штриховая — эксперимент). Принято $v \approx 1$ м/с (из эксперимента), $\xi \ll 1$ (нулевой расход), $n = 10$ в (3.3). Теоретическая и экспериментальная кривые построены при $\bar{\sigma} \approx 5 \cdot 10^{-9}$ 1/(Ом·м), поэтому с учетом (1.6) $\bar{\beta} = \bar{\sigma}/\varepsilon\varepsilon_0 \approx 200$ Гц.

Качественная теоретическая картина резонанса совпадает с экспериментальной. Относительная погрешность формулы (3.1) в районе резонанса для рассмотренных случаев не превышает 20 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бумагин Г. И., Авдеев Н. П., Дудов А. Ф., Борисов В. А.** Исследование ступени ионно-конвекционного насоса с питанием короны пульсирующим напряжением // Энергетика.— 1984.— № 11.
2. **Ватажин А. В., Любимов Г. А., Регирер С. А.** Магнитогидродинамические течения в каналах.— М.: Наука, 1970.
3. **Рубашов И. Б., Бортников Ю. С.** Электрогазодинамика.— М.: Атомиздат, 1971.
4. **Капцов Н. А.** Электроника.— М.: Гостехиздат, 1956.
5. **Остроумов Г. А.** Взаимодействие электрических и гидродинамических полей.— М.: Наука, 1979.
6. **Митропольский Ю. А.** Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1971.
7. **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний.— М.: Мир, 1984.
8. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Уравнения в частных производных математической физики.— М.: Высш. шк., 1970.

г. Омск *Поступила 15/I 1988 г., в окончательном варианте — 9/IX 1988 г.*

УДК 533.539

С. В. Жлуктов, И. А. Соколова, Г. А. Тирский

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЧАСТИЧНО ДИССОЦИИРОВАННОГО И ИОНИЗОВАННОГО ВОЗДУХА

При решении задач физико-химической гидродинамики, в частности задач сверхзвуковой аэродинамики и теплообмена, простой и достаточно точный расчет коэффициентов переноса (коэффициентов вязкости и теплопроводности для смесей газов и плазмы) в широком диапазоне температур и давлений приобретает практически важное значение. Дело в том, что формулы строгой кинетической теории газов для коэффициентов переноса [1—3], выведенные в асимптотическом пределе малых чисел Кнудсена, несмотря на существенное их упрощение, полученное в [2], остаются достаточно сложными для решения конкретных гидродинамических задач. Эти формулы представляются в виде отношения определителей порядка $N\xi$, где N — число компонентов смеси, ξ — число приближений (число членов в разложении искомых коэффициентов переноса по полиномам Сонина [2]). Это приводит к тому, что при решении, например, задач обтекания расчет коэффициентов переноса с использованием этих формул занимает бо́льшую часть времени, чем время численного решения самих дифференциальных уравнений [4]. Поэтому практически все расчеты коэффициентов переноса в задачах течения многокомпонентных смесей газов и плазмы проводятся с использованием различных приближенных формул. Расчеты только одних коэффициентов переноса по строгим формулам кинетической теории газов в первых отличных от нуля приближениях [1] при постоянных заданных концентрациях элементов без решения каких-либо задач в [5] были проведены для вязкости и теплопроводности H_2—He смеси (атмосфера Юпитера), в [6] — для вязкости и теплопроводности воздуха (атмосфера Земли), в [7] — для вязкости CO_2—N_2 смеси (атмосфера Венеры). В [8] впервые вычислены все равновесные коэффициенты переноса для частично диссоциированного и ионизованного воздуха по формулам [2, 9] до четвертого приближения включительно.

Вычисление коэффициентов переноса по точным формулам кинетической теории газов связано с необходимостью знания интегралов столкновений между различными компонентами смеси. Каждое взаимодействие требует знания потенциальной функции взаимодействия. И для N-компонентной смеси потребуется $(1/2)N(N+1)$ потенциальных функций. Имеющийся разброс данных по потенциалам взаимодействия частиц [10, 11] в области развитой ионизации приводит к неопределенности в значении эффективного равновесного коэффициента теплопроводности до 30 %, неопределенность в значении коэффициента вязкости такого же порядка [12, 13]. В то же время погрешность в коэффициентах переноса слабо влияет на точность вычисления интегральных аэродинамических и тепловых характеристик. Так, при решении задачи сверхзвукового обтекания сферы химически и ионизационно равновесным воздухом в рамках полных уравнений вязкого ударного слоя неопределенность в коэффициентах переноса приводит к неопределенности в 5—10 раз меньше в значении конвективного потока тепла к телу [13]. Таким образом, есть основание полагать, что при вычислении коэффициентов переноса замена точных расчетов приближенными не приведет к существенной неопределенности в интегральных характеристиках течения. Все сказанное не оставляет сомнений в целесообразности и практической необходимости получения простых приближенных формул для коэффициентов переноса смесей газов и плазмы.

В литературе был предложен целый ряд приближенных формул для коэффициентов вязкости [13—19] и теплопроводности [19—24]. В задачах теплообмена наиболее широко используются формула Уилки [16] для вязкости и формула Мэйсона и Саксены [21] для теплопроводности. Однако точность этих формул становится неудовлетворительной при появлении в смеси ионизованных компонентов [25]. В связи с этим в [26, 27] на основе численных расчетов [6] предложены новые приближенные формулы для коэффициентов вязкости и теплопроводности, которые улучшают формулы [16, 21] в области ионизации, но дают заметную погрешность в сравнении с данными [6], которые, в свою очередь, отличаются от точных данных [8] примерно на 15 % для вязкости и на $\sim$60 % для теплопроводности.

