_\nu\boldsymbol{\eta}=-k_\nu\boldsymbol{\tau}$ — векторы кривизны кривых L_τ с кривизной k и ортогональных им кривых L_ν с касательным ортом $\boldsymbol{\nu}$ и кривизной k_ν соответственно[1].

В [5, 6] обнаружено, что для любого семейства $\{L_\tau\}$ гладких плоских кривых L_τ с ортами Френе $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ с указанными свойствами (А)–(В) или для любых двух взаимно-ортогональных семейств гладких кривых $\{L_\tau\}$ и $\{L_\nu\}$ с такими свойствами справедливо дивергентное тождество (в D):

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})=0\quad\Leftrightarrow\quad\operatorname{div}\boldsymbol{S}^*=0,\tag{2}$$

где

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})\stackrel{\text{def}}{=}\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau},\tag{3}$$

$$\boldsymbol{S}^*\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{K}_\tau+\boldsymbol{K}_\nu=(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\boldsymbol{\tau}+(\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\boldsymbol{\nu}=k\boldsymbol{\nu}+k_\nu\boldsymbol{\eta}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau}+\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu},\tag{4}$$

причем

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})=\boldsymbol{S}^*=-\operatorname{rot}\big\{\alpha(x,y)\boldsymbol{k}\big\}.\tag{5}$$

Здесь $\alpha=\alpha(x,y)$ — угол наклона вектора $\boldsymbol{\tau}$ к оси ox, при этом $\boldsymbol{\tau}=\tau_1(x,y)\boldsymbol{i}+\tau_2(x,y)\boldsymbol{j}=\boldsymbol{\tau}(\alpha)=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\sin\alpha\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{\nu}=-\sin\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\alpha\,\boldsymbol{j}$, $k\stackrel{\text{def}}{=}d\alpha/ds=(\operatorname{grad}\,\alpha\cdot\boldsymbol{\tau})=k(x,y)$; $\boldsymbol{k}$ — орт по оси z, играющий роль бинормали для кривых L_τ.

[1]Применяя здесь и ниже в двумерном случае операцию rot, определенную для трехмерного векторного поля $\boldsymbol{v}=v_1(x,y,z)\boldsymbol{i}+v_2(x,y,z)\boldsymbol{j}+v_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$, к плоскому векторному полю $\boldsymbol{\tau}(x,y)$, $\boldsymbol{\nu}(x,y)$, $\boldsymbol{v}(x,y)$ и др., мы, следуя [20, с. 254], рассматриваем плоское поле $\boldsymbol{v}$ как поле векторов $\boldsymbol{v}$, параллельных плоскости (x,y) и зависящих только от x,y, т. е. как поле $\boldsymbol{v}=v_1(x,y)\boldsymbol{i}+v_2(x,y)\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}$ с компонентой $v_3\equiv 0$. Тогда из общей трехмерной формулы для $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(x,y,z)$ получаем: $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(x,y)=w(x,y)\boldsymbol{k}$, где $w(x,y)=\partial v_2/\partial x-\partial v_1/\partial y$.

Операция векторного произведения “$\times$” определена, вообще говоря, в $\mathbb{R}^3$ и векторное произведение двух векторов, лежащих в плоскости (x,y), этой плоскости не принадлежит. Однако мы применяем эту операцию в двумерном случае только в выражениях $\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}$. Полагая в общей формуле векторного произведения $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, что $\boldsymbol{a}=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+w(x,y)\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}$, получим $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=w(x,y)\{-\boldsymbol{i}v_2+\boldsymbol{j}v_1\}$. Таким образом, векторы вида $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}$ для плоских полей $\boldsymbol{v}(x,y)$ лежат в плоскости (x,y). Поэтому в двумерном случае все векторы $\boldsymbol{K}_\tau$, $\boldsymbol{K}_\nu$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$, $\boldsymbol{S}^*$, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{v})$ (и вектор $\operatorname{rot}\{\alpha(x,y)\boldsymbol{k}\}=\alpha_y\boldsymbol{i}-\alpha_x\boldsymbol{j}$) также принадлежат плоскости (x,y).

Тождество (2) означает, что для такого семейства кривых $\{L_\tau\}$ всегда существует векторное поле $\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{K}_\tau + \boldsymbol{K}_\nu$, представляющее собой сумму векторов кривизны двух плоских кривых L_τ и L_ν из взаимно ортогональных семейств кривых $\{L_\tau\}$ и $\{L_\nu\}$, которое является соленоидальным векторным полем в D.

Это свойство можно истолковать как существование в дифференциальной геометрии плоских кривых закона сохранения для векторного поля $\boldsymbol{S}^*$, имеющего дифференциальную форму (2) (поскольку для любого гладкого векторного поля $\boldsymbol{a}$ тождество $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0$ является дифференциальным законом сохранения с интегральной формой для потока (в плоском случае) $\displaystyle\int_S (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})\,dS = 0$, где S — произвольная кусочно-гладкая замкнутая кривая на плоскости x, y, dS — элемент длины S, $\boldsymbol{n}$ — единичная нормаль к S).

Тождество (2) по своему смыслу является чисто геометрическим. Однако оно может быть переведено на “физический язык” в случае, когда семейство $\{L_\tau\}$ является семейством векторных линий некоторого гладкого векторного поля $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,y) = |\boldsymbol{v}|\boldsymbol{\tau}$ с модулем $|\boldsymbol{v}|$, направлением $\boldsymbol{\tau}$ ($|\boldsymbol{\tau}| \equiv 1$) и свойством $|\boldsymbol{v}| \neq 0$. В [6] установлено, что тождество (2) в терминах такого поля $\boldsymbol{v}$ равносильно тождеству

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = 0, \tag{6}$$

где

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2} + \operatorname{grad}\,\ln|\boldsymbol{v}|,$$

представляющему собой дифференциальный закон сохранения для упомянутого произвольного поля $\boldsymbol{v}(x,y)$. Формула (6) найдена в [2] с помощью группового анализа для потенциального плоского поля $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} u(x,y)$, а в [4] — для произвольного гладкого плоского поля $\boldsymbol{v}(x,y)$. Равносильность тождеств (2) и (6) вытекает из следующего утверждения (см. [4–7]).

