3. Сгурова И. В., Сухарев В. А. Генерация внутренних волн локальными возмущениями в жидкости с заданным изменением плотности по глубине // Изв. АН СССР. ФАО.— 1981.— Т. 17, № 6.
4. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я. Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Там же.— 1984.— Т. 20, № 6.
5. Hudimac A. A. Ship waves in a stratified ocean // J. Fluid Mech.— 1961.— V. 11, N 2.
6. Crapper G. D. Ship waves in a stratified ocean // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 29, N 4.
7. Филимонова Л. Д., Черкесов Л. В. Внутренние волны, генерируемые движущимися возмущениями // Морские гидрофизические исследования.— Севастополь, 1977.— № 1.
8. Федосенко В. С., Черкесов Л. В. Развитие корабельных волн в неоднородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1970.— № 4.
9. Федосенко В. С., Черкесов Л. В. Неустановившиеся волны в неоднородной жидкости конечной глубины // Морские гидрофизические исследования.— Севастополь, 1972.— № 2.
10. Санников В. Ф. Установившиеся внутренние волны, генерируемые локальным источником возмущений в потоке // Моделирование поверхностных и внутренних волн.— Севастополь, 1984.
11. Букреев В. И., Гусев А. В. Волны, генерируемые движением сферы и овоида в двухслойной жидкости // Тр. Всесоюз. совещ. «Волновые процессы в морях и океанах».— Севастополь, 1983.— М., 1984.— Деп. в ВИНИТИ 9.01.84, № 281—84.
12. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика.— М.: ГИТТЛ, 1955.— Ч. 1.

Поступила 17/II 1986 г.

УДК 532.593

ЗАДАЧА КОШИ РАССЕЯНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ

С. П. Буданов, А. С. Тибилов, В. А. Яковлев

(*Ленинград*)

В [1] в линейной постановке рассмотрена стационарная задача рассеяния внутренних волн (ВВ) на неоднородности поля плотности в безграничной среде с постоянной частотой Вяйсяля — Брента; показана важная роль данного механизма в перераспределении энергии ВВ между различными модами; определены области, в которых амплитуда рассеянных ВВ существенно отлична от нуля. В настоящей работе обсуждается соответствующая нестационарная задача.

Пусть в среде существуют ВВ, характеризующиеся полями плотности $\rho_ф(r, t)$ и скорости $U_ф(r, t)$. В момент времени $t = 0$ в области пространства D_1 происходит локальное «перемешивание» (нарушение распределения полей $\rho_ф$ и $U_ф$) среды. В приближении Буссинеска в пренебрежении вращением Земли и силами вязкости эта нестационарная задача имеет вид

$$L_U\{\rho, \mathbf{U}\} = Q(\mathbf{U}), \quad \mathbf{U}|_{t=0} = \begin{cases} \mathbf{U}_ф, & \mathbf{r} \notin D_1, \\ \mathbf{U}_н, & \mathbf{r} \in D_1, \end{cases} \tag{1}$$

$$L_\rho\{\rho, \mathbf{U}\} = \varphi(\rho, \mathbf{U}), \quad \rho|_{t=0} = \begin{cases} \rho_ф, & \mathbf{r} \notin D_1, \\ \rho_н, & \mathbf{r} \in D_1, \end{cases}$$

где $L_U \equiv \frac{\partial}{\partial t}\Delta\mathbf{U} + \frac{g}{\rho_0}\left[\mathbf{k}\Delta\rho - \nabla\frac{\partial\rho}{\partial z}\right]$; $L_\rho \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\rho_0}{g}N^2 w$; $\varphi(\rho, \mathbf{U}) \equiv -\mathbf{U}\nabla\rho$; $Q(\mathbf{U}) \equiv -\operatorname{rot}\operatorname{rot}[(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U}]$.