В настоящей работе на основе выражений для коэффициентов вязкости и теплопроводности в первых ненулевых приближениях (см. (1.1), (1.2)), в которых далее отбрасываются недиагональные элементы, и точных выражений для ионной вязкости и электронной теплопроводности в пределе полной ионизации выводятся приближенные формулы для коэффициентов вязкости и транспортной теплопроводности (обусловленной поступательными степенями свободы компонентов) частично диссоциированного и ионизованного воздуха, дающие хорошее согласие с результатами точных расчетов с учетом высших приближений [8].

1. Рассмотрим точные выражения для коэффициентов вязкости и транспортной теплопроводности в первом ненулевом приближении (при отыскании коэффициентов переноса в виде рядов по полиномам Сонина) [1]:

$$\mu(1) = -\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_N \\ x_1 & H_{11} & \dots & H_{1N} \\ x_2 & H_{21} & \dots & H_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_N & H_{N1} & \dots & H_{NN} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \dots & H_{NN} \end{vmatrix}; \tag{1.1}$$

$$\lambda(2) = 4\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_N \\ x_1 & L_{11} & \dots & L_{1N} \\ x_2 & L_{21} & \dots & L_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_N & L_{N1} & \dots & L_{NN} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ L_{N1} & L_{N2} & \dots & L_{NN} \end{vmatrix}, \tag{1.2}$$

где

$$H_{ii} = \frac{x_i^2}{\mu_i} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \frac{2x_i x_k}{\mu_{ik}} \frac{m_i m_k}{(m_i+m_k)^2}\left(\frac{5}{3A_{ik}^*} + \frac{m_k}{m_i}\right); \tag{1.3}$$

$$H_{ij} = -\frac{2x_i x_j}{\mu_{ij}} \frac{m_i m_j}{(m_i+m_j)^2}\left(\frac{5}{3A_{ij}^*} - 1\right) \quad (i \neq j); \tag{1.4}$$

$$L_{ii} = -\frac{4x_i^2}{\lambda_i} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \frac{2x_i x_k}{\lambda_{ik}} \frac{\frac{15}{2}m_i^2 + \frac{25}{4}m_k^2 - 3m_k^2 B_{ik}^* + 4m_i m_k A_{ik}^*}{(m_i+m_k)^2 A_{ik}^*}; \tag{1.5}$$

$$L_{ij} = \frac{2x_i x_j}{\lambda_{ij}} \frac{m_i m_j}{(m_i+m_j)^2}\left(\frac{55}{4A_{ij}^*} - 3\frac{B_{ij}^*}{A_{ij}^*} - 4\right) \quad (i \neq j); \tag{1.6}$$

$$\mu_i = \frac{8{,}387\cdot 10^{-6}\sqrt{Tm_i}}{Q_{ii}^{(2,2)}}, \quad \mu_{ij} = \frac{8{,}387\cdot 10^{-6}}{Q_{ij}^{(2,2)}}\sqrt{\frac{2m_i m_j T}{m_i+m_j}}; \tag{1.7}$$

(1.8) $$\lambda_i = \frac{0{,}2615\sqrt{T/m_i}}{Q_{ii}^{(2,2)}}, \quad \lambda_{ij} = \frac{0{,}2615}{Q_{ij}^{(2,2)}}\sqrt{\frac{(m_i+m_j)T}{2m_im_j}};$$

(1.9) $$Q_{ij}^{(l,s)} = \pi\sigma_{ij}^2\Omega_{ij}^{(l,s)*};$$

(1.10) $$A_{ij}^* = \frac{\Omega_{ij}^{(2,2)*}}{\Omega_{ij}^{(1,1)*}} = \frac{Q_{ij}^{(2,2)}}{Q_{ij}^{(1,1)}};$$

(1.11) $$B_{ij}^* = \frac{5\Omega_{ij}^{(1,2)*} - 4\Omega_{ij}^{(1,3)*}}{\Omega_{ij}^{(1,1)*}}.$$

Здесь m_i и x_i — молярные массы и концентрации компонентов; μ_i (Па·с) и λ_i (Вт/мК)— коэффициенты вязкости и теплопроводности чистого i-го компонента; μ_{ij} (Па·с) и λ_{ij} (Вт/мК)— вспомогательные коэффициенты вязкости и теплопроводности, являющиеся аналогами бинарных коэффициентов диффузии; $\Omega_{ij}^{(l,s)*}$ — относительные интегралы столкновений порядка (l, s), определяющие отличие какой-либо модели взаимодействия частиц от идеализированной модели твердых сфер [1]; σ_{ij} — диаметр газокинетического i — j-столкновения.

Для смесей нейтральных одноатомных газов с молярными массами одного порядка учет только низших приближений в разложении по полиномам Сонина при температурах выше комнатной и ниже температуры диссоциации приводит к ошибке, как правило, не более $\sim 0{,}3$ % для коэффициента вязкости и $\sim 0{,}5$ % для коэффициента теплопроводности.