Утверждение 1. Для любого плоского векторного поля $\boldsymbol{v}(x,y)$ с компонентами $v_j(x,y) \in C^1(D)$ $(j = 1,2)$, модулем $|\boldsymbol{v}| \neq 0$ в D и направлением $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\alpha) = \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ справедливо тождество

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{v}) = P(|\boldsymbol{v}|) - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}), \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{P}(|\boldsymbol{v}|) - \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{v}),\\ \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}, \qquad \boldsymbol{P}(|\boldsymbol{v}|) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{grad}\,\ln|\boldsymbol{v}|.\end{gathered} \tag{8}$$

Если $v_j(x,y) \in C^2(D)$ $(j = 1,2)$, то справедливы тождества: $\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = (\Delta\alpha)\boldsymbol{k}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{Q} = \Delta\ln|\boldsymbol{v}|$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{Q} = -(\Delta\alpha)\boldsymbol{k} \Rightarrow \Delta\operatorname{Ln}\{|\boldsymbol{v}|\,\mathrm{e}^{\pm i\alpha}\} = \operatorname{div}\boldsymbol{Q} \mp i(\operatorname{rot}\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{k})$ (i — мнимая единица) (см. [5, 6]).

Замечание 1. Тождество (7) справедливо и для поля $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ [4], поэтому оно применяется в трехмерном случае в п. 3.

2.2. Законы сохранения для уравнения эйконала, семейств лучей и фронтов в двумерном случае

Пусть $c(x,y) = 1/n(x,y)$ — скорость распространения сигналов (волн) какой-либо природы в плоскости x, y, кинематика которых удовлетворяет принципу Ферма, $n = n(x,y)$ — показатель преломления; t — параметр точечного источника волн, определяющий его координаты x, y. Пусть D — некоторая область на плоскости x, y; $\tau = \tau(x,y,t)$ — некоторое решение уравнения эйконала $|\operatorname{grad}\tau|^2 \overset{\text{def}}{=} \tau_x^2 + \tau_y^2 = n^2(x,y)$ при $n(x,y) \geq n_0 > 0$. Функция $\tau(x,y,t)$ есть время пробега сигнала по лучу (геодезической метрики $ds^2 = n^2(x,y)(dx^2+dy^2)$), соединяющему источник с параметром t и точку (x,y). Потенциальное векторное поле $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\tau(x,y,t) = |\boldsymbol{v}|\boldsymbol{\tau}$ при любом $t = \text{const}$ имеет модуль $|\boldsymbol{v}| = n(x,y)$ и направление $\boldsymbol{\tau} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \sin\alpha\,\boldsymbol{j} = \operatorname{grad}\tau/n$, где $\alpha = \alpha(x,y,t)$ — угол наклона луча в точке x, y к оси Ox. Луч является векторной линией L_τ поля $\operatorname{grad}\tau$ с касательным ортом $\boldsymbol{\tau}$ и нормалью $\boldsymbol{\nu} = -\sin\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\alpha\,\boldsymbol{j} = -\operatorname{rot}(\tau\boldsymbol{k})/n$. Лучи L_τ и фронты волн L_ν (линии уровня $\tau(x,y,t) = \text{const}$ при $t = \text{const}$) образуют взаимно ортогональные семейства кривых при любом положении источника $t = \text{const}$. В [5] получены следующие законы сохранения для несилового поля времен $\tau = \tau(x,y,t)$: пусть $n(x,y) \in C^2(D)$, $\tau \in C^3(D)$ при любом $t = \text{const}$, тогда

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T} = 0 \tag{I}$$

при любом $t = \text{const}$;

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{Q} = 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{div}\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial t} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{div}\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \tag{II}$$

где

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &\overset{\text{def}}{=} \operatorname{grad}\ln n - \frac{\Delta\tau}{n^2}\operatorname{grad}\tau = -\operatorname{rot}(\alpha\boldsymbol{k}) = -(\alpha_y\boldsymbol{i} - \alpha_x\boldsymbol{j})\\ &= \frac{(\tau_y\tau_{xy} - \tau_x\tau_{yy})\boldsymbol{i} + (\tau_x\tau_{xy} - \tau_y\tau_{xx})\boldsymbol{j}}{n^2},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\Delta\tau}{n^2}\operatorname{grad}\tau, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{Q} = \Delta\ln n, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{Q} = -(\Delta\alpha)\boldsymbol{k} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{T}.$$

В законе сохранения (II) роль “времени t” играет параметр t источника. Тождество (II) означает существование дифференциального инварианта I распространения волн со следующим физическим смыслом: хотя функция поля времен τ зависит от параметра точечного источника t (его положения в среде), $\tau = \tau(x,y,t)$, величина

$$I = \operatorname{div}\{(\Delta\tau/n^2)\operatorname{grad}\tau\} = \operatorname{div}\boldsymbol{Q} = \Delta\ln n$$

не зависит от t (и от τ), т. е. инвариантна относительно положения источника.

Из формул (5) и (7) вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2. Закон сохранения (I) для поля времен $\tau(x,y,t)$ при любом фиксированном положении точечного источника равносилен следующему геометрическому свойству кривых лучей L_τ и ортогональных им кривых фронтов L_ν: векторное поле $\boldsymbol{S}^*$ вида (4), представляющее собой сумму векторов кривизны лучей и фронтов, является соленоидальным полем: $\operatorname{div}\boldsymbol{S}^* = 0$.

Связь тождеств и выражений, приведенных в данном пункте, с дифференциальными инвариантами некоторой группы Ли рассмотрена в [1–7].