Решение системы (1) может быть представлено суммой двух слагаемых, одно из которых описывает задачу коллапса зоны интрузии в стратифицированной жидкости, а другое — взаимодействие фоновых ВВ с этой зоной. Задача коллапса хорошо исследована (см., например, [2]). Известно [3], что решение задачи коллапса с учетом вязкости при больших временах (третья стадия коллапса) представляет собой неоднородность поля плотности в виде пятна перемешанной жидкости, которое живет довольно долго, чрезвычайно медленно расплываясь на уровне своей плотности. Предположим, что геометрические размеры области D_1 и степень перемешанности жидкости в ней таковы, что заключительная стадия коллапса наступает достаточно быстро. Тогда, следуя [1], будем считать, что возникшая область D представляет собой неоднородность поля плотности, не меняющуюся во времени и покоящуюся. Поэтому задачу взаимодействия фоновых ВВ с областью D можно рассматривать как задачу рассеяния фоновых ВВ на неоднородности поля плотности $\rho_{н0}$ с начальными условиями. Ее решение также может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, одно из которых описывает поле невозмущенных ВВ (его считаем известным), а другое — собственно рассеянное поле, характеризующееся скоростью $\mathbf{U}_р(\mathbf{r}, t)$ и плотностью $\rho_р(\mathbf{r}, t)$, причем $\mathbf{U}_р|_{t=0} = 0$ и $\rho_р|_{t=0} = 0$. В настоящей работе, как и в [1], ограничимся приближением однократного рассеяния (борновское приближение), в рамках которого $\mathbf{U}_р$ и $\rho_р$ удовлетворяют краевой задаче

$$L_U\{\rho_р, \mathbf{U}_р\} = 0, \quad L_\rho\{\rho_р, \mathbf{U}_р\} = \varphi(\rho_{н0}, \mathbf{U}_ф), \quad \rho_р, \mathbf{U}_р|_{|\mathbf{r}|\to} \to 0. \tag{2}$$

Как и прежде [1], в качестве необходимого условия применимости борновского приближения можно рассмотреть требование малости максимума по пространству и времени амплитуды рассеянного поля по сравнению с амплитудой падающей волны. Например, для достаточно больших времен это условие совпадает с соответствующими условиями для стационарного решения [1]. В общем случае произвольных времен вывод конструктивных ограничений на параметры задачи (степень перемешанности, размеры и форма рассеивающего объема и т. п.) затруднителен в силу сложности выражения для $\mathbf{U}_р(\rho_р)$. Этот вопрос должен стать предметом отдельного исследования и в настоящей работе не затрагивается. Таким образом, предполагая далее справедливым приближение однократного рассеяния, для вертикальной составляющей поля скорости из (2) имеем задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w_р + N^2\Delta_h w_р = -N^2\Delta_h(\mathbf{U}_ф\cdot\boldsymbol{\beta}),$$

$$w_р|_{t=0} = \left.\frac{\partial w_р}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad \boldsymbol{\beta}(r) \equiv -\frac{g}{\rho_0}\frac{\nabla\rho_{г0}}{N^2},$$

решение которой может быть выражено через функцию Грина:

$$w_р(\mathbf{r}, t) = -N^2\int_0^t dt'\int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')\,\Delta_h[\mathbf{U}_ф(\mathbf{r}', t')\,\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}')]$$

($G(\mathbf{r}, t)$ — функция Грина оператора внутренних волн [4]). При этом пространственный спектр

$$\tilde{w}_р(\boldsymbol{\Lambda}, t) = \frac{\varkappa^2N^2}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{\Lambda}'\int dt'\tilde{\mathbf{U}}_ф(\boldsymbol{\Lambda}', t')\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}')\tilde{G}(\boldsymbol{\Lambda}, t-t'), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\Lambda} = \{\boldsymbol{\varkappa}, \alpha\}$ — вектор волновых чисел; $\tilde{M}$ — фурье-преобразование функции $M(\mathbf{r}, t)$ по пространственным переменным.

Для дальнейшего анализа, следуя [1], сделаем ряд допущений, упрощающих выкладки, но вместе с тем сохраняющих общность, достаточную для многих приложений:

1) первичное поле представляет собой плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в отрицательном направлении осей координат под углом $0 < \alpha_0 < \pi/2$ к горизонтальной плоскости, т. е.

$$\mathbf{U}_ф(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\Lambda}_0\exp\{i[\mathbf{k}\boldsymbol{\rho} + lz + \omega_0 t]\}, \quad \omega_0 = \frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}N \equiv N\cos\alpha_0;$$

2) $\boldsymbol{\beta}(r) = \boldsymbol{\beta}_0 f(\mathbf{r}), \quad f(\mathbf{r}) = \begin{cases}1, & \mathbf{r}\in D,\\ 0, & \mathbf{r}\notin D,\end{cases} \quad \boldsymbol{\beta}_0 = \mathrm{const}.$

При сделанных выше предположениях выражение (3) упрощается:

$$\widetilde{w}_р(\mathbf{\Lambda}, t) = \Phi(\mathbf{\Lambda}) \frac{\theta(t)}{\left(\frac{\varkappa}{\Lambda} N\right)^2 - \omega_0^2} \left[\frac{\varkappa}{\Lambda} N e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 \sin\left(\frac{\varkappa}{\Lambda} Nt\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\varkappa}{\Lambda} N \cos\left(\frac{\varkappa}{\Lambda} Nt\right)\right],$$

$$\Phi(\mathbf{\Lambda}) = -\frac{\varkappa}{\Lambda} N(\mathbf{A}_0 \cdot \beta_0) \widetilde{f}(\mathbf{k} + \varkappa, l + \alpha), \quad \theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