Как следует из расчетов по точным формулам кинетической теории газов с учетом высших приближений для диссоциированного и частично ионизованного воздуха ($x_E \leqslant 0{,}4$), коэффициент вязкости $\mu(\xi)$ с погрешностью ~ 1 % можно вычислять в первом приближении ($\xi = 1$). Для сильно ионизованного воздуха ($x_E > 0{,}4$) расчет коэффициента вязкости в первом приближении приводит к ошибке до ~ 15 %, однако уже второе приближение оказывается достаточно точным — дальнейшее увеличение ξ на точность расчетов μ в пределах ~ 1 % не сказывается [8].

Значения коэффициента теплопроводности $\lambda(\xi)$ частично диссоциированного и ионизованного воздуха, рассчитанные во втором, третьем и четвертом приближениях для давлений $p = 10^3$—10^7 Па·с и температур от 5000 до 20 000 К в [8], показывают, что второе приближение (т. е. первое ненулевое приближение) в области низких температур ($T \leqslant 6000$ К) имеет точность ~ 1 %, тогда как при высоких температурах и большой степени ионизации (низкие давления) коэффициент теплопроводности, рассчитанный во втором приближении ($\xi = 2$), отличается от рассчитанного в третьем примерно до 60 %. Четвертое приближение уточняет третье на ~ 1—2 %. Поэтому коэффициент теплопроводности необходимо рассчитывать по крайней мере в третьем (втором ненулевом) приближении.

Однако при получении приближенных формул для коэффициентов переноса, согласующихся с точными расчетами в высших приближениях, за основу принимаются выражения в низших ненулевых приближениях и предельные формулы для полной ионизации, поправки же, вносимые высшими приближениями, учитываются путем выделения в исходных выражениях слабоменяющихся величин и заменой их эффективными коэффициентами, подбираемыми эмпирически из сравнения с точными расчетами в соответствующих приближениях.

2. При получении приближенных формул для μ и λ будем исходить из выражений (1.1) и (1.2), которые могут быть представлены в виде рядов [1]

(2.1) $$\mu = \sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{H_{ii}} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{x_ix_jH_{ij}}{H_{ii}H_{jj}} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k\neq j}}^{N}\frac{x_ix_jH_{ij}H_{ik}}{H_{ii}H_{jj}H_{kk}} - \ldots;$$

(2.2) $$\lambda = -4\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{L_{ii}} + 4\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{x_ix_jL_{ij}}{L_{ii}L_{jj}} - 4\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k\neq j}}^{N}\frac{x_ix_jL_{ij}L_{ik}}{L_{ii}L_{jj}L_{kk}} + \cdots$$

Детальные расчеты [5, 28] показали, что $H_{ij} \ll H_{ii}$ и $L_{ij} \ll L_{ii}$ $(i \neq j)$. Поэтому за исходные выражения для нахождения приближенных формул примем

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{H_{ii}}; \tag{2.3}$$

$$\lambda = -4 \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{L_{ii}}. \tag{2.4}$$

Из расчетов видно, что функции A_{ij}^* (1.10) слабо зависят от температуры, но являются, вообще говоря, разными для различных типов взаимодействий. Функции B_{ij}^* (1.11) также слабо зависят от температуры. Из проведенного анализа этих коэффициентов следует, что практически для всех типов взаимодействий $1 \leqslant B_{ij}^* \leqslant 1{,}5$ в широком диапазоне значений давления и температуры (интегралы столкновений брались из [10, 11]). В [27] для всех пар i, j использовано значение $B_{ij}^* = 1{,}25$. В этом случае выражения для L_{ij} и L_{ii} упрощаются:

$$L_{ij} = 2x_i x_j m_i m_j \frac{10 - 4A_{ij}^*}{(m_i + m_j)^2 \lambda_{ij} A_{ij}^*} \qquad (i \neq j); \tag{2.5}$$

$$L_{ii} = -4\frac{x_i^2}{\lambda_i} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \frac{2x_i x_k \left[\frac{15}{2} m_i^2 + \frac{5}{2} m_k^2 + 4m_i m_k A_{ik}^*\right]}{(m_i + m_k)^2 \lambda_{ik} A_{ik}^*}. \tag{2.6}$$

Функции $Q_{ij}^{(2,2)}$ сильно зависят от температуры и пар (i, j) взаимодействующих компонентов. Поэтому в [26] предложено выразить σ_{ij} через диаметры столкновений и коэффициенты вязкости μ_i (или теплопроводности λ_i) чистых газов:

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_i + \sigma_j)^2 = C_1 \frac{\sqrt{T}}{4}\left[\left(\frac{m_i^{1/2}}{\mu_i \Omega_{ii}^{(2,2)*}}\right)^{1/2} + \left(\frac{m_j^{1/2}}{\mu_j \Omega_{jj}^{(2,2)*}}\right)^{1/2}\right]^2 = \tag{2.7}$$

$$= C_2 \frac{\sqrt{T}}{4}\left[\left(\frac{m_i^{-1/2}}{\lambda_i \Omega_{ii}^{(2,2)*}}\right)^{1/2} + \left(\frac{m_j^{-1/2}}{\lambda_j \Omega_{jj}^{(2,2)*}}\right)^{1/2}\right]^2$$