3. Трехмерный случай

3.1. Законы сохранения вида $\operatorname{div}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) - \Phi\} = 0$

Пусть D — некоторая область в евклидовом E^3 пространстве с декартовыми координатами x, y, z; $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты по осям x, y, z; $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x, y, z)$ — векторное поле единичных векторов, определенное в D, $|\boldsymbol{\tau}| = 1$. В геометрии векторных полей (см. [22]) рассматривается случай голономного поля $\boldsymbol{\tau}$, для которого существует семейство поверхностей S_τ с нормалью $\boldsymbol{\tau}$, ортогональных полю $\boldsymbol{\tau}$, и общий случай, когда поле $\boldsymbol{\tau}$ может быть неголономным. Необходимым и достаточным условием голономности поля $\boldsymbol{\tau}$ [22, гл. 1, § 1] является выполнение тождества $(\boldsymbol{\tau} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}) = 0$ в D. Геометрия векторного поля вводит аналоги классических характеристик поверхностей S_τ для неголономного поля $\boldsymbol{\tau}$ [22]. Например, аналогом гауссовой кривизны поверхности S_τ является полная кривизна второго рода K [22]. В случае голономного поля $\boldsymbol{\tau}$ эти аналоги совпадают с соответствующими классическими характеристиками поверхностей S_τ с нормалью $\boldsymbol{\tau}$, например, упомянутая величина K совпадает с гауссовой кривизной [22]. Нетрудно вычислить, что поле направлений $\boldsymbol{\tau}$ любого потенциального векторного поля $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} u = |\boldsymbol{v}|\boldsymbol{\tau}$ с потенциалом u является голономным: $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0 \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{\tau} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}) = 0$.

В трехмерном случае, вообще говоря, уже не выполняется ни одно из тождеств $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{S}^*$, $\operatorname{div} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0$, $\operatorname{div} \boldsymbol{S}^* = 0$. Связь между $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$ и $\boldsymbol{S}^*$ дает ниже лемма 2. Геометрическая причина того, что $\operatorname{div} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) \not\equiv 0$ в D в общем случае, заключается в том, что, как найдено в [22], $\operatorname{div} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = -2K$; в общем случае $K \not\equiv 0$ (в голономном случае K есть гауссова кривизна поверхностей, ортогональных к векторным линиям поля $\boldsymbol{\tau}$ или к кривым L_τ).

При этом, как и в плоском случае, полагаем

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{K}_\tau - \boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, \tag{9}$$

а поле $\boldsymbol{S}^*$ есть уже сумма не двух, а трех векторов кривизны:

$$\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{K}_\tau + \boldsymbol{K}_\nu + \boldsymbol{K}_\beta,$$

где $\boldsymbol{K}_\tau$, $\boldsymbol{K}_\nu$, $\boldsymbol{K}_\beta$ — векторы кривизны векторных линий L_τ, L_ν, L_β полей ортов Френе $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной, $\boldsymbol{\nu}$ — главной нормали, $\boldsymbol{\beta}$ — бинормали) кривых L_τ.

Можно искать трехмерные аналоги тождества (2) в различных смыслах и соответственно ставить следующие задачи.

1. Сохранить левую часть в (2), т. е. рассмотреть тождество $\operatorname{div} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = A$ и выяснить геометрический смысл поля A.
2. Сохранить правую часть в (2), т. е. найти такое поле $\boldsymbol{X}$, чтобы $\operatorname{div}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{X}\} = 0$, т. е. найти трехмерный закон сохранения, переходящий в (2) в плоском случае.
3. Найти другие законы сохранения вида $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$, где векторное поле $\boldsymbol{F}$ выражается через геометрические характеристики рассматриваемого объекта (например семейства кривых или поверхностей), может быть, более высокого порядка, чем (2).

Имеет место

Лемма 1. *Пусть* $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x,y,z) = \cos\alpha_1\,\boldsymbol{i} + \cos\alpha_2\,\boldsymbol{j} + \cos\alpha_3\,\boldsymbol{k}$ *— векторное поле единичных векторов* ($|\boldsymbol{\tau}| \equiv 1$) *с областью определения* D; α_1, α_2, α_3 *— (направляющие) углы между вектором* $\boldsymbol{\tau}$ *и осями* x, y, z *соответственно*; $\boldsymbol{\tau}(x,y,z) \in C^1(D)$. *Тогда поле* $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$ *вида* (9) *представимо в любой из форм*:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{j=1}^{3} \operatorname{grad}\, \cos\alpha_j \times (\boldsymbol{i}_j \times \boldsymbol{\tau}) = \sum_{j=1}^{3} \cos\alpha_j \operatorname{rot}(\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{i}_j),$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\Phi}_1 - \operatorname{rot}\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Phi}_2 + \operatorname{rot}\boldsymbol{\Psi},$$

где $\boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{\Phi}_1 \stackrel{\text{def}}{=} 2\{\cos\alpha_3 \operatorname{rot}(\cos\alpha_2\,\boldsymbol{i}) + \cos\alpha_1 \operatorname{rot}(\cos\alpha_3\,\boldsymbol{j}) + \cos\alpha_2 \operatorname{rot}(\cos\alpha_1\,\boldsymbol{k})\},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2 \stackrel{\text{def}}{=} -2\{\cos\alpha_2 \operatorname{rot}(\cos\alpha_3\,\boldsymbol{i}) + \cos\alpha_3 \operatorname{rot}(\cos\alpha_1\,\boldsymbol{j}) + \cos\alpha_1 \operatorname{rot}(\cos\alpha_2\,\boldsymbol{k})\},$$

$$\boldsymbol{\Psi} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\alpha_2\cos\alpha_3\,\boldsymbol{i} + \cos\alpha_1\cos\alpha_3\,\boldsymbol{j} + \cos\alpha_1\cos\alpha_2\,\boldsymbol{k}.$$

Доказательство. Доказательство следует при подстановке формулы $\boldsymbol{\tau} = \cos\alpha_1\boldsymbol{i} + \cos\alpha_2\boldsymbol{j} + \cos\alpha_3\boldsymbol{k}$ в выражение $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}$ с использованием известных формул векторного анализа [20] $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, $\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a} + \operatorname{grad}\varphi\times\boldsymbol{a}$ и равенств $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — правая система ортов). □

Из леммы 1 вытекает

Теорема 1. *При условиях леммы 1 и* $\boldsymbol{\tau} \in C^2(D)$ *в* D *имеют место равносильные дивергентные тождества* (*закон сохранения*) *для поля единичных векторов* $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(z,y,z)$:

$$\operatorname{div}\big\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{\tau})\big\} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Если $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x,y,z)$ *— поле касательных единичных векторов кривых* L_τ *семейства* $\{L_\tau\}$ *или поле единичных нормалей поверхностей* S_τ *семейства* $\{S_\tau\}$, *то последнее тождество можно рассматривать как закон сохранения для семейства кривых* $\{L_\tau\}$ *или семейства поверхностей* $\{S_\tau\}$. *Если* $\boldsymbol{\tau}$ *— направление векторного поля* $\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\boldsymbol{\tau}$, *то при условиях леммы 1 в* D *справедливы равносильные дивергентные тождества для векторного поля* $\boldsymbol{v} \in C^2(D)$:

$$\operatorname{div}\big\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{v})\big\} = 0, \quad i = 1, 2,$$