При выводе этой формулы использовались соотношения

$$\widetilde{G}(\mathbf{\Lambda}, t) = -\theta(t) \frac{\sin\left(\frac{\varkappa}{\Lambda} Nt\right)}{\varkappa \Lambda N},$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}_ф(\mathbf{\Lambda}, t) = (2\pi)^3 \mathbf{A}_0 \delta(\mathbf{k} + \varkappa) \delta(l + \alpha)$$

($\delta(\mathbf{x})$ — дельта-функция Дирака).

Из второго уравнения системы (2) легко вычислить изменение плотности $\rho_р(\mathbf{r}, t)$, связанное с рассеянием:

$$(4) \quad \widetilde{\rho}_р(\mathbf{\Lambda}, t) = \frac{\rho_0}{g} N^2 \Phi(\mathbf{\Lambda}) \frac{\theta(t)}{\left(\frac{\varkappa}{\Lambda} N\right)^2 - \omega_0^2} \left\{\frac{i\omega_0}{\frac{\varkappa}{\Lambda} N} \left[\cos\left(\frac{\varkappa}{\Lambda} Nt\right) - e^{i\omega_0 t}\right] - \right.$$

$$\left. - \sin\left(\frac{\varkappa}{\Lambda} Nt\right)\right\}.$$

Из выражения (4) видно, что эволюция рассеянного поля во времени обусловлена движениями двух типов, в чем легко убедиться, взяв фурье-преобразование по времени от выражения (4). Во-первых, это набор плоских волн с обычным дисперсионным соотношением $\omega = \pm N\varkappa/\Lambda$ (сходящиеся и расходящиеся волны), во-вторых, движения в отсутствие дисперсионного соотношения («неволновой шум»).

Рассмотрим более подробно двумерный пространственный спектр поля плотности $\widetilde{\rho}_р(\varkappa, z, t)$ на различных горизонтах z. Для этого конкретизируем вид области D. Пусть $f(\mathbf{r}) = f_1(\rho)\,\theta(L - |z|)$. Так как обратное фурье-преобразование по α от $\widetilde{\rho}_р(\mathbf{\Lambda}, t)$ довольно громоздко, ограничимся при анализе двумерного спектра $\widetilde{\rho}_р(\varkappa, z, t)$ двумя предельными случаями: $Nt \ll 1$ и $\gg 1$.

Для достаточно малых времен главный член разложения двумерного спектра $\widetilde{\rho}_р(\varkappa, z, t)$ по параметру $Nt \ll 1$ имеет вид

$$\widetilde{\rho}_р(\varkappa, z, t) = -6P(\varkappa)\,\theta(L - |z|)\, e^{ilz} Nt \left[1 + \frac{i}{2} \frac{\omega_0}{N} (Nt) - \frac{1}{6} \left(\frac{\omega_0}{N}\right)^2 (Nt)^2\right] +$$

$$+ P(\varkappa) \frac{(Nt)^3 \varkappa}{\varkappa^2 + l^2} \left\{\theta(|z| - L)\, e^{-|z|\varkappa} [\theta(z)\, \beta_1 \sin(L\beta_2) + \theta(-z)\, \beta_2 \sin(L\beta_1)] + \right.$$

$$\left. + \theta(L - |z|) \left[\varkappa e^{ilz} - \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{2} (-1)^m \beta_m e^{(-1)^m (z\varkappa + L\beta_{3-m})}\right]\right\},$$

где $P(\varkappa) = -\frac{\rho_0}{6g} N(\mathbf{A}_0 \beta_0) \widetilde{f}_1(\varkappa + \mathbf{k})$; $\beta_{1,2} = l \pm i\varkappa$.

Из полученного выражения видно, что при малых временах возмущение возникает сразу во всем пространстве (следствие приближения несжимаемости жидкости) и растет пропорционально $(Nt)^3$ вне области неоднородности. Амплитуда спектра максимальна в слое, занятом неоднородностью, а выше и ниже этого слоя убывает по экспоненциальному закону и тем быстрее, чем больше горизонтальное волновое число. Максимум по направлению $\varkappa$ в общем случае не совпадает с направлением вектора $\mathbf{k}$.