(C_1, C_2 — константы, зависящие от размерности величин). Подставляя (2.7) в (1.9) и затем (1.9) в выражения для μ_{ij} и λ_{ij}, получим

$$\mu_{ij} = \sqrt{\frac{32 m_i m_j}{m_i + m_j}} \left[\frac{m_i^{1/4}}{\mu_i^{1/2}} F_{ij} + \frac{m_j^{1/4}}{\mu_j^{1/2}} B_{ij}\right]^2; \tag{2.8}$$

$$\lambda_{ij} = \sqrt{8\frac{m_i + m_j}{m_i m_j}} \left[\frac{m_i^{-1/4}}{\lambda_i^{1/2}} F_{ij} + \frac{m_j^{-1/4}}{\lambda_j^{1/2}} B_{ij}\right]^2, \tag{2.9}$$

где

$$F_{ij} = \sqrt{\frac{Q_{ij}^{(2,2)}}{Q_{ii}^{(2,2)}}}, \quad B_{ij} = \sqrt{\frac{Q_{ij}^{(2,2)}}{Q_{jj}^{(2,2)}}}. \tag{2.10}$$

Преимущество выражений (2.8), (2.9) перед формулами для μ_{ij} и λ_{ij} (1.7), (1.8) состоит в том, что F_{ij} и B_{ij} — слабоменяющиеся функции температуры и для большинства пар взаимодействий их можно положить постоянными. Подставив (2.8), (2.9) соответственно в (2.3) и (2.4), находим

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i \mu_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} x_j \dfrac{\frac{5}{3} m_i / A_{ij}^* + m_j}{m_i + m_j} \Phi_{ij}}; \tag{2.11}$$

$$(2.12)\qquad \lambda = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i\lambda_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} x_j \dfrac{\frac{15}{4} m_i^2 + \frac{5}{4} m_j^2 + 2m_i m_j A_{ij}^*}{(m_i + m_j)^2 A_{ij}^*} \Phi_{ij}}.$$

Здесь

$$(2.13)\qquad \Phi_{ij} = \frac{\left[F_{ij} + \sqrt{\mu_i/\mu_j}\,(m_j/m_i)^{1/4} B_{ij}\right]^2}{2\sqrt{2}\,\sqrt{1 + m_i/m_j}};\quad \frac{\mu_i}{\mu_j}\sqrt{\frac{m_j}{m_i}} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\sqrt{\frac{m_i}{m_j}}.$$

Для взаимодействий нейтральных атомов и молекул $A_{ij}^* = 5/3$. Поэтому если положить $A_{ij}^* = 5/3$, $F_{ij} = B_{ij} = 1$, то выражение (2.11) переходит в широко используемую приближенную формулу Уилки [16]

$$(2.14)\qquad \mu = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i\mu_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} x_j \sqrt{\dfrac{m_j}{8(m_i + m_j)}}\left[1 + \left(\dfrac{\mu_i}{\mu_j}\right)^{1/2}\left(\dfrac{m_j}{m_i}\right)^{1/4}\right]^2}.$$

А если положить $A_{ij} = 5/2$, $F_{ij} = B_{ij} = 1$, то из (2.12) получаем аппроксимационную формулу Мэйсона и Саксены для смесей газов с близкими значениями молярных весов ($m_i \approx m_j$) [21]:

$$(2.15)\qquad \lambda = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i\lambda_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} x_j \sqrt{\dfrac{m_j}{8(m_i + m_j)}}\left[1 + \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{1/2}\left(\dfrac{m_i}{m_j}\right)^{1/4}\right]^2}.$$

В [26, 27] показано, что расчеты по формулам (2.14), (2.15) плохо согласуются с результатами точных расчетов по формулам (1.1), (1.2) при значениях температуры, соответствующих развитой диссоциации и началу ионизации. Авторы этих работ на основании анализа интегралов столкновений [6, 7] рекомендовали следующие значения величин A_{ij}^*, F_{ij}, B_{ij} в случае однократно ионизованного воздуха (отметим, что в [26, 27] кроме элементов O, N и E рассматривались H, He и C): $A_{ij}^* = A_{ji}^* = 1{,}0$ для всех взаимодействий, кроме взаимодействий атомарных ионов с их одноименными атомами, для которых было рекомендовано полагать $A_{\mathrm{N-N^+}}^* = A_{\mathrm{O-O^+}}^* = 1{,}1$; $F_{ij} = F_{ji} = 1{,}0$ для всех взаимодействий; $B_{ij} = B_{ji} = 0{,}2$ для взаимодействий атомов и молекул с электронами ($A - E$, $M - E$); $B_{ij} = B_{ji} = 0{,}15$ для атомов и молекул, взаимодействующих с ионами ($A - I$, $M - I$); $B_{ij} = B_{ji} = 0{,}78$ для взаимодействующих между собой нейтралов ($A - A$, $A - M$, $M - M$); $B_{ij} = B_{ji} = 1{,}0$ для всех других взаимодействий ($I - I$, $I - E$, $E - E$).

При таком выборе величин A_{ij}^*, F_{ij}, B_{ij} формулы (2.11), (2.12) дают существенно лучшие результаты, чем формулы Уилки (2.14) [16] и Мэйсона — Саксены (2.15) [21]. В то же время наши численные расчеты показали, что при высоких температурах, отвечающих началу ионизации, расхождения между результатами точных расчетов во втором ненулевом приближении [8] и приближенными формулами (2.11), (2.12) с указанными выше числовыми значениями эффективных коэффициентов A_{ij}^*, F_{ij}, B_{ij} могут составлять до $\sim$ 40 % для μ и $\sim$ 30 % для λ.