где $\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{v})$ *получается из* $\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{\tau})$ *заменой* $\boldsymbol{\tau}$ *на* $\{\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|\}$ *и* $\cos\alpha_j$ *на* $\{v_j/|\boldsymbol{v}|\}$,

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = \operatorname{grad}\,\ln|\boldsymbol{v}| + \frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2};$$

$$\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{v}) = \frac{2}{|\boldsymbol{v}|}\left\{v_3\operatorname{rot}\left(\frac{v_2}{|\boldsymbol{v}|}\,\boldsymbol{i}\right) + v_1\operatorname{rot}\left(\frac{v_3}{|\boldsymbol{v}|}\,\boldsymbol{j}\right) + v_2\operatorname{rot}\left(\frac{v_1}{|\boldsymbol{v}|}\,\boldsymbol{k}\right)\right\};$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{v}) = -\frac{2}{|\boldsymbol{v}|}\left\{v_2\operatorname{rot}\left(\frac{v_3}{|\boldsymbol{v}|}\,\boldsymbol{i}\right) + v_3\operatorname{rot}\left(\frac{v_1}{|\boldsymbol{v}|}\,\boldsymbol{j}\right) + v_1\operatorname{rot}\left(\frac{v_2}{|\boldsymbol{v}|}\,\boldsymbol{k}\right)\right\}.$$

Здесь мы применили тождество $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$ для трехмерного случая, полученное в [4]. В силу вышеупомянутой формулы $K = -\frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$ из теоремы 1 получаем

Следствие 1 (геометрический смысл закона сохранения теоремы 1). *Для голономного поля $\boldsymbol{\tau}$ гауссова кривизна K поверхностей $S_\tau \in \{S_\tau\}$, ортогональных полю $\boldsymbol{\tau}$, допускает в D дивергентное представление $K = -\dfrac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{\tau})$. Если поверхности S_τ ортогональны векторным линиям L_τ векторного поля $\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\boldsymbol{\tau}$, $|\boldsymbol{v}| \neq 0$, в D и $\boldsymbol{v} \in C^2(D)$, то $K = -\dfrac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{v})$.*

3.2. Закон сохранения вида $\operatorname{div}\{\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\Phi}\} = 0$ для уравнения эйконала

Рассмотрим уравнение эйконала $|\operatorname{grad}\tau|^2 \overset{\text{def}}{=} \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = n^2(x,y,z)$ для скалярного поля времен $\tau = \tau(x,y,z)$ в неоднородной изотропной среде с показателем преломления $n(x,y,z)$. Функция $\tau(x,y,z)$ есть время пробега сигнала (волн) какой-либо природы, кинематика которых удовлетворяет принципу Ферма, по лучу (по геодезической линии метрики $ds^2 = n^2(x,y,z)(dx^2+dy^2+dz^2)$), соединяющему точечный источник и точку (x,y,z). Луч в данном случае играет роль кривой L_τ и является векторной линией векторного потенциального (несилового) поля $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\tau$ с единичным касательным вектором $\boldsymbol{\tau} = \operatorname{grad}\tau/n$ и модулем $|\operatorname{grad}\tau| = n$. Очевидно, в данном случае поле $\boldsymbol{\tau}$ — голономное $((\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}) = (\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{v}) = 0)$; роль поверхностей S_τ, ортогональных к лучам L_τ, играют фронты волн $\tau(x,y,z) = \text{const}$ (поверхности уровня скалярного поля τ). Из теоремы 1 получаем

Следствие 2 (закон сохранения для уравнения эйконала). *Пусть $\tau = \tau(x,y,z)$ — решение уравнения эйконала в области D, поле времен $\tau \in C^3(D)$, показатель преломления $n \in C^2(D)$. Тогда в D имеет место закон сохранения*

$$\operatorname{div}\left\{\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{\tau})\right\} = 0, \quad i = 1,2,$$

где

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\operatorname{grad}\tau) = \operatorname{grad}\ln n - \frac{\Delta\tau\operatorname{grad}\tau}{n^2},$$

величины $\boldsymbol{\Phi}_i(\tau)$ получаются из величин $\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{\tau})$ леммы 1 подстановками $\cos\alpha_1 = \tau_x/n$, $\cos\alpha_2 = \tau_y/n$, $\cos\alpha_3 = \tau_z/n$:

$$\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{\tau}) \overset{\text{def}}{=} \frac{2}{n}\left\{\tau_z\operatorname{rot}\left(\frac{\tau_y}{n}\boldsymbol{i}\right) + \tau_x\operatorname{rot}\left(\frac{\tau_z}{n}\boldsymbol{j}\right) + \tau_y\operatorname{rot}\left(\frac{\tau_x}{n}\boldsymbol{k}\right)\right\},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{\tau}) \overset{\text{def}}{=} -\frac{2}{n}\left\{\tau_y\operatorname{rot}\left(\frac{\tau_z}{n}\boldsymbol{i}\right) + \tau_z\operatorname{rot}\left(\frac{\tau_x}{n}\boldsymbol{j}\right) + \tau_x\operatorname{rot}\left(\frac{\tau_y}{n}\boldsymbol{k}\right)\right\}.$$

Равносильное тождество $\operatorname{div}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{\tau})\} = 0$ представляет собой закон сохранения для семейства лучей $\{L_\tau\}$ или для семейства фронтов $\{S_\tau\}$.

Для гауссовой кривизны K поверхности фронта $\tau(x,y,z) = \text{const}$ имеем:

$$K = -\frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{T} = -\frac{1}{2}\left\{\Delta\ln n - \operatorname{div}\left(\frac{\Delta\tau}{n^2}\operatorname{grad}\tau\right)\right\} = -\frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{\tau}).$$

В плоском случае ($n = n(x,y)$, $\tau = \tau(x,y)$, $\tau_z = 0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}_i = 0$) получаем найденный в [5] закон сохранения $\operatorname{div}\boldsymbol{T} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0$.