Для анализа $\tilde{\rho}_p(\varkappa, z, t)$ при больших временах воспользуемся методом стационарной фазы по большому параметру $Nt \gg 1$. Согласно этому методу, основной вклад в $\tilde{\rho}_p(\varkappa, z, t)$ будут давать полюсы подынтегральной функции и точки стационарной фазы. Поэтому асимптотику функции $\tilde{\rho}_p(\varkappa, z, t)$ при больших временах удобно разбить на два слагаемых: $\tilde{\rho}_1(\varkappa, z, t)$ (вклад от полюсов) и $\tilde{\rho}_2(\varkappa, z, t)$ (вклад от стационарных точек):

$$\tilde{\rho}_p(\varkappa, z, t) = \tilde{\rho}_1(\varkappa, z, t) + \tilde{\rho}_2(\varkappa, z, t),$$

где

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{6}{\varkappa_0} P(\varkappa)\, e^{i\omega_0 t} \varkappa \Big\{ -\theta(|z| - L)\,\theta(\varkappa_0 - b\varkappa)\, e^{ilz} \times$$

$$\times \left[\theta(z) \frac{\sin(L\eta_1)}{\eta_1} e^{-iz\eta_1} + \theta(-z) \frac{\sin(L\eta_2)}{\eta_2} e^{-iz\eta_2} \right] +$$

$$+ \theta(L - |z|) \Bigg[\theta(\varkappa b - \varkappa_0)\,\mathrm{sgn}(z) \sum_{m=1}^{2} (-1)^m \frac{\sin\left(\frac{\eta_{3-m}}{2}(L - |z|)\right)}{\eta_{3-m}} \times$$

$$\times e^{\frac{i}{2}(|z|\eta_m + L\eta_{3-m})\,\mathrm{sgn}(z)} - \theta(\varkappa_0 - \varkappa b) \sum_{m=1}^{2} \frac{\sin\left(\frac{\eta_m}{2}(L - (-1)^m z)\right)}{\eta_m} \times$$

$$\times e^{\frac{i}{2}(z\eta_{3-m} + (-1)^m L\eta_m)} \Bigg] \Big\} + i\left(\frac{\omega_0}{N}\right)^2 \frac{6}{\varkappa_0} P(\varkappa)\,\mathrm{tg}\,\alpha_0\,\theta(L - |z|)\, e^{i(lz + \omega_0 t)};$$

$$b \equiv \frac{|z|}{Nt}; \quad \eta_{1,2} \equiv l \mp \varkappa\,\mathrm{tg}\,\alpha_0; \quad \varkappa_0 \equiv \left(\frac{\omega_0}{N}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{N}\right)^2};$$

$$\tilde{\rho}_2 = \frac{6}{\pi} P(\varkappa) \left(\frac{N}{\omega_0}\right)^2 i \sqrt{\frac{\pi}{2Nt}}\, \varkappa (\varkappa b)^{-3/4} \sum_{k=1}^{2} \frac{(c_k)^{9/4}}{\left[\varkappa b \left(\frac{N}{\omega_0}\right)^2 - c_k\right] \sqrt{|3\varkappa b - 2c_k|}} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{2} \left\{ \left[\theta(z) \frac{\sin\left(L\left(l + (-1)^m \alpha_k\right)\right)}{l + (-1)^m \alpha_k} + \theta(-z) \frac{\sin\left(L\left(l - (-1)^m \alpha_k\right)\right)}{l - (-1)^m \alpha_k} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{\omega_0}{N} - (-1)^m \sqrt{\frac{\varkappa b}{c_k}} \right] \right\} e^{(-1)^{m-1} i S(\alpha_k)};$$

$$b = \mathrm{const}; \quad \varkappa b \neq \varkappa_0; \quad \alpha_k^2 = \frac{\varkappa}{b}(c_k - \varkappa b); \quad \cos\gamma = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \varkappa b;$$

$$c_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\frac{\gamma}{3}; \quad c_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\gamma + \pi}{3}\right); \quad S(\alpha_k) = \sqrt{\frac{\varkappa b}{c_k}}\, Nt +$$