В связи с этим в данной работе рассмотрен вопрос о возможности получения более точных приближенных формул для коэффициентов вязкости и транспортной теплопроводности частично ионизованного воздуха, которые давали бы минимальные отклонения от результатов точных расчетов, полученных с учетом высших приближений [8].

3. Заметим, что диагональные элементы H_{ii} (1.3) и L_{ii} (2.6) можно представить в виде

$$H_{ii} = \frac{x_i^2}{\mu_i} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \frac{2x_i x_k}{\mu_{ik}} \frac{m_k}{m_i + m_k} - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} H_{ik} \approx \frac{x_i^2}{\mu_i} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \frac{2x_i x_k}{\mu_{ik}} \frac{m_k}{m_i + m_k}; \tag{3.1}$$

$$L_{ii} = -4\frac{x_i^2}{\lambda_i} - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \frac{2x_i x_k}{(m_i + m_k)^2 \lambda_{ik} A_{ik}^*} \left[\frac{15}{2} m_i^2 + \frac{5}{2} m_k^2 + 10 m_i m_k\right] + \tag{3.2}$$

$$+ \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} L_{ik} \approx -4\frac{x_i^2}{\lambda_i} - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \frac{2x_i x_k}{(m_i + m_k)^2 \lambda_{ik} A_{ik}^*} \left[\frac{15}{2} m_i^2 + \frac{5}{2} m_k^2 + 10 m_i m_k\right].$$

Здесь в предположении малости недиагональных членов $H_{ik} \ll H_{ii}$, $L_{ik} \ll L_{ii}$ $(i \neq k)$ было использовано то же приближение, что и при получении выражений (2.3), (2.4). Подставляя (3.1) в (2.3), (3.2) в (2.4), в результате очевидных преобразований получим

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i x_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} x_k G_{ik} \sqrt{\frac{2m_k}{m_i + m_k}}} = \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\mu_i x_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} x_k G_{ik} \sqrt{\frac{2m_k}{m_i + m_k}}} + \tag{3.3}$$

$$+ \sum_{i=I} \frac{\mu_i x_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} x_k G_{ik} \sqrt{\frac{2m_k}{m_i + m_k}}} + \frac{\mu_E x_E}{x_E + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq E}}^{N} x_k G_{Ek} \sqrt{2}};$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i x_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} x_k G_{ik} \sqrt{\frac{2m_k}{m_i + m_k}}\, \psi_{ik}} = \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\lambda_i x_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} x_k G_{ik} \sqrt{\frac{2m_k}{m_i + m_k}}\, \psi_{ik}} + \tag{3.4}$$

$$+ \sum_{i=I} \frac{\lambda_i x_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} x_k G_{ik} \sqrt{\frac{2m_k}{m_i + m_k}}\, \psi_{ik}} + \frac{\lambda_E x_E}{x_E + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq E}}^{N} x_k G_{Ek} \sqrt{2}\, \psi_{Ek}},$$

где

$$G_{ik} = \frac{Q_{ik}^{(2,2)}}{Q_{ii}^{(2,2)}}; \tag{3.5}$$

$$\psi_{ik} = \frac{\frac{15}{4} m_i^2 + \frac{5}{4} m_k^2 + 5 m_i m_k}{(m_i + m_k)^2 A_{ik}^*}. \tag{3.6}$$

Здесь N_n — число нейтральных компонентов. Из выражений для вязкости и теплопроводности чистых газов (1.7), (1.8) следует, что можно пренебречь электронной составляющей в многокомпонентном коэффициенте вязкости (третье слагаемое в (3.3)) и ионной составляющей в многокомпонентном коэффициенте транспортной теплопроводности (второе слагаемое в (3.4)), так как $m_E \ll m_k$ $(k \neq E)$.

В случае полностью однократно ионизованной плазмы при отсутствии магнитного поля ионная вязкость μ_I (Па·с) и электронная теплопроводность λ_E (Вт/мК) вычисляются по формулам [29]

$$\mu_I = 0{,}406 \frac{(4\pi\varepsilon_0)^2 \sqrt{m_I} (kT)^{5/2}}{e^4 \ln \Lambda}; \tag{3.7}$$

$$\lambda_E = 151{,}44\,\frac{k^{7/2} T_E^{5/2} \varepsilon_0^2}{\sqrt{m_E}\, e^4 \ln \Lambda_E} \tag{3.8}$$

$$\left(\Lambda = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k^2}{pe^2}}\,\frac{4\pi\varepsilon_0 3kT}{\sqrt{\dfrac{x_I}{T^2} + \dfrac{x_E}{T_E^2}}},\quad \Lambda_E = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k^2}{pe^2}}\,\frac{4\pi\varepsilon_0 3kT_E}{\sqrt{\dfrac{x_I}{T^2} + \dfrac{x_E}{T_E^2}}}\right).$$

Здесь m_E (кг), e — масса и заряд электрона; ε_0 — электрическая постоянная; k — постоянная Больцмана; T — температура поступательных степеней свободы тяжелых компонентов; T_E — электронная температура; x_I — суммарная концентрация ионов.

Расчеты показывают, что при больших степенях ионизации второе слагаемое в (3.3) можно заменить выражением

$$\sum_{i=I} \frac{\mu_i x_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} x_k G_{ik} \sqrt{\dfrac{2m_k}{m_i + m_k}}} = 1{,}85\cdot 10^{-15}\,\frac{T^{5/2}}{\ln \Lambda}\, x_I, \tag{3.9}$$

где значение числового множителя (с учетом (3.7)) подобрано эмпирически.