3.3. Трехмерные аналоги закона сохранения $\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})=0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\boldsymbol{S}^*=0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})=0$ плоского случая. Поле $\boldsymbol{R}^*$

Пусть $\{L_\tau\}$ — семейство кривых L_τ, сплошным образом заполняющих область D, и

(А) через каждую точку $(x,y,z)\in D$ проходит одна и только одна кривая $L_\tau\in\{L_\tau\}$;

(Б) в каждой точке (x,y,z) любой кривой $L_\tau\in\{L_\tau\}$ существует (правый) базис Френе $(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})$ ($\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной, $\boldsymbol{\nu}$ — главной нормали, $\boldsymbol{\beta}$ — бинормали), так что в D определены три взаимно ортогональных векторных поля $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, при этом $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}$;

(В) $\boldsymbol{\tau}(x,y,z)\in C^2(D)$.

Связь между полями $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$ и $\boldsymbol{S}^*$ дает [8]

Лемма 2. *Пусть для семейства $\{L_\tau\}$ кривых L_τ с ортами Френе $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, кривизной k и кручением $\varkappa$ в области D выполнены условия (А)–(В). Пусть поле $\boldsymbol{S}^*$ есть сумма трех векторов кривизны*:

$$\boldsymbol{S}^* \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{K}_\tau+\boldsymbol{K}_\nu+\boldsymbol{K}_\beta=(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\boldsymbol{\tau}+(\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\boldsymbol{\nu}+(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla)\boldsymbol{\beta}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau}+\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}+\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}$$
$$=-\{\boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\nu}\operatorname{div}\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\beta}\operatorname{div}\boldsymbol{\beta}\}=\frac{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})+\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\nu})+\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\beta})}{2}. \tag{10}$$

Здесь $\boldsymbol{K}_\tau=(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\boldsymbol{\tau}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau}=k\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{K}_\nu=(\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\boldsymbol{\nu}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{K}_\beta=(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla)\boldsymbol{\beta}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}$ суть векторы кривизны векторных линий L_τ, L_ν, L_β полей $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ соответственно. Тогда в D имеет место тождество $\boldsymbol{S}^*=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})+\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{R}^*$, где векторное поле $\boldsymbol{R}^*$ выражается с помощью любой из формул:

$$\boldsymbol{R}^* \overset{\text{def}}{=} \varkappa\boldsymbol{\tau}+k\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\operatorname{div}\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}\operatorname{div}\boldsymbol{\beta}, \tag{11}$$
$$\boldsymbol{R}^*=[\varkappa-(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau})]\boldsymbol{\tau}+\nabla(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{S}^*\times\boldsymbol{\tau}, \tag{12}$$
$$\boldsymbol{R}^*=\varkappa\boldsymbol{\tau}+(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}+(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}. \tag{13}$$

Здесь $\boldsymbol{\Phi}\overset{\text{def}}{=}\varkappa\boldsymbol{\tau}+k\boldsymbol{\beta}$ — вектор Дарбу (G. Darboux) [18], $\nabla(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})\overset{\text{def}}{=}(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla)\boldsymbol{\nu}-(\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\boldsymbol{\beta}$ — *скобка Пуассона* [22] *для $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$.*

Векторное поле $\boldsymbol{R}^*$ является мерой различия полей $\boldsymbol{S}^*$ и $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$. В плоском случае, когда $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(x,y)$, $\varkappa=0$, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{k}=\mathrm{const}$, получаем $\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}=0$, $\boldsymbol{R}^*=0\Rightarrow\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})=\boldsymbol{S}^*=\boldsymbol{K}_\tau+\boldsymbol{K}_\nu$.

В [8] получены следующие формулы.

Теорема 2. *При условиях (А)–(В) имеют место следующие трехмерные скалярные аналоги закона сохранения $\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})=0\Leftrightarrow\operatorname{div}\boldsymbol{S}^*=0$ (плоского случая) для семейства пространственных кривых $\{L_\tau\}$ вида $\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})=f$, $\operatorname{div}\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{\tau})=f^*$* :

$$\frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})=\varkappa[\varkappa-(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau})]-(\boldsymbol{\tau}\cdot[\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}]); \tag{14}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})=2(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*) \tag{15}$$
$$\Updownarrow$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{S}^*=(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*)+k(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})+\varkappa(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}); \tag{16}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S}^* = \frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) + k(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}) + \varkappa(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}), \tag{17}$$

где поля $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$, $\boldsymbol{S}^*$, $\boldsymbol{R}^*$ *определены формулами* (9)–(13).

Точным трехмерным (векторным) аналогом закона сохранения

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S}^* = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0$$

для семейства плоских кривых является любая из формул:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{S}^* - \varkappa\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau} - k\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}, \tag{18}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) - k\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}) - k\boldsymbol{\beta}[(\boldsymbol{\beta}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}) + \varkappa], \tag{19}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{\tau}\{\varkappa^2 - \varkappa(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}) - (\boldsymbol{\tau}\cdot[\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}])\} - k\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}) - k\boldsymbol{\beta}[\varkappa+(\boldsymbol{\beta}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})]. \tag{20}$$

Поскольку в плоском случае $\varkappa = 0$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{k} = \mathrm{const} \Rightarrow \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta} = 0$, $\boldsymbol{R}^* = 0$, то любая из этих формул переходит в закон сохранения $\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\boldsymbol{S}^* = 0$ плоского случая.

3.4. Законы сохранения вида $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 0$ более высокого порядка

Из теоремы 2 и формул (18)–(20) вытекают [8] следующие дивергентные формулы (закон сохранения) для семейства кривых $\{L_\tau\}$ вида $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 0$, где векторное поле $\boldsymbol{F}$ выражается через поля $\boldsymbol{S}^*$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$, орты Френе $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\beta}$, кривизну k и кручение $\varkappa$ кривых L_τ. Они имеют более высокий порядок по сравнению с законом сохранения теоремы 1.