$$+ |z|\alpha_k - (-1)^k \frac{\pi}{4}.$$

Из полученного выражения видно, что при больших временах, когда $|\tilde{\rho}_1| \gg |\tilde{\rho}_2|$, частота рассеянного поля стремится к частоте падающего поля. Максимум спектра при этом приходится на $\varkappa \approx k$, а по направлению распространения соответствует углам $\psi = \pm\alpha_0$, $\psi = \pm\alpha_0 + \pi$. При дальнейшем росте времени максимум спектра обостряется и функция $\tilde{\rho}_p(\varkappa, z, t)$ стремится к стационарному решению задачи [1]. Спектр в каждый момент времени на заданном горизонте ограничен сверху, и его верхняя граница увеличивается с ростом времени (т. е. с ростом времени все более короткие волны приходят на заданный горизонт). В слое же, занятом неоднородностью, сразу существует весь набор горизонтальных волновых чисел. Появление в асимптотике спектра слагаемого $\tilde{\rho}_2$ обусловлено исключительно наличием начальных условий. Благодаря этому слагаемому спектр рассеянного поля сложным образом зависит от времени. При этом с течением времени для данного волнового числа (данной длины волны) частота осцилляций слагаемого $\tilde{\rho}_2$ непрерывно изменяется, образуя две группы волн с частотами $\sim N$ и $\sim N\sqrt{\varkappa b}$. Обе эти группы волн убывают с ростом t и $\varkappa$, причем колебания с частотами $\omega \sim N\sqrt{\varkappa b}$ «вымирают» медленнее со временем, чем с частотами $\omega \sim N$. Интересно отметить, что при $\omega \sim N\sqrt{\varkappa b}$ вертикальное волновое число $\alpha \approx \sqrt{\varkappa/b}$ и может быть достаточно большим. Это обстоятельство, по-видимому, можно связать с механизмом возникновения долгоживущей тонкой вертикальной структуры: под воздействием рассеянных волн происходит ее формирование, причем с ростом времени тонкая вертикальная структура образуется на все более высоких (низких) горизонтах.

Итак, картина рассеяния ВВ на неоднородности поля плотности представляется следующим образом (для определенности будем говорить о параметрах поля плотности). В момент появления неоднородности в среде возникают возмущения поля плотности, экспоненциально затухающие с расстоянием от рассеивающего объема. Вдали от неоднородности амплитуда возмущения изотропна в пространстве и возрастает пропорционально $(Nt)^3$. С течением времени рассеянное поле приобретает волновой характер, причем на данном горизонте появляются сначала длинноволновые колебания, а затем его достигают все более короткие волны. Двумерный пространственный спектр поля плотности непрерывно деформируется: амплитуда колебаний затухает во времени, а их распределение в пространстве становится анизотропным, сосредоточиваясь с ростом Nt вблизи направлений $\psi \approx \pm\alpha_0$ и $\psi \approx \pm\alpha_0 + \pi$. В пределе при $Nt \to \infty$ рассеянное поле выходит на стационарный режим. Его амплитуда существенно отлична от нуля вблизи направлений ψ и убывает с расстоянием от неоднородности. Зависимость от времени при этом имеет вид $e^{i\omega_0 t}$ («стоячая» волна).

Таким образом, нестационарное решение задачи рассеяния ВВ на локализованной неоднородности поля плотности дало возможность проследить перераспределение энергии по спектру ВВ во времени и тем самым расширило по сравнению с [1] представление об этом механизме. К сожалению, более детальное исследование нестационарного решения даже в предложенной нами простейшей постановке невозможно в силу необозримости возникающих выкладок. Поэтому дальнейший аналитический анализ как стационарного, так и нестационарного решения задачи рассеяния ВВ в рамках рассмотренной модели, на наш взгляд, нецелесообразен. Наиболее перспективным путем выяснения «геометрии» рассеянного поля и его эволюции во времени является переход к расчетам на ЭВМ с использованием полученных асимптотических выражений. Подобные расчеты помогут перейти к постановке и решению одной из наиболее интересных задач, связанных с рассеянием ВВ: выяснение зон увеличения локальной неустойчивости ВВ и их вырождения в турбулентность. При этом важный теоретический аспект решения задачи — включение в рассмотренную нами модель вязкости и учет пространственной изменчивости частоты Вяйсяля — Брента (учет тонкой структуры).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Буданов С. П., Тибилов А С., Яковлев В. А.** Борновское приближение решения задачи рассеяния внутренних волн // ПМТФ.— 1984.— № 2.
2. **Mei C. C.** Collapse of a homogeneous fluid mass in a stratified fluid // Applied Mechanics: Proc. 12 th Intern. Congr., Stanford Univ., 1968.— Berlin e. a., 1969.— P. 321.
3. **Зацепин А. Г.** О коллапсе стратифицированных пятен // ДАН СССР.— 1982.— Т. 265, № 2.
4. **Буданов С. П., Григорьев П. Л., Яковлев В. А.** Об одном представлении фундаментального решения уравнения внутренних волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1985.— № 5.

Поступила 19/II 1986 г.