В итоге предлагаются следующие приближенные формулы для вычисления коэффициентов вязкости и транспортной теплопроводности частично диссоциированного и ионизованного воздуха:

$$\mu = \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\mu_i x_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} x_k G_{ik} \sqrt{\dfrac{2m_k}{m_i + m_k}}} + 1{,}85\cdot 10^{-15}\,\frac{T^{5/2}}{\ln \Lambda}\, x_I; \tag{3.10}$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\lambda_i x_i}{x_i + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} x_k G_{ik} \sqrt{\dfrac{2m_k}{m_i + m_k}}\,\psi_{ik}} + \frac{\lambda_E x_E}{x_E + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq E}}^{N} x_k G_{Ek} \sqrt{2}\,\psi_{Ek}} + \lambda_E x_E. \tag{3.11}$$

Матрица G_{ik} (см. (3.5)) несимметричная, при этом числами задаются наддиагональные элементы: $G_{MM} = G_{AA} = 1{,}05$, $G_{AM} = 0{,}78$, остальные $G_{ik} = 2{,}15$ (порядок компонентов был таким: O_2, N_2, NO, O, N, O^+, N^+, NO^+, O_2^+, N_2^+, E). Поддиагональные элементы пересчитываются очевидным образом:

$$G_{ki} = G_{ik}\,\frac{Q_{ii}^{(2,2)}}{Q_{kk}^{(2,2)}} = G_{ik}\,\frac{\mu_k}{\mu_i}\sqrt{\frac{m_i}{m_k}} = G_{ik}\,\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\sqrt{\frac{m_k}{m_i}}. \tag{3.12}$$

Матрица A_{ik}^* (см. (1.10)) симметричная: $A_{MM}^* = A_{AA}^* = 2{,}5$, $A_{IE}^* = 5{,}2$, остальные $A_{ik}^* = 2{,}3$.

Хорошо известно, что при большой степени ионизации электроны могут давать основной вклад в коэффициент транспортной теплопроводности смеси, и для хорошего соответствия с точным расчетом при развитой ионизации в выражение (3.11) для λ был введен дополнительный член $\lambda_E x_E$, который учитывает поправку, вносимую в коэффициент теплопроводности вторым ненулевым приближением. Только после этого посредством варьирования коэффициентов A_{ik}^* удалось добиться хорошего согласия с результатами точных расчетов $\lambda(3)$. (Коэффициенты G_{ik} при этом полагались теми же, что и в выражении (3.10).)

4. На рис. 1—4 приведены значения коэффициентов вязкости и транспортной теплопроводности химически и термодинамически ($T_E = T$) равновесного диссоциированного и ионизованного воздуха в зависимости

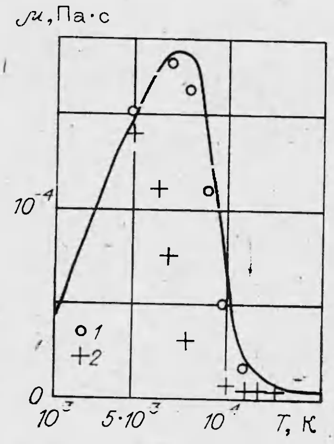

Рис. 1

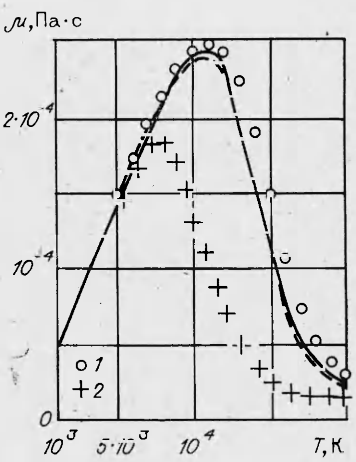

Рис. 2

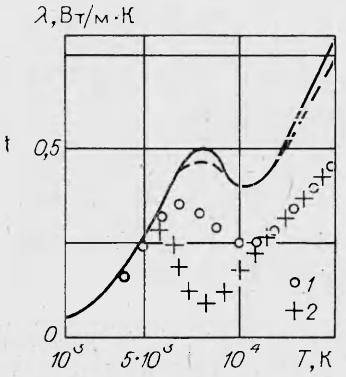

Рис. 3

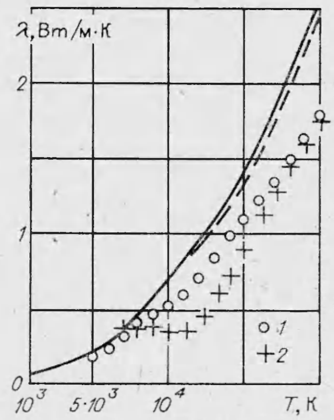

Рис. 4

от температуры (10^3 К $\leqslant T \leqslant T^*$, T^* — температура, отвечающая режиму полной однократной ионизации) при давлениях 10^2 и 10^5 Па·с; здесь сплошные линии — точные расчеты [8], штриховые — расчеты по формулам (3.10), (3.11) с указанными выше значениями G_{ik}, A^*_{ik} (на рис. 1 штриховая и сплошная линии совпадают практически во всем рассматриваемом диапазоне температур), точки *1* — расчеты по формулам Армали и Саттона (2.11), (2.12) с рекомендованными ими значениями F_{ij}, B_{ij}, A^*_{ij}, *2* — расчеты по формулам Уилки (2.14) и Мэйсона — Саксены (2.15).