Теорема 3. *При условиях (A)–(B) в D имеет место дивергентное тождество (закон сохранения для семейства кривых* $\{L_\tau\}$*)*

$$\operatorname{div}\big\{\boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{S}^* - \varkappa\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau} - k\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\big\} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\operatorname{div}\big\{(1/2)\,\boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) - k\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}) - k\boldsymbol{\beta}\big[(\boldsymbol{\beta}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}) + \varkappa\big]\big\} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\operatorname{div}\Big\{\boldsymbol{\tau}\big\{\varkappa^2 - \varkappa(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}) - \big(\boldsymbol{\tau}\cdot\big[\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\big]\big)\big\} - k\boldsymbol{\nu}\big(\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\big) - k\boldsymbol{\beta}\big[\varkappa + \big(\boldsymbol{\beta}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\big)\big]\Big\} = 0.$$

Здесь выражение в фигурных скобках всюду равно $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*$; *величины* $\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$, $\operatorname{div}\boldsymbol{S}^*$ *можно выразить по формулам* (14)–(17) *теоремы 2.*

3.5. О законах сохранения для семейства поверхностей

Пусть для поля $\boldsymbol{\tau}$ в D существует семейство поверхностей S_τ, ортогональных полю $\boldsymbol{\tau}$, что, согласно теореме Якоби [22, гл. 1, § 1], равносильно выполнению тождества $(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}) = 0$ в D. Тогда формулы теорем 2 и 3 можно понимать как законы сохранения и их аналоги для семейства $\{S_\tau\}$ поверхностей S_τ с нормалью $\boldsymbol{\tau}$, если в качестве кривых L_τ взять векторные линии поля нормалей $\boldsymbol{\tau}$.

Однако в качестве исходного объекта можно взять семейство $\{S_\tau\}$ поверхностей S_τ и представить закон сохранения для $\{S_\tau\}$ непосредственно в терминах характеристик поверхностей S_τ: $\boldsymbol{\tau}$ (нормаль), $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ (главные направления), k_1 и k_2 (главные кривизны), K (гауссова кривизна), H (средняя кривизна).

Пусть $\{S_\tau\}$ — семейство поверхностей S_τ с единичной нормалью $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x, y, z)$, сплошным образом заполняющих область D в пространстве x, y, z. При этом главное направление будем представлять единичным вектором $\boldsymbol{l}_i$ $(i = 1, 2)$ с соответствующим направлением; вектор $\boldsymbol{l}_i$ является касательным ортом линии кривизны L_i на S_τ и в точке $(x, y, z) \in S_\tau$ равен производной радиус-вектора $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y, z)$ точки поверхности S_τ по главному направлению в точке (x, y, z). Пусть

(Г) через каждую точку $(x, y, z) \in D$ проходит одна и только одна поверхность $S_\tau \in \{S_\tau\}$;

(Д) в каждой точке $(x, y, z) \in D$ существует (правая) система взаимно ортогональных ортов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичная нормаль, $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ — главные направления на поверхности S_τ, проходящей через эту точку. Для этого достаточно, чтобы каждая поверхность $S_\tau \in \{S_\tau\}$ была C^2-регулярной [19]. Таким образом, в D определены три взаимно ортогональных векторных поля ортов $\boldsymbol{\tau}(x, y, z)$, $\boldsymbol{l}_1(x, y, z)$, $\boldsymbol{l}_2(x, y, z)$; $\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2$;

(Е) $\boldsymbol{\tau} \in C^1(D)$, $\boldsymbol{l}_i \in C^1(D)$, $i = 1, 2$.

В [9, 10] получена

Теорема 4. *Пусть для семейства $\{S_\tau\}$ поверхностей S_τ с единичной нормалью $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x, y, z)$ выполнены условия (Г)–(Е) и для семейства $\{L_\tau\}$ кривых L_τ, ортогональных к $\{S_\tau\}$, выполнены условия (А)–(В). Тогда для семейства $\{S_\tau\}$ поверхностей S_τ в области D имеет место дивергентное тождество (закон сохранения)*

$$\operatorname{div}\big\{K\boldsymbol{\tau} + k_2(\boldsymbol{l}_2 \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{l}_1 - k_1(\boldsymbol{l}_1 \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{l}_2\big\} = 0,$$

равносильное закону сохранения теоремы 3 для $\{L_\tau\}$. Выражение в $\{\ \}$ равно $-\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*$. При этом

$$k_1 = -\big(\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_2\big), \qquad k_2 = \big(\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_2 \cdot \boldsymbol{l}_1\big),$$

$$K \overset{\text{def}}{=} k_1 k_2 = -\big(\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_2\big)\big(\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_2 \cdot \boldsymbol{l}_1\big) = \big(\boldsymbol{\tau} \cdot \big[\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_1 \times \operatorname{rot}\boldsymbol{l}_2\big]\big) - \big(\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_i \cdot \boldsymbol{l}_i\big)^2,$$

где $i = 1$ или 2.

Замечание 2. В [8] получены формулы:

$$K = \operatorname{div}\big\{\operatorname{grad}\,(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \boldsymbol{R}^*\big\}, \qquad K = \big(\boldsymbol{\tau} \cdot \big[\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\big]\big) - \varkappa^2,$$

где K — гауссова кривизна поверхности $S_\tau \in \{S_\tau\}$; $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор; $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$, $\varkappa$ — базис Френе и кручение векторных линий L_τ поля нормалей $\boldsymbol{\tau}$ поверхностей S_τ.

Замечание 3. Орты Френе $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$, кривизну k кривых L_τ и кручение $\varkappa$ можно выразить через $\boldsymbol{\tau}$ [20, 22, гл. 1, § 15]:

$$\boldsymbol{\nu} = (\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau})/k, \qquad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad k = |\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau}|,$$

$$\varkappa = \frac{1}{2}\big\{(\boldsymbol{\tau} \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}) - (\boldsymbol{\nu} \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}) - (\boldsymbol{\beta} \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})\big\}.$$

Поскольку в силу формул леммы 2, теорем 2–4 и замечания 2 величины $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$, $\boldsymbol{S}^*$, $\boldsymbol{R}^*$, $\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$, $\operatorname{div}\boldsymbol{S}^*$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*$, K, k_1, k_2, $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ выражаются через орты $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, кривизну k и кручение $\varkappa$ кривых L_τ, то в конечном итоге все эти величины могут быть выражены только через поле $\boldsymbol{\tau}$. Поэтому все формулы теорем 2–4 могут быть выражены только через поле $\boldsymbol{\tau}$ (поле единичных касательных векторов кривых L_τ или поле единичных нормалей поверхностей S_τ).

Замечание 4. Чтобы из формул теоремы 3 получить закон сохранения для решений τ уравнения эйконала более высокого порядка, чем в следствии 2, следует всюду в формулы этой теоремы и замечания 3 вместо $\boldsymbol{\tau}$ подставить выражение $\operatorname{grad}\tau/n$ и положить $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{T}(\operatorname{grad}\tau)$ (см. замечание 1).

3.6. Еще один закон сохранения для решений трехмерного уравнения эйконала и лучей

Теорема 5. *Пусть* $\tau = \tau(x,y,z)$ — *решение уравнения эйконала* $\tau_x^2+\tau_y^2+\tau_z^2 = n^2(x,y,z)$ *в области* D, $\tau \in C^3(D)$, $n \in C^2(D)$. *Тогда в* D *имеет место закон сохранения*: $\operatorname{div}\{\tau^m n^l \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\{\tau^m n^l k\boldsymbol{\beta}\} = 0$ $(l, m \in \mathbb{R},\ m > 0) \Leftrightarrow \operatorname{div}\{\tau \operatorname{rot}\boldsymbol{T}\} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\{\operatorname{grad}\tau \times \boldsymbol{T}\} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\{\tau \operatorname{rot}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})\} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\{\operatorname{grad}\tau \times \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})\} = 0$, *где* $\boldsymbol{\tau} = \operatorname{grad}\tau/n$ — *единичный вектор, касательный к лучу, или единичная нормаль к фронту* $\tau(x,y,z) = \mathrm{const}$, k *и* $\boldsymbol{\beta}$ — *кривизна и бинормаль луча, векторные поля* $\boldsymbol{T}$ *и* $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$ *определены в пп. 3.1.*

Доказательство. Имеем $\operatorname{grad}\tau = n\boldsymbol{\tau}$,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\{\tau^m n^l \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\} &= \big(\operatorname{grad}\,(\tau^m n^l)\cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\big) = \left(\operatorname{grad}\,(\tau^m n^l)\cdot \operatorname{rot}\frac{\operatorname{grad}\tau}{n}\right) \\
&= \left(\Big[\tau^m l n^{l-1}\operatorname{grad} n + n^l m\tau^{m-1}\operatorname{grad}\tau\Big]\cdot\Big[-\frac{1}{n^2}\operatorname{grad} n\times\operatorname{grad}\tau\Big]\right) = 0
\end{aligned}
$$

в силу известных формул: $\big(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\big) = 0$, $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a} + (\operatorname{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{a})$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0$, $\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a} + \operatorname{grad}\varphi\times\boldsymbol{a}$. Также $\operatorname{div}\{\operatorname{grad}\tau\times\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})\} = \operatorname{div}\{n\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})\} = \operatorname{div}(n\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}) = 0$ (случай $m = 0$, $l = 1$). Кроме того, $\operatorname{div}\{\operatorname{grad}\tau\times\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})\} = (\operatorname{grad}\tau\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})) = \operatorname{div}\{\tau\operatorname{rot}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})\}$ и $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{T}$ (см. замечание 1), где $\boldsymbol{T} = T(\operatorname{grad}\tau) = \operatorname{grad}\,\ln n - \Delta\tau\operatorname{grad}\tau/n^2$. Теорема доказана. □

Литература

1. **Меграбов А.Г.** О некотором групповом подходе к обратным задачам для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 275, № 3. — С. 583–586.
2. **Меграбов А.Г.** Об одном дифференциальном тождестве // ДАН. — 2004. — Т. 395, № 2. — С. 174–177. Перевод: Megrabov A.G. On one differential identity // Dokl. Math. — 2004. — Vol. 69, № 2. — P. 282–285.
3. **Меграбов А.Г.** Дифференциальные тождества, связывающие лапласиан скалярной функции, модуль ее градиента и угол его направления // ДАН. — 2009. — Т. 424, № 5. — С. 599–603. Перевод: Megrabov A.G. Differential identities relating the Laplacian, the modulus of gradient, and the gradient directional angle of a scalar function // Dokl. Math. — 2009. — Vol. 79, № 1. — P. 136–140.
4. **Меграбов А.Г.** Дифференциальные тождества, связывающие модуль и направление векторного поля, и гидродинамические уравнения Эйлера // ДАН. — 2010. — Т. 433, № 3. — С. 309–313. Перевод: Megrabov A.G. Differential identities relating the modulus and direction of a vector field and Euler's hydrodynamic equations // Dokl. Math. — 2010. — Vol. 82, № 1. — P. 625–629.
5. **Меграбов А.Г.** Некоторые дифференциальные тождества и их приложения к уравнению эйконала // ДАН. — 2010. — Т. 433, № 4. — С. 461–465. Перевод: Megrabov A.G. Some differential identities and their applications to the eikonal equation // Dokl. Math. — 2010. — Vol. 82, № 1. — P. 638–642.