Расчеты показали, что отклонение значений μ и λ, полученных с помощью формул (3.10), (3.11), от точных расчетов составляет ~ 2 % в области начала диссоциации (10^3 К $\leqslant T \leqslant 6\cdot10^3$ К). Для высоких температур расхождение с точными расчетами не превышает ~ 6 % вплоть до режима полной однократной ионизации при давлениях $p = 10^2$, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6 Па·с. Из рисунков видно, что уже при развитой диссоциации формулы Уилки и Мэйсона — Саксены дают ошибку ~ 50—70 %. Формулы Армали и Саттона существенно точнее, однако при значительной степени ионизации отклонение от точного расчета может составлять до ~ 40 % для μ и ~ 30 % для λ. Расчеты по формулам Уилки, Мэйсона — Саксены и Армали — Саттона хорошо согласуются с точными расчетами только при относительно низких температурах. Формулы Уилки и Мэйсона — Саксены в свое время были предложены для расчетов свойств недиссоциированных газов и проверялись на смесях инертных газов. Поэтому экстраполяция их в область высоких температур дает большую ошибку. Армали и Саттон опирались на расчеты [6], которые при развитой диссоциации отличаются от точных [8] на $\sim$ 10 %, а при полной диссоциации и развитой ионизации из-за использования низших приближений — на $\sim$ 15 % (μ) и $\sim$ 60 % (λ). Но даже с данными [6] расчеты по формулам Армали и Саттона расходятся более чем на 10 %.

Таким образом, на основе точных расчетов получены простые полуэмпирические формулы для определения коэффициентов вязкости и транспортной теплопроводности (обусловленной переносом энергии поступательными степенями свободы компонентов) смеси, позволяющие уменьшить затраты машинного времени при решении сложных газодинамических задач. При этом в низкотемпературной области расхождение с результатами точных расчетов $\sim$ 1—2 %, в широком диапазоне температур и давлений не более чем 3 % и только в узкой переходной области может достигать 6 %. Вид выражений (3.10) и (3.11)— независимость задаваемых аппроксимационных коэффициентов G_{ik}, A_{ik}^* от температуры и давления, а также хорошее соответствие с точными численными расчетами для значений давления в интервале нескольких порядков — дает основание полагать, что формулы (3.10) и (3.11) можно с хорошей точностью применять при произвольном химическом составе диссоциированного и ионизованного воздуха.

Для других газовых смесей, очевидно, потребуются свои отдельные исследования. Однако подход, предложенный Армали и Саттоном и развитый в настоящей работе, может быть применен, по-видимому, для достаточно широкого класса смесей газов и плазмы. Кратко основные идеи данного подхода могут быть сформулированы следующим образом: 1) за основу берутся выражения для μ и λ смеси газов в первом ненулевом приближении; 2) в этих выражениях всюду пренебрегается величинами H_{ij}, L_{ij} $(i \neq j)$; 3) в полученных формулах отбрасываются члены, учитывающие электронную вязкость и ионную теплопроводность; 4) с использованием асимптотических выражений для μ и λ [29] «отслеживается» выход на точное решение в случае полной однократной ионизации; 5) выделяются величины, слабо зависящие от температуры и давления, и заменяются эффективными числовыми коэффициентами, которые подбираются эмпирически из сравнения с результатами точных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.** Молекулярная теория газов и жидкостей.— М.: ИЛ, 1961.
2. **Колесников А. Ф., Тирский Г. А.** Уравнения гидродинамики для частично ионизованных многокомпонентных смесей газов с коэффициентами переноса в высших приближениях // Молекулярная газодинамика.— М.: Наука, 1982.
3. **Васильевский С. А., Соколова И. А., Тирский Г. А.** Точные уравнения и коэффициенты переноса для многокомпонентной смеси газов и частично ионизованной плазмы // ПМТФ.— 1984.— № 4.
4. **Васильевский С. А., Тирский Г. А.** Влияние многокомпонентной диффузии и высших приближений для коэффициентов переноса на теплопередачу при гиперзвуковом обтекании затупленного тела // Прикладные вопросы аэродинамики летательных аппаратов.— Киев: Наук. думка, 1984.
5. **Biolsi L.** Transport properties in the Jovian atmosphere // Geophys. Res.— 1978.— V. 83, N A3.
6. **Yas J. M.** Transport of nitrogen, hydrogen, oxygen and air to 30 000 K.— Wilmington, Mass., 1963.— (Techn. Memo/AVCO corp.; RAD—TM — 63—7).
7. **Freeman G. N., Oliver C. C.** High temperature thermodynamic and transport properties of planetary CO_2-N_2 atmosphere // AIAA J.— 1970.— V. 8, N 9.
8. **Васильевский С. А., Соколова И. А., Тирский Г. А.** Определение и вычисление эффективных коэффициентов переноса для химически равновесных течений частично диссоциированных и ионизованных смесей газов // ПМТФ.— 1986.— № 1.
9. **Суслов О. Н., Тирский Г. А., Щенников В. В.** Описание химически равновесных течений многокомпонентных ионизованных смесей в рамках уравнений Навье — Стокса и Прандтля // ПМТФ.— 1971.— № 1.
10. **Гордеев О. А., Калинин А. П., Комов А. Л. и др.** Потенциалы взаимодействия, упругие сечения, интегралы столкновений компонентов воздуха для температур до 20 000 К // Обзоры по теплофизическим свойствам веществ /ИВТАН СССР.— 1985.— № 5(55).
11. **Герасимов Г. Я., Калинин А. П., Люстерник В. Е. и др.** Интегралы столкновений, потенциалы атомно-молекулярных и ионно-молекулярных взаимодействий компо-