6. **Меграбов А.Г.** Дивергентные формулы (законы сохранения) в дифференциальной геометрии плоских кривых и их приложения // ДАН. — 2011. — Т. 441, № 3. — С. 313–317. Перевод: Megrabov A.G. Divergence formulas (conservation laws) in the differential geometry of plane curves and their applications // Dokl. Math. — 2011. — Vol. 84, № 3. — P. 857–861.
7. **Megrabov A.G.** Conservation laws in differential geometry of plane curves and for eikonal equation and inverse problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. — 2013. — Vol. 21, № 5. — P. 601–628.
8. **Megrabov A.G.** On some formulas for families of curves and surfaces and Aminov's divergent representations // Lobachevskii J. Math. — 2018. — Vol. 39, № 1. — P. 114–120.
9. **Megrabov A.G.** Relationships between the characteristics of mutually orthogonal families of curves and surfaces // Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Mathematical Modeling in Geophysics. — Novosibirsk, 2016. — Iss. 19. — P. 43–50.
10. **Megrabov A.G.** On the conservation laws for a family of surfaces // Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Mathematical Modeling in Geophysics. — Novosibirsk, 2016. — Iss. 19. — P. 51–58.
11. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
12. **Grebenev V.N., Medvedev S.B**. Hamiltonian structure and conservation laws of two-dimensional linear elasticity theory // Z. Angew. Math. Mech. — 2016. — DOI:10.1002/zamm201500090.
13. **Chirkunov Yu.A., Medvedev S.B.** Conservation laws for plane steady potential barotropic flow // European J. Appl. Math. — 2013. — Vol. 24, № 6. — P. 789–801.
14. **Киряков П.П., Сенашов С.И., Яхно А.Н.** Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
15. **Годунов С.К., Роменский Е.И.** Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
16. **Дородницын В.А.** Конечно-разностный аналог теоремы Нетер // ДАН. — 1993. — Т. 328, № 6. — С. 678–682.
17. **Коновалов А.Н.** Дискретные модели в динамической задаче линейной теории упругости и законы сохранения // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 7. — С. 990–996.
18. **Бюшгенс С.С.** Дифференциальная геометрия. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
19. **Новиков С.П., Тайманов И.А.** Современные геометрические структуры и поля. — М.: Изд-во МЦНМО, 2005.
20. **Кочин Н.Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — Л.-М.: ГОНТИ, 1938.
21. **Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.** Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1978.
22. **Аминов Ю.А.** Геометрия векторного поля. — М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию 26 сентября 2018 г.
После исправления 13 ноября 2018 г.
Принята к печати 25 июля 2019 г.

Литература в транслитерации

1. **Megrabov A.G.** O nekotorom gruppovom podkhode k obratnym zadacham dlya differencial'nykh uravneniy // Dokl. AN SSSR. — 1984. — T. 275, № 3. — S. 583–586.
2. **Megrabov A.G.** Ob odnom differencial'nom tozhdestve // DAN. — 2004. — T. 395, № 2. — S. 174–177. Perevod: Megrabov A.G. On one differential identity // Dokl. Math. — 2004. — Vol. 69, № 2. — P. 282–285.

3. **Megrabov A.G.** Differencial'nye tozhdestva, svyazyvayuschie laplasian skalyarnoy funkcii, modul' ee gradienta i ugol ego napravleniya // DAN. — 2009. — T. 424, № 5. — S. 599–603. Perevod: Megrabov A.G. Differential identities relating the Laplacian, the modulus of gradient, and the gradient directional angle of a scalar function // Dokl. Math. — 2009. — Vol. 79, № 1. — P. 136–140.

4. **Megrabov A.G.** Differencial'nye tozhdestva, svyazyvayuschie modul' i napravlenie vektornogo polya, i gidrodinamicheskie uravneniya Eylera // DAN. — 2010. — T. 433, № 3. — S. 309–313. Perevod: Megrabov A.G. Differential identities relating the modulus and direction of a vector field and Euler's hydrodynamic equations // Dokl. Math. — 2010. — Vol. 82, № 1. — P. 625–629.

5. **Megrabov A.G.** Nekotorye differencial'nye tozhdestva i ikh prilozheniya k uravneniyu eykonala // DAN. — 2010. — T. 433, № 4. — S. 461–465. Perevod: Megrabov A.G. Some differential identities and their applications to the eikonal equation // Dokl. Math. — 2010. — Vol. 82, № 1. — P. 638–642.

6. **Megrabov A.G.** Divergentnye formuly (zakony sokhraneniya) v differencial'noy geometrii ploskikh krivykh i ikh prilozheniya // DAN. — 2011. — T. 441, № 3. — S. 313–317. Perevod: Megrabov A.G. Divergence formulas (conservation laws) in the differential geometry of plane curves and their applications // Dokl. Math. — 2011. — Vol. 84, № 3. — P. 857–861.

7. **Megrabov A.G.** Conservation laws in differential geometry of plane curves and for eikonal equation and inverse problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. — 2013. — Vol. 21, № 5. — P. 601–628.

8. **Megrabov A.G.** On some formulas for families of curves and surfaces and Aminov's divergent representations // Lobachevskii J. Math. — 2018. — Vol. 39, № 1. — P. 114–120.

9. **Megrabov A.G.** Relationships between the characteristics of mutually orthogonal families of curves and surfaces // Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Mathematical Modeling in Geophysics. — Novosibirsk, 2016. — Iss. 19. — P. 43–50.

10. **Megrabov A.G.** On the conservation laws for a family of surfaces // Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Mathematical Modeling in Geophysics. — Novosibirsk, 2016. — Iss. 19. — P. 51–58.

11. **Ovsyannikov L.V.** Gruppovoy analiz differencial'nykh uravneniy. — M.: Nauka, 1978.

12. **Grebenev V.N., Medvedev S.B.** Hamiltonian structure and conservation laws of two-dimensional linear elasticity theory // Z. Angew. Math. Mech. — 2016. — DOI:10.1002/zamm201500090.

13. **Chirkunov Yu.A., Medvedev S.B.** Conservation laws for plane steady potential barotropic flow // European J. Appl. Math. — 2013. — Vol. 24, № 6. — P. 789–801.

14. **Kiryakov P.P., Senashov S.I., Yakhno A.N.** Prilozhenie simmetriy i zakonov sokhraneniya k resheniyu differencial'nykh uravneniy. — Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2001.

15. **Godunov S.K., Romenskiy E.I.** Elementy mekhaniki sploshnykh sred i zakony sokhraneniya. — Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1998.

16. **Dorodnicyn V.A.** Konechno-raznostnyy analog teoremy Neter // DAN. — 1993. — T. 328, № 6. — S. 678–682.

17. **Konovalov A.N.** Diskretnye modeli v dinamicheskoy zadache lineynoy teorii uprugosti i zakony sokhraneniya // Differencial'nye uravneniya. — 2012. — T. 48, № 7. — S. 990–996.

18. **Byushgens S.S.** Differencial'naya geometriya. — M.: Izd-vo LKI, 2008.

19. **Novikov S.P., Taymanov I.A.** Sovremennye geometricheskie struktury i polya. — M.: Izd-vo MCNMO, 2005.

20. **Kochin N.E.** Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya. — L.-M.: GONTI, 1938.

21. **Rozhdestvenskiy B.L., Yanenko N.N.** Sistemy kvazilineynykh uravneniy. — M.: Nauka, 1978.

22. **Aminov Yu.A.** Geometriya vektornogo polya. — M.: Nauka, 1990.