нентов воздуха до 20 000 K // Обзоры по теплофизическим свойствам веществ/ ИВТАН СССР.— 1987.— № 5(67).
12. **Соколова И. А., Тирский Г. А.** Свойства молекулярного переноса диссоциированных и ионизованных смесей газов // ПМТФ.— 1988.— № 3.
13. **Васильевский С. А., Жлуктов С. В., Соколова И. А., Тирский Г. А.** Приближенные формулы для коэффициентов молекулярного переноса диссоциированного и ионизованного воздуха и их применение в задачах гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена.— М., 1986.— (Отчет/Ин-т механики МГУ; № 3359).
14. **Herning F., Zipperer L.** Calculation of the viscosity of technical gas mixtures from the viscosity of the individual gases// Gas- und Wasserfach.— 1936.— V. 79, N 49—54.
15. **Reichenberg D.** New simplified methods for the estimation of the viscosities of gas mixtures at moderate pressures // NPL Report Chem.— 1977.— N 53.
16. **Wilke C. R.** A viscosity equation for gas mixtures // J. Chem. Phys.— 1950.— V. 18, N 4.
17. **Saxena S. C., Tanzman A.** A note on the calculation of viscosities for multicomponent gas mixtures // High Temp. Sci.— 1974.— V. 6, N 3.
18. **Svehla R. A.** Estimated viscosities and thermal conductivities of gases at high temperatures.— Wash., 1962.— (Techn. Rept/NASA; TR—132).
19. **Brokaw R. A.** Approximate formulas for the viscosity and thermal conductivity of gas mixtures // J. Chem. Phys.— 1958.— V. 29, N 2.
20. **Ulybin S. A.** A simple formula for the thermal conductivity of dilute gas mixtures // XIIIth Intern conf. on thermal conductivity, Univ. Missouri, Rolla, 1973: Proc.
21. **Mason E. A., Saxena S. C.** Approximate formula for the thermal conductivity of gas mixtures // Phys. Fluids.— 1958.— V. 1, N 5.
22. **Brokow R. S.** Thermal conductivitv of gas mixtures in chemical equilibrium. II // J. Chem. Phys.— 1960.— V. 32, N 4.
23. **Muckenfuss C., Cuztiss C. F.** Thermal conductivity of multicomponent gas mixtures // J. Chem. Phys.— 1958.— V. 29, N 6.
24. **Butler J. H., Brokow R. S.** Thermal conductivity of gas mixtures in chemical equilibrium // J. Chem. Phys.— 1957.— V. 26, N 6.
25. **Blake L. H.** Approximate transport calculations for high-temperature air // AIAA J.— 1970.— V. 8, N 9.
26. **Armaly B. F., Sutton K.** Viscosity of multicomponent partially ionized gas mixtures.— N. Y., 1980.— (Pap./AIAA; N 1495).
27. **Armaly B. F., Sutton K.** Thermal conductivity of partially ionized gas mixtures.— N. Y., 1982.— (Pap./AIAA; N 0469).
28. **Capitelli M.** Simplified expressions for the calculation of the contribution of the heavy components to the transport coefficients of partially ionized gases //Z. Naturforcsch.— 1972.— Bd 27a.
29. **Митчнер М., Кругер Ч.** Частично ионизованные газы.— М.: Мир, 1976.

г. Москва *Поступила 8/VIII 1988 г.*

УДК 533.95:538.4:537.523

В. В. Губин, В. А. Шувалов

О СОПРОТИВЛЕНИИ ТЕЛА С СОБСТВЕННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА

Наличие собственного магнитного поля существенно изменяет характер обтекания, структуру возмущенной зоны и распределение заряженных частиц у поверхности тел в сверхзвуковом потоке разреженной плазмы [1]. Источником магнитного поля тела может быть система токов либо постоянных магнитов. В [1, 2] выявлено решающее влияние самосогласованного поля на распределение заряженных частиц в окрестности тел с собственным магнитным полем при $\rho_e \ll R \ll \rho_i$ (R — характерный размер тела, ρ_α — ларморовский радиус частиц сорта α). Возмущения, вносимые собственным магнитным полем, приводят к изменению функциональных характеристик различных систем и особенностей динамического взаимодействия тел с потоком. Результаты приближенного численного решения задачи о МГД-взаимодействии тел со сверхзвуковым потоком разреженной плазмы [3, 4] свидетельствуют о возможности контроля сил, действующих на тело, изменения теплоотдачи к поверхности. Экспериментальные данные скудны, ограничены узким диапазоном параметров взаимодействия и не учитывают влияние геометрии поверхности тела [5, 6]. В настоящей работе приведены результаты экспериментального исследования влияния собственного магнитного поля на сопротивление тел простой геометрической формы (диск, сфера, цилиндр, конус). Опреде-